

УДК 519.177+519.217.2+517.977.1

ББК 22.18

ОБ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДОСТИЖЕНИЯ КОНСЕНСУСА¹

Агаев Р.П.²

(Учреждение Российской академии наук Институт проблем
управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В статье рассмотрена непрерывная модель согласования характеристик в многоагентных системах, в которых соответствующая матрица Кирхгофа диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением. Доказано, что матрица, через которую выражается предел решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям, как и в случае дискретной модели согласования мнений является собственным проектором матрицы Кирхгофа.

Ключевые слова: многоагентные системы, децентрализованное управление, консенсус, лапласовская матрица, матрица Кирхгофа, модель Де Гроота, управление.

1. Введение

Стохастические матрицы и матрицы, связанные с ними, играют ключевую роль при исследовании в социальных сетях. В [1, 2] в русле классических работ (таких, как, [3]) разработаны

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-07-00371а и Программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

² Рафиг Паашевич Агаев, к.т.н., с.н.с. (agaraf@rambler.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-88-69).

оптимизационные модели и методы информационного влияния и управления в социальных сетях. Согласно одной из таких моделей, модели Де Гроота [3], если $s(0) = (s_1^0, \dots, s_n^0)^T$ – вектор начальных мнений членов группы, а $s(k) = (s_1^k, \dots, s_n^k)^T$ – вектор мнений после k -го шага согласования, то $s(k) = Ps(k-1)$, $k = 1, 2, \dots$, где P – стохастическая матрица влияний, элемент p_{ij} которой задает степень влияния мнения j -го агента на мнение i -го. Необходимым и достаточным условием сходимости мнений агентов при любом векторе исходных мнений является регулярность матрицы P .

Отметим, что регулярность матрицы P тесно связана с наличием остовного исходящего дерева в орграфе влияний. Это условие в свою очередь гарантирует сходимость процедур согласования характеристик в более общих моделях управления многоагентными системами. В работе [4] была решена задача дискретного согласования характеристик в случае, когда это условие нарушается, и описано подпространство T_P начальных мнений (где P – матрица влияний), обеспечивающих сходимость процедуры согласования в модели Де Гроота.

Для непрерывных моделей эта задача ранее не была решена. Широко известен всего лишь тот факт, что если нуль является простым собственным значением матрицы Кирхгофа, то консенсус достигается. Кроме того, даже в этом случае не получено явных выражений “предельной матрицы”, входящей в асимптотическое решение с заданным начальным условием.

В настоящей работе рассматривается непрерывная модель согласования характеристик в многоагентных системах, в которых соответствующая матрица Кирхгофа диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением.

Статья имеет следующую структуру. После введения приведены некоторые определения и обозначения. В разделе 3 до-

казано, что если матрица L диагонализуема и нуль является ее простым собственным числом, то одна из строк трансформирующей матрицы пропорциональна строкам нормированной матрицы максимальных исходящих лесов, которая является собственным проектором для матрицы Кирхгофа. Этот результат в разделе 4 применен для анализа асимптотического поведения многоагентной системы и установлено, что если орграф коммуникаций системы состоит из не связанных базовых компонент, то области сходимости как для дискретных моделей, так же и для непрерывных моделей определяются соответствующим собственным проектором.

2. Основные термины и обозначения

Орграф коммуникаций Γ определим множествами вершин $\{1, \dots, n\}$ и дуг с не отрицательными весами.

Матрица Кирхгофа $L = L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ орграфа Γ определяется следующим образом: при $j \neq i$ полагают $\ell_{ij} = -w_{ji}$, где w_{ji} – вес дуги (j, i) , если в Γ имеется дуга (j, i) , и $\ell_{ij} = 0$ в противном случае; $\ell_{ii} = \sum_{k \neq i} w_{ki}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Пусть n – число агентов многоагентной системы, $x_i(t)$ – характеристика i -го агента, $a_{ij}(t) \geq 0$ – вес, с которым i -й агент учитывает расхождение в значении характеристики с j -м агентом. Рассмотрим дифференциальную модель:

$$(1) \quad \dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) (x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $a_{ij} = w_{ji}$.

В матричной форме модель (1) можно представить как $\dot{x}(t) = -L(t)x(t)$.

Для любой матрицы Кирхгофа $L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ взвешенного орграфа Γ (веса дуг – произвольные положительные числа) можно

определить стохастическую матрицу влияний:

$$(2) \quad P = I - \epsilon L,$$

где $\epsilon < (\max \ell_{ii})^{-1}$.

Любой максимальный по включению сильный подграф орграфа называют его *сильной компонентой* или *бикомпонентой*. *Базовая бикомпонента* – такая бикомпонента, в которую не входят дуги извне.

Будем говорить, что матрица имеет предел, если последовательность ее степеней стремится к некоторой матрице.

Если стохастическая матрица P орграфа влияний имеет предел P^∞ , то

$$(3) \quad P^\infty = \bar{J},$$

где $\bar{J} = (j_{kr})$ – нормированная матрица максимальных исходящих лесов соответствующего взвешенного орграфа Γ (следствие матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова [5], см. также теорему 7 из [6]). Отметим, что $\bar{J}$ является собственным проектором для L .

Элементы матрицы $\bar{J} = (j_{kr})$ определяются следующим образом:

$$(4) \quad j_{kr} = \frac{q_{kr}}{\sigma},$$

где q_{kr} – вес множества максимальных исходящих из вершины r лесов, в которых вершина k достижима из r , σ – вес множества всех максимальных исходящих лесов в орграфе Γ .

3. О свойствах трансформирующей матрицы для L

Предположим, что матрица L орграфа диагонализуема и нуль является ее простым собственным значением. Такой орграф всегда содержит исходящее дерево. Через W обозначим невырожденную матрицу, все столбцы которой являются линейно независимыми собственными векторами L . Предположим, что

вершины орграфа пронумерованы таким образом, что первая вершина принадлежит базовой бикомпоненте. Пусть первый столбец матрицы W является собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению матрицы L :

$$W = \begin{pmatrix} t & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ t & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}, \quad (t \neq 0).$$

Обозначим, через W_0 матрицу, полученную из W заменой всех столбцов кроме первого, соответствующего нулевому собственному значению, нулевым вектором. Столбец нулевого собственного значения не меняем.

W можно представить в виде

$$(5) \quad W = L_t K,$$

где

$$L_t = \begin{pmatrix} t & \ell_{12} & \dots & \ell_{1n} \\ t & \ell_{22} & \dots & \ell_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t & \ell_{n2} & \dots & \ell_{nn} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

Из невырожденности матрицы W следует, что K — невырожденная матрица.³

Предложение 1. Если матрица L диагонализуема и нуль является ее простым собственным числом, то матрица $W_0 W^{-1}$ совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов $\bar{J}$, т.е. с собственным проектором L и каждая строка $\bar{J}$ пропорциональна первой строке матрицы W^{-1} .

³ L_t — невырожденная по построению.

Доказательство предложения 1. Согласно матричной теореме о деревьях (см., например, теорему 16.9' в [7], где результат формулируется для матрицы L^T и невзвешенных орграфов) алгебраическое дополнение любого элемента k -й строки матрицы L равно весу множества всех деревьев, исходящих из вершины k . Поскольку в матрице L_t все элементы первого столбца равны t , k -й элемент первой строки матрицы L_t^{-1} определяет нормированный вес множества всех исходящих деревьев, в которых k является корнем. Под нормированным мы понимаем долю веса множества деревьев, исходящих из вершины k .

Поскольку $W_0 K^{-1} = W_0$, а первая строка матрицы $t L_t^{-1}$ совпадает со строками собственного проектора матрицы L , то получим:

$$W_0 W^{-1} = W_0 L_t^{-1} = \bar{J}.$$

□

4. Согласование характеристик в дифференциальной модели с начальным вектором состояний

Рассмотрим матричную запись дифференциальной модели, заданной уравнением (1):

$$(6) \quad x'(t) = -Lx(t),$$

где $x(t)$ — вектор характеристик агентов, L — диагонализуемая матрица Кирхгофа орграфа коммуникаций с единственным нулевым собственным значением.

Предложение 2. Если $x(t)$ — решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, то

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{J} x_0,$$

где $\bar{J}$ — собственный проектор матрицы L .

Доказательство предложения 2. Общее решение (6) имеет вид

$$x(t) = X(t)C,$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (6), C — произвольный постоянный вектор.

Находим решение (6), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = X_{\infty}X^{-1}(0)x_0.$$

Заметим, что $X_{\infty} = W_0$ и $X(0) = W$. В силу предложения 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{J}x(0).$$

□

Если матрица Кирхгофа диагонализуема и соответствующий орграф состоит только из базовых бикомпонент, то ее собственный проектор имеет вид

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \bar{J}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{J}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \bar{J}_{ss} \end{pmatrix}.$$

В этом случае для согласования характеристик может быть применена процедура ортогональной проекции, предложенная в [4].

Пример. В качестве примера рассмотрим орграф коммуникаций, состоящий из бикомпоненты $\{5, 6\}$, доминируемой единственной базовой бикомпонентой на множестве вершин $\{1, 2, 3, 4\}$.

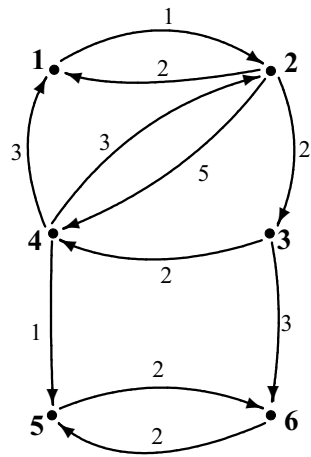


Рис. 1.

Рассмотрим матрицу Кирхгофа этого орграфа:

$$L = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы L :

(0; 9,162; 1,764; 2,838; 6; 6,236).

Поскольку все они различны, матрица L диагонализуема.

Построим трансформирующую матрицу W , столбцы которой – собственные векторы, соответствующие найденным выше соб-

ственным значениям L :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0,395 & 0 & -0,209 & 0,684 & 0 \\ 1 & 0,395 & 0 & -0,209 & -0,049 & 0 \\ 1 & -0,110 & 0 & 0,498 & 0,024 & 0 \\ 1 & -0,812 & 0 & -0,011 & -0,196 & 0 \\ 1 & 0,126 & 0,851 & -0,813 & -0,342 & -0,526 \\ 1 & 0,019 & 0,526 & -0,060 & 0,611 & 0,851 \end{pmatrix}$$

Поскольку матрица W — невырожденная, имеет место

$$X(t) = (w_1; w_2 e^{-9,162t}; w_3 e^{-1,764t}; w_4 e^{-2,838t}; w_5 e^{-6t}; w_5 e^{-6,236t}).$$

Тогда

$$X_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}(0) = W^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ -0,214 & 0,890 & 0,262 & -0,938 & 0 & 0 \\ -0,353 & -1,141 & 0,810 & -0,693 & 0,851 & 0,526 \\ -0,294 & -0,636 & 1,601 & -0,671 & 0 & 0 \\ 1,364 & -1,364 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,883 & 1,092 & -0,664 & 0,131 & -0,526 & 0,851 \end{pmatrix},$$

$$X_{\infty}W^{-1} = \begin{pmatrix} 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0,090 & 0,449 & 0,231 & 0,231 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Заключение

В работе доказано предложение, согласно которому если матрица Кирхгофа диагонализуема и нуль является ее единственным собственным значением, то одна из строк обратной трансформирующей матрицы пропорциональна строкам собственного проектора данной матрицы Кирхгофа. Это предложение применено для анализа дифференциальной модели согласования характеристик. Установлено, что величина, к которой сходятся характеристики агентов, равна скалярному произведению вектор-строки собственного проектора матрицы Кирхгофа и вектора начальных мнений агентов.

Более общий случай, когда матрица Кирхгофа не диагонализуема (за счет ненулевых собственных значений), в настоящей статье не рассматривается. Можно высказать предположение, что для этого случая в непрерывных моделях согласования характеристик предельная матрица, входящая в решение системы уравнений, также совпадает с собственным проектором матрицы Кирхгофа. Если это предположение верно, то предельный случай обеих — непрерывной и дискретной моделей описывается единым механизмом.

Литература

1. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управление и противоборства*. – М.: Физматлит. –2010. – 228 с.
2. БАРАБАНОВ И.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Динамические модели информационного управления в социальных сетях* // Автоматика и телемеханика. – 2010 № 11. – С. 172–182.
3. DeGROOT М.Н. *Reaching a consensus* // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118–121.
4. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. –С. 38–59.
5. ВЕНТЦЕЛЬ А.Д., ФРЕЙДЛИН М.И. *О малых случайных возмущениях динамических систем* // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – С. 3–55.
6. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 15–43.
7. ХАРАРИ Ф. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973. – 300 с.

THE REGION OF CONVERGENCE OF THE DIFFERENTIAL MODEL OF CONSENSUS

Rafig Agaev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow,
Candidate of Science, senior researcher (agaraf@rambler.ru,
Moscow, Profsoyuznaya str., 65, (495)334-88-69).

Abstract: This paper is devoted to consensus problems in continuous multi-agent systems whose corresponding Kirchhoff matrix is diagonalizable and 0 is a simple eigenvalue of L . It is proved that the limiting matrix of the solution of the linear differential system of equations satisfying the initial condition is a eigenprojection of Kirchhoff matrix L , which also determines and is defined the region of convergence to consensus of the DeGroot algorithm.

Keywords: multi-agent systems, decentralized control, consensus, Laplacian matrix, Kirchhoff matrix, DeGroot model, control.