

УДК 621.54:519.8
ББК 22.18

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ С АКТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Прилуцкий М.Х.¹, Дикарев К.И.²

(Нижегородский государственный университет им.
Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород)

В работе строится и исследуется математическая модель функционирования сложных технических систем, транспортных сетей, систем распределения материальных ресурсов. В рамках построенной математической модели ставятся задачи оптимального планирования и управления иерархическими системами с активными элементами. Предлагаются эффективные алгоритмы их решения. В качестве примера рассмотрена задача согласования входных и выходных параметров участка газотранспортной системы, содержащей в качестве активных элементов газоперекачивающие мощности.

Ключевые слова: математическое моделирование, активный элемент, иерархические системы, распределение ресурсов, газотранспортная система, компрессорный цех.

1. Введение

В работе [13] дано математическое описание подхода к решению оптимизационной задачи согласования параметров класса иерархических систем, связанных с передачей и распре-

¹ Михаил Хаимович Прилуцкий, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой ИАНИ ННГУ им. Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 6, к. 109, тел. (831) 465-97-26).

² Константин Игоревич Дикарев, аспирант кафедры ИАНИ ННГУ (dicar@rambler.ru).

делением материального ресурса. Рассмотрение конкретизировано на примере задачи расчета оптимальных режимов функционирования фрагмента газотранспортной системы, представляемой в виде иерархической структуры укрупненных элементов: линейных участков магистральных газопроводов, соединенных компрессорными мощностями. Участок газотранспортной системы представлялся в виде обобщенных элементов, преобразующих параметры на входе в выходные параметры посредством математической модели, описывающей физические процессы, происходящие при функционировании системы. Математическая модель функционирования обобщенных элементов представляется в форме математического описания физических процессов на линейных участках магистральных газопроводов.

В работах [8, 14, 15, 12] используется подход, связанный с формализацией газотранспортных систем в виде многоуровневых иерархических структур [11, 4, 2]. Общие проблемы моделирования иерархических многоуровневых систем рассматриваются в [9]. В работах [5, 6] излагаются теоретические вопросы, связанные с функционированием систем с активными элементами. В работах [1,10] задачи повышения эффективности функционирования газотранспортных систем рассматриваются как оптимизационные задачи планирования и оперативного управления. В работах [7,16] моделирование функционирования сложных газотранспортных систем рассматривается с привлечением численных методов математического моделирования физических процессов при транспорте и компримировании газа. Оптимизации режимов работы газотранспортных систем на основе методов численного моделирования с применением принципа минимизации упрощений и допущений посвящена работа [17]. Следует также отметить и монографию [3], авторы которой применяют системный подход при построении моделей процессов компримирования газа в газотранспортных системах, рассматривая данные процессы как объекты иерархического управления, и на этой основе описывают подходы к оптимальному управлению данными процессами.

В отличие от [13], в данной работе иерархическая система формализуется в виде совокупности активных и пассивных элементов. Применение того или иного управления для активного элемента при заданных входных параметрах по-разному реализует выходные параметры. При этом система приобретает «доход», связанный как со значениями входных и выходных параметров, так и с примененными управлениями. Пассивные элементы автоматически преобразуют входные параметры в выходные.

В качестве примера конкретизации указанной постановки, рассматривается задача согласования входных и выходных параметров участка газопроводной системы, содержащий в качестве активных элементов газоперекачивающие мощности.

. Газотранспортная система представляет собой набор линейных частей магистральных газопроводов, разделенных компримирующими мощностями. Линейные части представляют собой протяженные (до 150 км) участки, состоящие обычно из нескольких параллельных трубных ниток, прокладываемых в одном коридоре, и оснащенных лупингами (участок трубопровода, прокладываемый параллельно основному трубопроводу), перемычками между нитками, и крановыми площадками. Компримирующие мощности представляют собой компрессорные станции, в которых организована очистка газа от частиц и примесей с помощью фильтров-сепараторов и пылеуловителей, его компримирование до нужного давления в компрессорных газоперекачивающих агрегатах, и последующее снижение температуры газа до необходимого значения в аппаратах воздушного охлаждения. Компримирование газа в компрессорных станциях выполняется в компрессорных цехах, каждый из которых «обслуживает» одну из ниток газотранспортной системы. В цехе поток газа разделяется на несколько параллельных потоков, каждый из которых компримируется отдельным газоперекачивающим агрегатом или группой агрегатов.

На входах разветвленной газотранспортной системы задаются коммерческий расход, температура, давление и относительная плотность (концентрация) газа. На выходах задаются определяемые контрактными обязательствами значения ком-

мерческого расхода газа, и значения давления газа. Температуры газа на выходах из компрессорных станций должны удовлетворять требованиям по температурному режиму.

Варьируемыми параметрами для обеспечения нужного режима функционирования газотранспортной сети являются значения оборотов валов нагнетателей газоперекачивающих агрегатов, а также значения оборотов вентиляторов на аппаратах воздушного охлаждения.

Требуется определить для всех газоперекачивающих агрегатов и вентиляторов такие значения частот оборотов, чтобы были согласованы заданные значения параметров газа на входах и выходах сети, то есть, чтобы при заданных параметрах транспортируемого газа, на выходах получались их требуемые значения. Суммарные затраты, включающие затраты топливного газа для всех турбинных приводов газоперекачивающих агрегатов, и затраты на эксплуатацию объектов газотранспортной сети, должны быть минимальны.

В рассматриваемом примере роль активных элементов играют компрессорные станции, а пассивные элементы – это линейные участки газотранспортной сети без компримирующих мощностей.

2. Постановка задачи оптимизации функционирования иерархических систем с активными элементами

Рассматривается иерархическая система, моделируемая связным взвешенным ориентированным графом без петель и контуров, где вершины графа определяют элементы системы, а дуги – связи между элементами. Элементы системы соответствуют моделям реальных технических устройств и инженерных сетей, осуществляющих транспорт распределяемого материального ресурса.

Элементы системы подразделяются на активные и пассивные элементы. Для активных элементов системы применяются «управления», которые преобразуют входные характеристики в выходные с определенными «затратами». Для пассивных эле-

ментов параметры входных характеристик однозначно определяют параметры характеристик на выходе.

Задача оптимизации функционирования иерархических систем с активными элементами заключается в определении таких управлений активными элементами, при которых согласование заданных значений параметров входных и выходных элементов выполнялось бы с минимальными затратами.

Пусть $G = (V, A)$, $A \subseteq V^2$, – ориентированный граф без петель и контуров. Множество вершин графа V соответствует элементам системы, множество дуг A – связям между ними. Через V^a и V^p обозначим соответственно множество активных и пассивных элементов системы, а через V^{ex} и V^{exx} – множество входных и выходных элементов, $V^a \subseteq V$, $V^p \subseteq V$, $V^a \cup V^p = V$, $V^a \cap V^p = \emptyset$, $V^{ex} \subseteq V$, $V^{exx} \subseteq V$. Через $K(v)$ обозначим множество элементов, непосредственно предшествующих элементу v , $v \in V$.

Пусть I – множество характеристик системы, U^v – множество допустимых управлений, соответствующих элементу, $v, v \in V^a$; \bar{w}^v – вектор, определяющий значения характеристик на входе v -го элемента системы, $v \in V$, $\bar{w}^v \in R^{|I|}$; W_i^v и Q_i^v – минимальные и максимальные возможные значения характеристики i на входе v -го элемента системы, а H_i^v и S_i^v – минимальные и максимальные возможные значения характеристики i на выходе v -го элемента системы, $0 \leq W_i^v \leq Q_i^v$, $0 \leq H_i^v \leq S_i^v$, $i \in I, v \in V$; $\Phi^a(\bar{w}^v, \bar{u}^v)$ – вектор-функция, преобразующая входные характеристики активного элемента v в его выходные характеристики под воздействием допустимых управлений \bar{u}^v , $\Phi^a(\bar{w}^v, \bar{u}^v) \in R^{|I|}$, $\bar{u}^v \in U^v, v \in V^a$; $\Phi^p(\bar{w}^v)$ – вектор-функция, преобразующая входные характеристики пассивного элемента в его выходные характеристики, $\Phi^p(\bar{w}^v) \in R^{|I|}, v \in V^p$; $\bar{f}^v(\Phi(\bar{w}^s, \bar{u}))$ – вектор-функция, которая определяют входные

характеристики элемента v по выходным характеристикам всех элементов, непосредственно предшествующих элементу v , $\bar{u}^v \in U^v$, $s \in K(v)$, $v \in V$; $\phi(\bar{w}^v, \bar{u}^v)$ - функция, определяющая затраты, которые получит система, если для активного элемента v будут применены заданные допустимые управления, \bar{u}^v , $\bar{u}^v \in U^v$, $v \in V^a$.

Обозначим через \bar{q}^v - заданные значения характеристик для входного элемента v , $v \in V^{ex}$, а через \bar{g}^v - заданные значения характеристик для выходного элемента v , $v \in V^{bix}$, $\bar{q}^v \in R^{|I|}$, $\bar{g}^v \in R^{|I|}$. Из всех введенных обозначений варьируемыми параметрами являются векторы \bar{w}^v , $v \in V$, и \bar{u}^v , $\bar{u}^v \in U^v$, $v \in V^a$.

Математическая модель рассматриваемой системы включает в себя следующие ограничения:

- (1) $W_i^v \leq w_i^v \leq Q_i^v, i \in I, v \in V$;
- (2) $H_i^v \leq \phi_i(w_i^v, \bar{u}^v) \leq S_i^v, i \in I, \bar{u}^v \in U^v, v \in V$;
- (3) $\bar{w}^v = \bar{q}^v, v \in V^{ex}$;
- (4) $\phi(\bar{w}^v, \bar{u}^v) = \bar{g}^v, \bar{u}^v \in U^v, v \in V^{bix}$;
- (5) $\bar{w}^v = \bar{f}^v(\phi(\bar{w}^s, \bar{u}^s)), \bar{u}^s \in U^s, s \in K(v), v \in V^a \setminus V^{ex}$;
- (6) $\bar{w}^v = \bar{f}^v(\phi(\bar{w}^s)), s \in K(v), v \in V^p \setminus V^{ex}$.

Здесь условия (1) определяют ограничения характеристик на входах элементов, условия (2) – на выходах элементов. Условия (3) и (4) согласуют характеристики для входных и выходных элементов. Условия (5) и (6) определяют условия баланса между входами и выходами активных и пассивных элементов.

В рамках построенной математической модели могут быть поставлены различные оптимизационные задачи, такие как задача синтеза многоуровневых иерархических сложных систем, задача проектирования и модернизации магистральных газотранспортных систем, задача расчета параметров существующей газотранспортной системы и др.

В качестве примера рассмотрим задачу согласования параметров участка газотранспортной системы по критерию минимизации суммарных затрат на согласование входных и выходных параметров. Тогда формально критерий может быть представлен функционалом:

$$(7) \quad \sum_{v \in V^a} \phi(\bar{w}^v, \bar{u}^v) \rightarrow \min .$$

3. Математическое описание активных элементов газотранспортных систем

В работе [13] дается формальное описание пассивных элементов системы в виде линейной части газотранспортной системы. В качестве активных элементов будем рассматривать компрессорные цеха. Тогда, используя описанные в [13] пассивные элементы линейной части газотранспортной системы, можно составить модель практически любого достаточно протяженного участка газотранспортной системы.

Активный элемент газотранспортной системы преобразует «входные» параметры транспортируемого газа в «выходные» параметры, значения которых кроме значений входных характеристик, определяются также и параметрами управлений. В качестве входных характеристик для компрессорного цеха выступают значения давления газа на входе и выходе цеха, коммерческого расхода газа на входе цеха, температуры и относительной плотности газа на входе цеха. Выходными характеристиками элемента являются значения коммерческого расхода газа на выходе цеха, температур газа, относительная плотность и теплотворная способность газа на выходе цеха.

В качестве допустимых управлений для рассматриваемого активного элемента выступают значения величин оборотов валов газоперекачивающих агрегатов компрессорного цеха, и величин оборотов вентиляторов аппаратов воздушного охлаждения. Однако ввиду того, что на температуру газа на выходе компрессорных станций накладываются ограничения, обусловленные требованиями не контрактного, а технологического характера, которые неукоснительно обеспечиваются аппаратами

воздушного охлаждения, можно исключить из управляющих параметров обороты вентиляторов аппаратов воздушного охлаждения. Таким образом, в качестве управляющих воздействий мы будем рассматривать частоты вращения валов нагнетателей газоперекачивающих агрегатов компрессорного цеха.

Транспортируемый газ подается от входа в цех к выходу по системе технологических газопроводов, проходя через фильтры-сепараторы и пылеуловители, параллельные группы газоперекачивающих агрегатов, и аппараты воздушного охлаждения. При прохождении через технологические газопроводы обвязки, фильтры-сепараторы и пылеуловители, давление газа понижается ввиду гидравлических потерь. Оценка величины указанных потерь выполняется на основе газодинамических расчетов, либо с привлечением упрощенного формульного выражения, либо посредством численного анализа системы одномерных газодинамических дифференциальных уравнений.

Оценка величины повышения давления транспортируемого через компрессорный цех газа при его компримировании в нагнетателях газоперекачивающих агрегатов выполняется на основании паспортных приведенных характеристик нагнетателя, снимаемых в процессе заводских испытаний.

Повышение температуры транспортируемого газа при компримировании оценивается на основании его температуры на входе в нагнетатель и текущих значений степени сжатия, политропического коэффициента полезного действия и показателя политропы газа, получаемых из заводских зависимостей нагнетателя при заданном режиме функционирования. Снижение температуры газа в трубках аппаратов воздушного охлаждения оценивается на основании моделей процесса теплообмена в режиме вынужденной или свободной конвекции.

В дальнейшем буквами P , J , H , T , d мы будем обозначать соответственно давление, коммерческий расход газа, удельную объемную теплоту сгорания транспортируемого газа, температуру и относительную плотность газа по воздуху. Верхние индексы «вх» и «вых» - будут определять соответствующие значения параметров на входе и выходе.

Рассмотрим активный элемент ν , моделирующий отдельный компрессорный цех, внутри которого отсутствуют путевые притоки и отборы транспортируемого природного газа. Тогда вектор, определяющий значения характеристик на входе этого элемента, определим следующим образом:

$$(8) \quad \bar{w}^{\nu} = \left(P_{\nu}^{ex}, P_{\nu}^{ex}, J_{\nu}^{ex}, T_{\nu}^{ex}, d_{\nu}^{ex}, H_{\nu}^{ex} \right), \nu \in V^a.$$

Вектор, определяющий значения характеристик на выходе ν -го активного элемента системы, определяется как

$$(9) \quad \bar{\varphi}^{\nu}(\bar{w}^{\nu}, \bar{u}^{\nu}) = \left(J_{\nu}^{ex}, T_{\nu}^{ex}, d_{\nu}^{ex}, H_{\nu}^{ex} \right), \bar{u}^{\nu} \in U^{\nu}, \nu \in V^a.$$

Здесь $\bar{u}^{\nu} = (u_1^{\nu}, u_2^{\nu}, \dots, u_{|\Gamma(\nu)|}^{\nu})$ - вектор допустимых управлений, компоненты которого определяют значения величин оборотов валов газоперекачивающих агрегатов ν -го компрессорного цеха, в котором находится $|\Gamma(\nu)|$ газоперекачивающих агрегата, $\Gamma(\nu)$ - множество газоперекачивающих агрегатов ν -го компрессорного цеха, $\bar{u}^{\nu} \in U^{\nu}, \nu \in V^a$.

Таким образом, в качестве исходных параметров активный элемент получает значения давления газа на его входе и выходе, коммерческий расход газа на выходе, а также относительную плотность газа по воздуху и низшую удельную объемную теплоту сгорания газа на входе. Результирующими характеристиками рассматриваемого активного элемента, образующимися под воздействием допустимых управлений, являются коммерческий расход газа на входе элемента, а также температура, относительная плотность по воздуху, и низшая удельная теплота сгорания газа на выходе элемента.

На температуру газа на выходе компрессорных станций не накладываются ограничения коммерческого характера. В то же время объемная теплота сгорания газа и относительная плотность газа по воздуху не изменяются при прохождении через компрессорный цех (при отсутствии притоков и отбора газа в цехе). Это дает основание заключить, что основными параметрами, зависящими от управляющих воздействий на активный элемент, являются значения входных или выходных давлений и коммерческих расходов газа. Остальные параметры транспор-

тируемого через компрессорный цех газа, включая его температуру, объемную теплоту сгорания, относительную плотность по воздуху, массовую плотность, либо полностью определяются посредством давлений и расходов на входах и выходах активного элемента компрессорного цеха, либо имеют несущественную зависимость от прикладываемых управляющих воздействий. По аналогии со сказанным, можно считать, что входные параметры активного элемента, такие как теплота сгорания, относительная плотность, температура газа на входе цеха имеют слабое влияние на выходные параметры. Поэтому, при решении задачи оптимального планирования функционированием газотранспортной системы с активными элементами указанного типа, будем считать, что основными характеристиками активного элемента являются только коммерческие расходы газа и давления.

Таким образом, единственным выходным параметром, имеющим существенное значение для определения отклика активного элемента на заданные входные параметры и управления, является коммерческий расход газа на входе цеха. С учетом вышесказанного, выражения (8) и (9) можно переписать в следующем виде.

$$(10) \bar{w}^v = (P_v^{ex}, P_v^{бых}, J_v^{бых}), \varphi^v(\bar{w}^v, \bar{u}^v) = J_v^{ex}, \bar{u}^v \in U^v, v \in V^a,$$

где

$$(11) J_v^{ex} = J_v^{бых} + \sum_{i \in \Gamma(v)} J_i^{мон}(\bar{u}^v), v \in V^a.$$

Здесь $J_i^{мон}(\bar{u}^v)$ - функция, определяющая расход топливного газа, потребляемого i -ым нагнетателем v -того компрессорного цеха, при условиях, что к агрегатам будут применены управления, задаваемые вектором \bar{u}^v , $\bar{u}^v \in U^v$, $i \in \Gamma(v)$, $v \in V^a$, которая линейно зависит от значения мощности, потребляемой на валу нагнетателя, и вычисляется с использованием следующего соотношения [17]:

$$(12) J_i^{мон}(\bar{u}^v) = A_i^v \cdot N_i^v(P_v^{ex}, P_v^{бых}, \bar{u}^v) + B_i^v.$$

Здесь A_i^v, B_i^v - коэффициенты, зависящие от типа i -ого нагнетателя, конфигурации технологических газопроводов обяза-

ки компрессорной станции, атмосферного давления, плотности и температуры газа на входе в компрессорный цех, а $N_i^v(P_v^{ex}, P_v^{six}, \bar{u}^v)$ - соответствующее значение мощности, потребляемой на валу i -ого нагнетателя, $i \in \Gamma(v), v \in V^a$.

Функция $\phi(\bar{w}^v, \bar{u}^v)$, определяющая затраты элемента v , учитывает как затраты, связанные с эксплуатационным обслуживанием элемента, так и затраты, связанные с расходом топливного газа на функционирование приводов нагнетателей.

$$(13) \phi(\bar{w}^v, \bar{u}^v) = R_{эксн}^v + R_{мон}^v, \bar{u}^v \in U^v, v \in V^a.$$

Здесь $R_{эксн}^v$ - затраты, связанные с эксплуатационным обслуживанием компрессорного цеха газотранспортного предприятия, представляемого активным элементом $v \in V^a$;

$R_{мон}^v$ - затраты, связанные с расходом топливного газа на функционирование приводов нагнетателей в рамках рассматриваемого компрессорного цеха, представляемого активным элементом $v, v \in V^a$, которые определяются с использованием следующей зависимости:

$$(14) R_{мон}^v = C^{мон} \cdot \sum_{i \in \Gamma(v)} S_i^{эксн} \cdot J_i^{мон}(\bar{u}^v).$$

Здесь $C^{мон}$ - стоимость единицы объема топливного газа с учетом его подготовки;

$S_i^{эксн}$ - время работы i -ого нагнетателя v -того компрессорного цеха, $i \in \Gamma(v), v, v \in V^a$.

При этом эксплуатационная составляющая затрат в соотношении для функции затрат фактически не зависит от применяемых управлений, и может быть исключена из рассмотрения. С учетом этого, а также принимая во внимание соотношение (14), функция затрат активного элемента при заданных управлениях принимает следующий вид:

$$(15) \phi(\bar{w}^v, \bar{u}^v) = C^{мон} \cdot \sum_{i \in \Gamma(v)} S_i^{эксн} \cdot J_i^{мон}(\bar{u}^v).$$

В дальнейшем, принимая во внимание тот факт, что расход топливного газа является однозначной линейной функцией

потребляемой на валах газоперекачивающих агрегатов мощности (см. зависимость (14)), приведенную выше функцию затрат можно переписать в терминах мощности, которую необходимо минимизировать. Также учитывая, что потребляемая на валах нагнетателей мощность слабо зависит от входного и выходного давлений, (14) можно переписать в следующем виде:

$$(16) \phi(\bar{w}^v, \bar{u}^v) = N_i^v(\bar{u}^v).$$

4. Постановка задачи оптимального планирования

Прделанные преобразования позволяют в рамках общей математической модели (1)-(7) поставить задачу оптимального планирования для активных элементов иерархической системы.

Таким образом, исходную задачу (1)-(7) можно сформулировать следующим образом: необходимо при заданных давлениях и коммерческих расходах на входах и выходах газотранспортной системы определить такие управляющие воздействия на активные элементы, моделирующие компрессорные цеха, при которых заданные входные и выходные характеристики оказываются согласованными с наименьшими суммарными затратами.

Определяющей при рассмотрении данной задачи является функциональная зависимость, связывающая потребляемую приводом газоперекачивающего агрегата мощность с коммерческим расходом перекачиваемого газа при условии, что все прочие параметры фиксированы. В данной работе, как и в [8], эта зависимость аппроксимируется посредством конечного числа кусочно-линейных участков, при этом весь интервал аппроксимации по расходам разбивается на n подинтервалов, с равномерным шагом, и заменой на каждом из них исходной зависимости линейной функцией [8].

Пусть $i=1, \dots, m$ - номера типов газоперекачивающих агрегатов компрессорного цеха, $j=1, \dots, n$ - номера подинтервалов, на которые дискретизированы возможные объемы перекачиваемого газа для всех типов агрегатов. Обозначим через: m_i^- и m_i^+ , соответственно, минимально возможное и максимально допус-

тимое число агрегатов i -го типа, которое может быть использовано, $i=1, \dots, m$; J_{ij}^- и J_{ij}^+ , соответственно, минимально возможный и максимально допустимый коммерческий объемы газа, которые могут быть перекачаны i -ым агрегатом, если производительность агрегата будет соответствовать j -ому интервалу, $0 \leq J_{ij}^- \leq J_{ij}^+$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$; a_{ij} и b_{ij} - коэффициенты линейной функции, определяющей зависимость потребляемой при функционировании агрегатов мощности от объема компримируемого газа; J_v^{6bx} - плановый коммерческий объем газа, который компрессорный цех должен «перекачать».

Обозначим через x_i - количество агрегатов i -го типа, которые будут работать в планируемом периоде в компрессорном цехе, $i=1, \dots, m$; y_i - объем газа, который будет перекачен агрегатом i -го типа, $i=1, \dots, m$; $z_{ij} = 1$, если агрегат i -го типа будет работать в j -ом интервале допустимых объемов производительности, и $z_{ij} = 0$, в противном случае, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$.

Ограничения математической модели включают в себя следующие условия. Плановый объем газа для компрессорной станции должен быть выполнен:

$$(17) \sum_{i=1}^m x_i y_i = J_v^{6bx} .$$

Ограничения по возможному количеству используемых агрегатов:

$$(18) m_i^- \leq x_i \leq m_i^+, i = 1, \dots, m .$$

Ограничения на возможные объемы перекачиваемого газа для каждого агрегата:

$$(18) \sum_{j=1}^n z_{ij} J_{ij}^- \leq y_i \leq \sum_{j=1}^n z_{ij} J_{ij}^+, i = 1, \dots, m .$$

Для каждого агрегата выбирается только один «рабочий» интервал производительности, что выражается следующим условием:

$$(19) \sum_{j=1}^n z_{ij} = 1, i = 1, \dots, m.$$

Естественные условия на переменные:

$$(20) x_i - \text{целые}, i = 1, \dots, m.$$

$$(21) z_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

В качестве критерия оптимальности определим условия минимизации объема топливного газа, затрачиваемого на работу турбинных приводов всех функционирующих газоперекачивающих агрегатов компрессорной станции. Так как объем потребляемого топливного газа является линейной функцией от мощности, потребляемой на валу нагнетателя газоперекачивающего агрегата [16], то суммарная мощность, потребляемая при работе всех агрегатов компрессорного цеха должна иметь минимальное значение:

$$(22) F(\bar{x}, \bar{y}, Z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} y_i + b_{ij}) z_{ij} x_i \rightarrow \min.$$

Поставленная задача является задачей частично-целочисленного математического программирования и в общем случае относится к классу *NP*-трудных.

Для решения поставленной задачи предлагается переборный вариант, в котором необходимо проверить на совместность

$$N = 2^m \cdot n^m \cdot \prod_{i=1}^m (m_i^+ - m_i^- + 1)$$

наборов, и из совместных выбрать

тот, на котором достигается минимальное значение критерия. Здесь n – число интервалов, на которое мы разбиваем значения коммерческого объема газа между минимально возможным и максимально допустимым, m – число различных типов агрегатов. Пусть k_1, k_2, \dots, k_m – произвольный допустимый набор, где k_i – количество агрегатов i -того типа, которые будут использованы в планируемом периоде, $i = 1, \dots, m$. Тогда для этого набора решаем следующую задачу:

$$(23) \sum_{i=1}^m k_i y_i = Q_0;$$

$$(24) \sum_{j=1}^n z_{ij} Q_{ij}^- \leq y_i \leq \sum_{j=1}^n z_{ij} Q_{ij}^+, \quad i=1, \dots, m.$$

$$(25) \sum_{j=1}^n z_{ij} = 1, \quad i=1, \dots, m.$$

$$(26) z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n.$$

$$(27) F(y, Z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} y_i + b_{ij}) z_{ij} k_i \rightarrow \min.$$

Эту задачу предлагается так же решать полным перебором по всевозможным наборам значений $z_{ij} \in \{0,1\}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$. Количество таких различных наборов будет равняться n^m .

Т.е. надо решить n^m задач линейного программирования с номерами $s=1, \dots, n^m$, следующего вида:

$$(28) \sum_{i=1}^m k_i y_i = J^{6bx};$$

$$(29) \sum_{j=1}^n J_{ij}^- \leq y_i \leq \sum_{j=1}^n J_{ij}^+, \quad i=1, \dots, m;$$

$$(30) F(y) = \left(\sum_{i=1}^m a_{ij_s} y_i + b_{ij_s} \right) k_i \rightarrow \min.$$

Для решения каждой такой задачи достаточно перебрать 2^m точек, "подозрительных" на допустимость, для каждой точки проверить ее на допустимость (подставив значения координат точки в уравнение $\sum_{i=1}^m k_i y_i = J^{6bx}$), и среди допустимых точек найти точку с минимальным значением критерия.

Рассмотрим конкретный пример, параметры которого соответствуют реальным значениям одного из цехов компрессорной станции «Надымская» ООО «Тюментрансгаз» ([8]). В компрессорном цехе функционируют 5 полнонапорных газоперекачивающих агрегатов: с двумя центробежными нагнетателями типа PCL-1002, и с тремя нагнетателями типа 235-21-1. Таким образом, количество газоперекачивающих агрегатов различных типов в рамках рассматриваемого компрессорного

цеха $m=2$. Давление на входе компрессорного цеха составляет $P_v^{ex} = 5.472$ МПа. Требуемое же выходное давление для цеха составляет $P_v^{бых} = 7.114$ МПа. Известно также, что компрессорный цех должен «перекачивать» газ в количестве, равном $J^{бых} = 90$ млн. $\text{м}^3/\text{сут}$. Для рассматриваемого примера примем число интервалов для диапазона расходов $n=5$. Ограничения по возможному количеству использованных агрегатов для обоих типов следующие: $m_1^- = 0$, $m_2^- = 0$, $m_1^+ = 2$, $m_2^+ = 3$.

Тогда для решения задачи необходимо проверить на совместность $N=1200$ вариантов, то есть выполнить 1200 проверок.

Построим все возможные наборы работающих агрегатов.

Их будет $\prod_{i=1}^m (m_i^+ - m_i^- + 1) = (2-0+1) \cdot (3-0+1) = 12$. Это наборы:

0-0, 0-1, 0-2, 0-3

1-0, 1-1, 1-2, 1-3

2-0, 2-1, 2-2, 2-3.

Для каждого набора со значениями $k_1 - k_2$ решается задача (23)-(27). Тогда минимальное значение функционала на допустимом решении задачи среди всех 12-ти вариантов, определит оптимальное решение всей задачи.

Для нашего примера различных наборов значений z_{ij} будет $n^m = 5^2 = 25$.

Таким образом, надо решить 25 задач линейного программирования (28)-(30) с номерами $s=1, 2, \dots, 25$.

Рассмотрим допустимый набор $k_1=2$, $k_2=1$.

Для газоперекачивающих агрегатов с центробежными нагнетателями типа PCL-1002/40 при заданных значениях давлений на входе и выходе цеха допустимые значения коммерческих расходов газа лежат в интервале [31.144;48.054] млн. $\text{м}^3/\text{сут}$. Аналогично, при заданных значениях P_v^{ex} и $P_v^{бых}$ для агрегатов с нагнетателями типа 235-21-1 значения коммерческих расходов транспортируемого газа лежат в интервале значений [13.15;28.29] млн. $\text{м}^3/\text{сут}$. Данным интервалам значений коммерческих расходов соответствуют интервал рабочих частот вращения валов, равных [3616;4073] об/мин для газоперекачи-

вающих агрегатов с центробежными нагнетателями типа PCL-1002/40, и [3945;5390] об/мин для газоперекачивающих агрегатов с центробежными нагнетателями типа 235-21-1, соответственно. Вне указанных диапазонов для заданных значений входного и выходного давлений находятся недопустимые рабочие точки. Каждый из указанных интервалов дискретизируется на подинтервалы в количестве $n=5$.

Для нашего примера получаем задачу линейного программирования:

$$(31) \quad 2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 90;$$

$$(32) \quad 31.14 \leq y_1 \leq 35.71;$$

$$(33) \quad 17.42 \leq y_2 \leq 20.71;$$

$$(34) \quad F(y_1, y_2) = (332.8 \cdot y_1 + 309.4) + (438.0 \cdot y_2 - 1527.4) \rightarrow \min .$$

Проверяем $2^2=4$ точки на допустимость – подставляя их в первое уравнение.

$y_1=31.14$, тогда $y_2=27.72$ (≥ 20.71) – данная точка не является допустимой,

$y_1=35.71$, тогда $y_2=18.57$ (≤ 20.71) – получили первую допустимую точку,

$y_2=17.42$, тогда $y_1=36.29$ (≥ 35.71) – данная точка не является допустимой,

$y_2=20.71$, тогда $y_1=34.65$ (≤ 35.71) – получили вторую допустимую точку.

Для первой допустимой точки $F(y_1, y_2)=34047,125$, а для второй допустимой точки $F(y_1, y_2)=34279,068$. Таким образом, лучшая для данного варианта точка (35,71, 18,57).

5. Заключение

В работе описан подход к оптимальному планированию процессов функционирования сложных иерархических систем с активными элементами. Описана общая постановка задачи оптимального планирования, и проведена конкретизация данной постановки на примере газотранспортной системы.

Приводимый здесь подход может быть положен в основу создания пользовательских программных средств, предназна-

ченных для решения задач оптимального планирования и синтеза магистральных газотранспортных систем. В частности, он был положен в основу создания программного продукта, предназначенного для расчета, проектирования и модернизации магистральных газотранспортных систем, который был внедрен в ОАО «Гипрогазцентр» (г. Н. Новгород).

Кроме того, данный подход может быть применен для научно-обоснованного нахождения эффективных вариантов модернизации и расширения реальных участков газотранспортных систем в процессе их адаптации к эволюции входных и выходных параметров, а также при возрастании требуемых объемов газа у его потребителей.

Литература

1. АФРАЙМОВИЧ Л.Г., ПРИЛУЦКИЙ М.Х. *Многоиндексные задачи оптимального планирования производства* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №. 10. – С. 148–155.
2. АФРАЙМОВИЧ Л.Г., ПРИЛУЦКИЙ М.Х. *Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №. 6. – С. 194–205.
3. БАЛАВИН М.А., ПРОДОВИКОВ С.П., ШАЙХУТДИНОВ А.З И ДР. *Автоматизация процессов газовой промышленности* – СПб.: Наука, 2003. – 496 с.
4. БАТИЩЕВ Д.И., ГУДМАН Э.Д., НОРЕНКОВ И.П., ПРИЛУЦКИЙ М.Х. *Метод декомпозиций для решения комбинаторных задач упорядочения и распределения ресурсов* // Информационные технологии. – 1997. – №. 1. – С. 29–33.
5. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем* – М.: Наука, 1977. – 255 с.
6. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем* – М.: Наука, 1981. – 384 с.
7. ГРАЧЕВ В.В., ЩЕРБАКОВ С. Г., ЯКОВЛЕВ Е.И. *Динамика трубопроводных систем* – М.: Наука, 1987. – 439 с.
8. КОСТЮКОВ В.Е., ПРИЛУЦКИЙ М.Х. *Распределение ресурсов в иерархических системах. Оптимизационные за-*

дачи добычи, транспорта газа и переработки газового конденсата : учебное пособие. – Н.Новгород.: Изд-во Нижегородского университета, 2010. – 78 с.

9. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем* – М.: Мир, 1973. – 344 с.
10. ПРИЛУЦКИЙ М.Х. *Многокритериальные многоиндексные задачи объёмно-календарного планирования* // Известия академии наук. Теория и системы управления. – 2007. – №. 1. – С. 78–82.
11. ПРИЛУЦКИЙ М.Х. *Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах* // Автоматика и телемеханика. – 1996. – №. 2. – С. 139–146.
12. ПРИЛУЦКИЙ М.Х., БУХВАЛОВА И.Р., АФРАЙМОВИЧ Л.Г., СТАРОСТИН Н.В., ФИЛИМОНОВ А.В., *Оптимизационные задачи оперативного управления работой компрессорной станцией* // Электронный журнал "Исследовано в России". – 2008 – 032 – С.375-382– URL: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2008/032.pdf> (дата обращения 31.10.2011).
13. ПРИЛУЦКИЙ М.Х., ДИКАРЕВ К.И., *Оптимизационные задачи согласования параметров для участков газотранспортной системы* // Системы Управления и Информационные Технологии. – 2011 – № 3.1(45) – С.185-189.
14. ПРИЛУЦКИЙ М.Х., КОСТЮКОВ В.Е., *Оптимизационные задачи планирования транспортировки газа* // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2007 – № 2 – С.67-73.
15. ПРИЛУЦКИЙ М.Х., ШУМИЛОВ В.Б., АФРАЙМОВИЧ Л.Г., СТАРОСТИН Н.В., ФИЛИМОНОВ А.В., *Оптимизационные задачи планирования транспорта газа в магистральном газопроводе* // Электронный журнал "Исследовано в России". – 2008 – 033 – С.383-391– URL: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2008/033.pdf> (дата обращения 31.10.2011).
16. САРДАНАШВИЛИ С.А. *Расчетные методы и алгоритмы (трубопроводный транспорт газа)* – М.: ФГУП Изд-во

«Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005. – 577 с.

17. СЕЛЕЗНЕВ В.Е., АЛЕШИН В. В., ПРЯЛОВ С.Н. *Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов: методы, модели и алгоритмы* – М.: МАКС Пресс, 2007. – 695 с.

THE OPTIMAL SCHEDULING FOR A HIERARCHY SYSTEM CLASS CONTAINING ACTIVE COMPONENTS

Prilutskii Mikhail, Lobachevsky State University, Nizhniy Novgorod, Doctor of Science, professor (*Nizhniy Novgorod, Gagarin av., 23/6, office 109, (831) 465-97-26*).

Dikarev Konstantin, Lobachevsky State University, Nizhniy Novgorod, post-graduate student (*dicar@rambler.ru*).

Abstract: The mathematical model of complex technical systems operation and material resource distribution systems operation is developed and considered within the frames of the present work. The problems of active components hierarchical systems optimal scheduling and control are stated using developed mathematical model. The effective algorithms for solution of such problems are suggested. The problem of input and output parameters concordance for gas transportation system section with gas superchargers units as active elements is considered as an example.

Keywords: mathematical simulation, an active element, hierarchical systems, resource distribution, gas transportation system, gas compressor chop.