

УДК 681.5.013; 681.514; 681.511.22; 681.516.42; 681.516.74
ББК 32.965.4.32.965.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СИНТЕЗА АНИЗОТРОПИЙНЫХ СУБОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ¹

Чайковский М.М.²

(Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача подавления внешних возмущений для линейной дискретной стационарной системы под воздействием случайных возмущений с неточно известными распределениями. Синтезируемый анизотропийный субоптимальный регулятор в общем случае представляет собой динамический компенсатор заданного порядка, стабилизирующий замкнутую систему и сохраняющий ее анизотропийную норму ниже заданного порогового значения. Предлагаемый подход к синтезу анизотропийных регуляторов является новым и более удобным для практических вычислений.

Ключевые слова: дискретные линейные стационарные системы, случайные возмущения, статистическая неопределенность, норма, анизотропия, выпуклая оптимизация, линейные матричные неравенства.

Введение

Стохастическая неопределенность случайных возмущений, рассматриваемая как различие между неточно известным распределением реального шума измерений и его номинальной модели,

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-08-00714-а) и Программы №15 ОЭМПУ РАН.

² Чайковский Михаил Михайлович, кандидат физико-математических наук (mttchaikovsky@hotmail.com).

может значительно ухудшить качество работы системы управления, если применяемая процедура синтеза регулятора основана на определенном законе распределения возмущения и предположении, что этот закон известен точно. Подобные ситуации могут также возникать из природного непостоянства условий рабочей среды системы управления. Так, \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторы являются полностью эффективными лишь при достаточно точном выполнении базовых гипотез о природе внешних возмущений. Известно, что \mathcal{H}_2 (или линейно-квадратичный гауссовский) регулятор может оказаться недостаточно эффективным в случае, если внешнее возмущение представляет собой сильно коррелированный шум [17], в то время как \mathcal{H}_∞ регулятор, проектируемый для наихудшего случая детерминированного возмущения [18], проявляет излишний консерватизм и требует избыточных энергетических затрат на управление, если внешнее возмущение представляет собой белый или слабо коррелированный случайный сигнал.

Одна из первых идей, направленных на преодоление указанного недостатка линейно-квадратичного гауссовского регулятора в случае, когда внешнее возмущение не является гауссовским белым шумом, была представлена в работе [35], посвященной некоторой модификации критерия качества. Эта идея привела к развитию целого класса задач в теории управления — управление системами, чувствительными к рискам [70, 71].

Идеи построения регуляторов, которые сочетали бы положительные качества линейно-квадратичных гауссовских (\mathcal{H}_2) и \mathcal{H}_∞ регуляторов (т.е. минимизировали линейно-квадратичный критерий качества и были бы достаточно робастны) возникли в начале 1990-х годов. В частности, можно выделить подход, связанный с минимизацией \mathcal{H}_2 нормы замкнутой системы при ограничениях на ее \mathcal{H}_∞ норму [11], и подход, связанный с минимизацией функционала \mathcal{H}_∞ энтропии при ограничениях на \mathcal{H}_∞ норму замкнутой системы [49].

Как показано в [24], задача синтеза регулятора, минимизирующего функционал \mathcal{H}_∞ энтропии, до известной степени эквивалентна задаче синтеза оптимального регулятора, чувстви-

тельного к риску. Множество работ посвящено задачам, связанным с минимизацией функционала \mathcal{H}_∞ энтропии, см. например [32, 50, 30, 72, 20].

Идеи смешанного $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ управления, впервые представленные в [11], были расширены в [75, 58] на основе разделения внешних возмущений на сигналы с ограниченным спектром и ограниченной мощностью и применения смешанного $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ критерия качества. Решение задачи стохастического смешанного $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ управления для дискретных систем получено в [48].

Во всех перечисленных выше работах применяются методики, основанные на решении определенных (иногда перекрестно связанных) уравнений Риккати. В [36] смешанная $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ задача была рассмотрена в терминах алгебраических неравенств (а не уравнений) Риккати и решена с помощью выпуклой оптимизации. С тех пор, как были разработаны эффективные алгоритмы внутренней точки для решения задач выпуклой оптимизации [12, 52, 51], выпуклая оптимизация стала стандартной стратегией анализа и синтеза систем управления. Методы линейных матричных неравенств (ЛМН) зарекомендовали себя, как мощная и гибкая методика формулирования проектных требований к разрабатываемой системе и синтеза регуляторов, применимая к широкому спектру линейных задач теории управления [13]. После того, как решение задачи синтеза \mathcal{H}_∞ регулятора с помощью ЛМН было получено в [22, 31], полуопределенное программирование успешно применяется для получения эффективных решений многокритериальных $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ задач управления [59, 14, 64, 46, 28, 54, 60, 7, 62, 9].

Подход к подавлению неопределенных случайных возмущений на основе минимаксного управления был предложен в середине 1990-х годов в [25]–[27] и впоследствии распространен на случай многомерных систем и синтез регуляторов с заданной структурой методами ЛМН в [61]. Вместо точного знания коэффициентов ковариации возмущения, при применении данного подхода требуется лишь, чтобы коэффициенты ковариации принадлежали известному множеству. Синтезируемый регулятор

минимизирует наихудшую возможную асимптотическую дисперсию выхода для всех таких возмущений. Рассматриваемая задача является промежуточной между экстремальными \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ сценариями синтеза и сводится к задаче робастного управления с неопределенностью в сигнале внешнего возмущения [61].

В то же время, другой многообещающий подход на основе стохастического минимакса возник из идей И.Г. Владимирова, разработавшего анизотропийную теорию стохастического робастного управления, представленную в ряде работ [63, 3, 4, 68]. В свете этого подхода, робастность в стохастическом управлении достигается с помощью явного включения различных сценариев распределения шума в единый показатель качества, подлежащий оптимизации; статистическая неопределенность измеряется в терминах энтропии, и показатель робастного качества можно выбрать так, чтобы количественно охарактеризовать возможности системы по подавлению наихудшего внешнего возмущения. Главными понятиями анизотропийной теории стохастического робастного управления являются анизотропия случайного вектора и анизотропийная норма системы.

Функционал анизотропии, введенный И.Г. Владимиром, является энтропийной мерой отклонения вероятностного распределения в евклидовом пространстве от гауссовских распределений с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами. Средняя анизотропия стационарной случайной последовательности определяется как интенсивность анизотропии на единицу времени для достаточно длинных сегментов последовательности. Применительно к случайным возмущениям, действующим на систему, средняя анизотропия характеризует величину статистической неопределенности, понимаемой как несоответствие между неточно известным фактическим распределением шума и семейством номинальных моделей возмущения в виде стационарного дискретного гауссовского белого шума со скалярной ковариационной матрицей [68, 16].

Вторым базовым понятием теории И.Г. Владимира является a -анизотропийная норма дискретной линейной стационар-

ной системы (ДЛСС), количественно определяющая возможности системы по подавлению возмущений наибольшим отношением мощностной нормы выхода системы к мощностной норме ее входа при условии, что средняя анизотропия входного сигнала не превышает заданного неотрицательного уровня a [68, 16]. Обобщение анизотропийного анализа робастного качества на конечный интервал времени было сделано в [2].

В контексте стохастического робастного управления, направленного на подавление потенциально неблагоприятного воздействия статистической неопределенности, анизотропийный подход предлагает важную альтернативу методам синтеза управления, основанным на точном знании закона распределения случайного внешнего возмущения. Минимизация анизотропийной нормы замкнутой системы в критерии качества приводит к стабилизирующему регулятору по выходу, который проявляет меньший консерватизм по сравнению с \mathcal{H}_∞ регулятором и является более эффективным при подавлении коррелированных возмущений, чем \mathcal{H}_2 регулятор [16]. Решение задачи синтеза анизотропийного оптимального регулятора в пространстве состояний, полученное И.Г. Владимировым в [69], основано на решении трех перекрестно связанных алгебраических уравнений Риккати, алгебраического уравнения Ляпунова и уравнение относительно логарифма детерминанта положительно определенной матрицы. Получаемый в результате решения задачи синтеза оценивающий регулятор полного порядка (центральный регулятор) является единственным. Расширение этих результатов на класс объектов с параметрической неопределенностью было получено в [39, 5]. Но решение сложных систем перекрестно связанных уравнений требует разработки и применения специальных вычислительных алгоритмов на основе метода гомотопий [15]. Вместе с тем, применяемая процедура синтеза на основе решения уравнений не направлена на синтез регуляторов пониженного или заданного порядка (а также децентрализованных и многокритериальных регуляторов, регуляторов с заданной структурой), задачи синтеза которых все еще открыты.

Синтез анизотропных субоптимальных регуляторов является естественным продолжением подхода, предложенного И.Г.Владимировым в [69]. Вместо минимизации анизотропной нормы системы, субоптимальный регулятор стабилизирует замкнутую систему и обеспечивает ограниченность ее анизотропной нормы заданным значением, т.е. гарантирует подавление случайных внешних возмущений, средняя анизотропия которых не превосходит известного уровня, с качеством не хуже заданного. В отличие от синтеза оптимального анизотропного регулятора, решение субоптимальных задач синтеза приводит к некоторому семейству регуляторов, таким образом предоставляя дополнительные степени свободы для наложения некоторых дополнительных спецификаций на замкнутую систему с целью достижения желаемого качества управления. Одной из таких спецификаций, например, может быть заданное расположение полюсов замкнутой системы для достижения желаемого качества переходных процессов. Для решения задачи синтеза анизотропного субоптимального регулятора требуется критерий проверки ограниченности анизотропной нормы системы заданным значением. Частотная теорема для анизотропной нормы, представленная в [40], является стохастическим аналогом известной частотной теоремы для \mathcal{H}_∞ нормы ДЛСС под воздействием статистически неопределенных стационарных гауссовских возмущений с ограниченной средней анизотропией. Полученный критерий сформулирован в виде неравенства относительно логарифма детерминанта матрицы, выраженной из решения алгебраического уравнения Риккати, зависящего от скалярного параметра. Аналогичный критерий для дискретных линейных нестационарных систем (ДЛНС), сформулированный в виде неравенства, зависящего от дискретного времени, и разностного уравнения Риккати, получен в [47]. Достаточная строгая версия частотной теоремы для анизотропной нормы была сформулирована в [66, 67] как задача выпуклой оптимизации при ограничениях в виде строгого неравенства относительно детерминанта положительно определенной матрицы и ЛМН. Было показано, что ограничение на

детерминант линейно зависит от квадрата порогового значения анизотропийной нормы, минимизация которого на выпуклом множестве позволяет вычислять α -анизотропийную норму ДЛСС из решения задачи выпуклой оптимизации [67]. Разработанная процедура анализа является привлекательной с вычислительной точки зрения и легко реализуется средствами некоммерческого программного обеспечения со свободным доступом для выпуклой оптимизации [65, 45]. Предлагаемая вниманию читателя работа направлена на применение мощной методологии выпуклой оптимизации и линейных матричных неравенств к синтезу анизотропийных субоптимальных и γ -оптимальных регуляторов в общем случае заданного порядка. Анизотропийные регуляторы являются мощной и гибкой альтернативой \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторам в задачах подавления случайных внешних возмущений с неточно известными распределениями. В сравнении с решением в пространстве состояний задачи синтеза анизотропийного оптимального регулятора, полученным ранее в [69], предлагаемый подход на основе численной оптимизации является новым и не требует разработки и применения специальных вычислительных алгоритма на основе метода гомотопий [15].

Структура работы следующая. В разделе 1 изложена постановка общей задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора заданного порядка. В разделе 2 представлено решение общей задачи синтеза регулятора заданного порядка, рассмотрены три частных случая структуры объекта управления и регулятора: регулятор в виде статической обратной связи по состоянию для объекта, состояние которого измеряется точно; динамический регулятор полного порядка по измеряемому выходу; регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу. В разделе 3 рассматривается ряд иллюстративных вычислительных примеров. Заключительные замечания даны в разделе 4.

Обозначения

Множество вещественных чисел обозначается \mathbb{R} , множество $(n \times m)$ -матриц — $\mathbb{R}^{n \times m}$. Для комплексной матрицы $M = [m_{ij}]$, M^* обозначает эрмитово сопряжение этой матрицы $M^* := [m_{ji}^*]$.

Для вещественной матрицы $M = [m_{ij}]$, M^T обозначает транспонирование: $M^T := [m_{ji}]$. Для вещественных симметричных матриц, $M \succ N$ означает, что матрица $M - N$ положительно определена. В блочно-симметричных матрицах, символ $*$ заменяет блоки, вид которых определяется симметрией. Спектральный радиус матрицы M обозначается $\rho(M) := \max_k |\lambda_k(M)|$, где $\lambda_k(M)$ — k -е собственное значение матрицы M . Максимальное сингулярное значение комплексной матрицы M обозначается $\bar{\sigma}(M) := \sqrt{\lambda_{\max}(M^*M)}$. I_n обозначает единичную матрицу размерности $(n \times n)$, $0_{n \times m}$ — нулевую $(n \times m)$ -матрицу. Размерности нулевых матриц в случаях, когда их нетрудно понять из контекста, указываться не будут.

Угловое граничное значение матричной передаточной функции $F(z)$, аналитической в единичном диске комплексной плоскости $|z| < 1$ обозначается

$$\widehat{F}(\omega) := \lim_{r \rightarrow 1^-} F(re^{i\omega}).$$

$\mathcal{H}_2^{p \times m}$ и $\mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ обозначают пространства Харди $(p \times m)$ -матричных передаточных функций $F(z)$ комплексной переменной z , аналитических в единичном диске $|z| < 1$, с ограниченной \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормой, соответственно:

$$\|F\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(\widehat{F}(\omega)\widehat{F}^*(\omega))d\omega \right)^{1/2} < +\infty,$$

$$\|F\|_\infty := \sup_{|z| \geq 1} \bar{\sigma}(F(z)) = \text{ess sup}_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \bar{\sigma}(\widehat{F}(\omega)) < +\infty.$$

1. Постановка задачи синтеза

Объект управления представлен дискретной линейной стационарной моделью $P(z)$ с n_x -мерным состоянием X , m_w -мерным входом возмущения W , m_u -мерным входом управления U , p_z -мерным управляемым выходом Z и p_y -мерным измеряемым вы-

ходом Y . Предполагается, что все сигналы представляют собой двусторонние бесконечные векторные дискретные последовательности, связанные уравнениями

$$(1) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы, $p_z \leq m_w$, пара матриц (A, B_u) является стабилизируемой, а пара (A, C_y) — детектируемой.

Предполагается, что внешнее возмущение $W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty}$ является стационарной последовательностью случайных векторов w_k с нулевым средним $\mathbf{E}w_k = 0$, неизвестной ковариационной матрицей $\mathbf{E}w_k w_k^T = \Sigma_W \succ 0$ и гауссовской плотностью распределения вероятности

$$p(w_k) := (2\pi)^{-m_1/2} (\det \Sigma_W)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \|w_k\|_{\Sigma_W^{-1}}^2\right),$$

где $\|w_k\|_{\Sigma_W^{-1}} = \sqrt{w_k^T \Sigma_W^{-1} w_k}$ и \mathbf{E} обозначает математическое ожидание. Также предполагается, что средняя анизотропия последовательности W не превосходит известного неотрицательного уровня a . Последнее означает, что последовательность W можно генерировать из m_w -мерного гауссовского белого шума $V = (v_k)_{-\infty < k < +\infty}$ с нулевым средним $\mathbf{E}v_k = 0$ и скалярной ковариационной матрицы $\mathbf{E}v_k v_k^T = \lambda I_{m_1}$, $\lambda > 0$, неизвестным устойчивым линейным стационарным формирующим фильтром $G(z)$ из множества

$$\mathcal{G}_a := \{G \in \mathcal{H}_2^{m \times m} : \overline{\mathbf{A}}(G) \leq a\},$$

где

$$\overline{\mathbf{A}}(G) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left(\frac{m_w}{\|G\|_2^2} \widehat{G}(\omega) \widehat{G}^*(\omega) \right) d\omega$$

— функционал средней анизотропии [68, 16].

Задача синтеза — найти регулятор заданного порядка по измеряемому выходу в форме динамического компенсатора

$$(2) \quad K(z) : \begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

с n_ξ -мерным состоянием $\Xi = (\xi_k)_{-\infty < k < +\infty}$, стабилизирующий замкнутую систему (рис. 1) и гарантирующий некоторый заданный уровень качества подавления внешних возмущений в замкнутой системе. Предполагается, что для объекта управления (1) и регулятора (2) выполняется условие Кимуры [37] порядка n_ξ :

$$n_\xi > n_x - m_u - p_y.$$

Выполнение этого условия гарантирует существование стабилизирующего регулятора заданного порядка n_ξ .

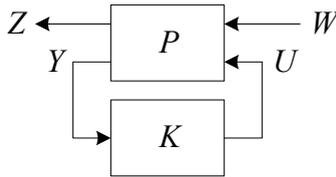


Рис. 1. Замкнутая система

Пусть $T_{ZW}(z)$ — матричная передаточная функция замкнутой системы от возмущения W к управляемому выходу Z . Напомним, что a -анизотропийная норма передаточной функции $T_{ZW}(z) \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$ количественно характеризует возможности замкнутой системы по подавлению внешних возмущений наибольшим отношением мощностной нормы выхода этой системы к мощностной норме входа при условии, что средняя анизотропия возмущения не превосходит уровня a [68, 16]:

$$(3) \quad \|T_{ZW}\|_a := \sup_{G \in \mathcal{G}_a} \frac{\|T_{ZW}G\|_2}{\|G\|_2}.$$

Из [68, 16] известно, что a -анизотропийная норма заданной системы $F \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$ является неубывающей функцией уровня средней анизотропии a , удовлетворяющей неравенству

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{m_w}} \|T_{ZW}\|_2 = \|T_{ZW}\|_0 \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|T_{ZW}\|_a = \|T_{ZW}\|_\infty.$$

Эти выражения показывают, что \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы являются предельными случаями a -анизотропийной нормы при $a \rightarrow 0, +\infty$, соответственно.

Общая постановка задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора заданного порядка следующая.

Задача 1. Для заданных объекта управления P с моделью в пространстве состояний (1), уровня средней анизотропии $a \geq 0$ входного возмущения W и некоторого желаемого порогового значения $\gamma > 0$, найти дискретный линейный стационарный регулятор по выходу K с моделью в пространстве состояний (2), стабилизирующий замкнутую систему и гарантирующий, что a -анизотропийная норма замкнутой системы не превосходит порогового значения γ , т.е.

$$(5) \quad \|T_{ZW}\|_a < \gamma.$$

2. Решение задачи синтеза

В этом разделе приводится решение общей задачи синтеза регулятора заданного порядка и рассматриваются три важных частных случая структуры объекта и регулятора: регулятор в виде статической обратной связи по состоянию для объекта, состояние которого измеряется точно; динамический регулятор по измеряемому выходу; регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу объекта управления. Для решения задачи синтеза применяется критерий проверки условия ограниченности анизотропийной нормы системы заданным пороговым значением для модели в пространстве состояний. Этот критерий, называемый частотной теоремой для анизотропийной нормы, был недавно представлен в [66, 67]. Чтобы применить частотную теорему для анизотропийной нормы к задаче синтеза, ее требуется переформулировать.

2.1. Частотная теорема для анизотропийной нормы

Для объекта управления P и регулятора K , определенных выше, реализация замкнутой системы имеет вид

$$(6) \quad T_{ZW}(z) : \begin{bmatrix} \chi_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_k \\ w_k \end{bmatrix},$$

где $\chi_k \in \mathbb{R}^n$, $n = n_x + n_\xi$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := \left[\begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c & D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \end{array} \right].$$

В [66, 67] показано, что для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$ неравенство (5) выполняется, если существует $\eta > \gamma^2$, такое что неравенство

$$(7) \quad \eta - (\det(e^{-2a/m_w}(\eta I_{m_w} - \mathcal{B}^T \Phi \mathcal{B} - \mathcal{D}^T \mathcal{D})))^{1/m_w} < \gamma^2$$

выполняется для некоторой вещественной $(n \times n)$ -матрицы $\Phi = \Phi^T \succ 0$, удовлетворяющей ЛМН

$$(8) \quad \begin{bmatrix} A^T \Phi A - \Phi + C^T C & A^T \Phi B + C^T D \\ B^T \Phi A + D^T C & B^T \Phi B + D^T D - \eta I_{m_w} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Отметим, что ограничения, описываемые неравенствами (7) и (8) являются выпуклыми по обоим переменным η и Φ . Действительно, функция $-(\det(\cdot))^{1/m_w}$ положительно определенной $(m_w \times m_w)$ -матрицы в левой части (7) является выпуклой; см. [52, 10].

Условия (7), (8) частотной теоремы для анизотропийной нормы [66, 67] невозможно непосредственно применить для решения поставленной задачи синтеза из-за перекрестных произведений неизвестных матриц Φ и матриц реализации замкнутой системы (A, B, C, D) , аффинно зависящих от параметров регулятора, которые также возникают в (7). Более того, именно неравенство (7) не позволяет применить известную лемму о проекции [22, 31] для того, чтобы избавиться от матриц реализации регулятора в неравенствах синтеза.

Преодолеть указанную трудность позволяет введение вспомогательной переменной, вещественной $(m_w \times m_w)$ -матрицы $\Psi = \Psi^T \succ 0$, удовлетворяющей неравенствам

$$(9) \quad \eta - (\det(e^{-2a/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2, \quad \Psi \prec \eta I_{m_w} - \mathcal{B}^T \Phi \mathcal{B} - \mathcal{D}^T \mathcal{D},$$

что эквивалентно (7). Чтобы избавиться от произведений матриц Φ , \mathcal{B} и \mathcal{D} , перепишем последнее неравенство в (9) в виде

$$\Psi - \eta I_{m_w} - \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi^{-1} & 0 \\ 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} \prec 0,$$

где $\begin{bmatrix} -\Phi^{-1} & 0 \\ 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0$, что эквивалентно

$$(10) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0$$

в силу леммы Шура (см. например [13]).

Чтобы избавиться от перекрестных произведений матриц Φ , \mathcal{A} , and \mathcal{B} в (8), представим это неравенство в виде

$$\begin{bmatrix} -\Phi + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{C}^T \mathcal{D} \\ \mathcal{D}^T \mathcal{C} & \eta I_{m_w} + \mathcal{D}^T \mathcal{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T \\ \mathcal{B}^T \end{bmatrix} (-\Phi^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} \prec 0,$$

где $-\Phi^{-1} \prec 0$. В силу леммы Шура, предыдущее неравенство эквивалентно

$$(11) \quad \begin{bmatrix} -\Phi + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{C}^T \mathcal{D} & \mathcal{A}^T \\ \mathcal{D}^T \mathcal{C} & \mathcal{D}^T \mathcal{D} - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Чтобы избавиться от перекрестных произведений матриц \mathcal{C} и \mathcal{D} , представим неравенство (11) в виде

$$\begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{D}^T \\ 0 \end{bmatrix} (-I_{p_z})^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 \end{bmatrix} \prec 0$$

где $-I_{p_z} \prec 0$. Повторное применение леммы Шура к предыдущему неравенству приводит к следующей формулировке частотной теоремы для анизотропийной нормы в терминах взаимнообратных матриц.

Лемма 1. Пусть $T_{ZW} \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$ — матричная передаточная функция системы с реализацией (6), где $\rho(\mathcal{A}) < 1$. Анизотропийная норма (3) системы T_{ZW} строго ограничена заданным

пороговым значением $\gamma > 0$, т.е. $\|T_{ZW}\|_a < \gamma$, если существует $\eta > \gamma^2$, такое что неравенство

$$(12) \quad \eta - (\det(e^{-2a/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2$$

выполняется для некоторых вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы $\Psi = \Psi^T \succ 0$ и $(n \times n)$ -матрицы $\Phi = \Phi^T \succ 0$, удовлетворяющих неравенствам

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(14) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

С использованием обозначения $\Pi := \Phi^{-1}$, проверка выполнения условия $\|T_{ZW}\|_a < \gamma$ сводится к поиску положительной скалярной величины η и двух взаимнообратных матриц $\Phi \succ 0$, $\Pi \succ 0$, $\Phi\Pi = I_n$, удовлетворяющих ЛМН (13), (14) и выпуклому ограничению (12). Для численного решения такой задачи могут применяться известные алгоритмы, разработанные в [34, 23, 8, 19, 6, 53, 1, 55, 56] для поиска взаимнообратных матриц, удовлетворяющих выпуклым ограничениям.

2.2. Статическая обратная связь по состоянию

Прежде чем перейти к решению общей задачи синтеза 1, рассмотрим случай полной информации о векторе состояния объекта управления, когда вектор состояния можно измерить точно, и модель объекта управления описывается уравнениями

$$(15) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ I_{n_x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы, $p_z \leq m_w$, пара матриц (A, B_u) является стабилизируемой.

Задача 2. Для заданного объекта управления P с моделью (15), уровня средней анизотропии $a \geq 0$ внешнего возмущения

W и некоторого желаемого порогового значения $\gamma > 0$, найти регулятор в форме статической обратной связи по состоянию

$$(16) \quad u_k = Kx_k,$$

стабилизирующий замкнутую систему $T_{ZW}(z)$ с реализацией в пространстве состояний

$$(17) \quad \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K & B_w \\ \hline C_z + D_{zu} K & D_{zw} \end{array} \right]$$

и гарантирующий, что α -анизотропийная норма замкнутой системы не превосходит порогового значения γ , т.е. выполняется неравенство (5).

Следующая теорема дает достаточные условия существования анизотропийного субоптимального регулятора в форме статической обратной связи по состоянию.

Теорема 1. Для заданных $\alpha \geq 0$, $\gamma > 0$, статический регулятор по состоянию (16), стабилизирующий замкнутую систему (17) ($\rho(A + B_u K) < 1$) и гарантирующий выполнение (5) существует, если система неравенств

$$(18) \quad \eta - (\det(e^{-2\alpha/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(19) \quad \left[\begin{array}{ccc} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w & -\Pi & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] \prec 0,$$

$$(20) \quad \left[\begin{array}{cccc} -\Pi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \Lambda \Pi + B_u \Lambda & B_w & -\Pi & * \\ C_z \Pi + D_{zu} \Lambda & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] \prec 0,$$

$$(21) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \Pi \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $(n_x \times n_x)$ -матрицы Π и $(m_u \times n_x)$ -матрицы Λ . Если задача (18)–(21) разрешима, и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора $K = \Lambda \Pi^{-1}$.

Доказательство. Пусть решение задачи (18)–(21) существует. Определим $\Phi := \bar{\Pi}^{-1}$. По определению $K = \Lambda \Pi^{-1}$, ЛМН (19), (20) можно переписать в виде

$$(22) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\ B_w & -\Phi^{-1} & * & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} & * \end{bmatrix} \prec 0, \\ \begin{bmatrix} -\Phi^{-1} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A\Phi^{-1} + B_u K \Phi^{-1} & B_w & -\Phi^{-1} & * \\ C_z \Phi^{-1} + D_{zu} K \Phi^{-1} & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Умножая последнее неравенство слева и справа на матрицу $\text{blockdiag}(\Phi, I_{m_w}, I_{n_x}, I_{p_z}) \succ 0$, получим

$$(23) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A + B_u K & B_w & -\Phi^{-1} & * \\ C_z + D_{zu} K & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (18), (22), (23), (21) следует, что матрица статического регулятора по состоянию K является решением задачи 2 для замкнутой реализации (17), что и требовалось доказать.

Замечание 1. Нетрудно доказать, что неравенства синтеза (18)–(21) и условия (12)–(14) леммы 1 являются эквивалентными. Однако, мы можем сформулировать и доказать лишь достаточные условия существования регулятора (16), поскольку условия леммы 1 являются лишь достаточными. Это замечание касается также двух последующих теорем синтеза.

Следствие 1. Неравенства (18)–(21) являются не только выпуклыми по Ψ и аффинными по Π и Λ , но также линейными относительно γ^2 . Минимизируя γ^2 при ограничениях (18)–(21), мы минимизируем γ при тех же ограничениях. Обозначим $\hat{\gamma} := \gamma^2$. Условия теоремы 1 позволяют вычислять наименьшее значение γ из решения задачи оптимизации

$$(24) \quad \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \Pi, \Lambda, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (18)–(21)}.$$

Если задача выпуклой оптимизации (24) разрешима, матрица усиления статического регулятора по состоянию вычисляется согласно теореме 1.

Анизотропийные регуляторы, получаемые из решений задач оптимизации, аналогичных (24), называются анизотропийными γ -оптимальными регуляторами.

2.3. Синтез регуляторов по выходу заданного порядка: выпуклые ограничения на взаимнообратные матрицы

Прямое применение достаточных условий (12)–(14) леммы 1 к реализации замкнутой системы

(25)

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c & D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \end{array} \right]$$

приводит к прямому решению общей задачи 1. Предполагается, что для объекта управления (1) и регулятора (2) выполняется условие Кимуры [37] порядка n_ξ :

$$n_\xi > n_x - m_u - p_y,$$

что гарантирует существование стабилизирующего регулятора заданного порядка n_ξ .

Следствие 2. Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$, динамический регулятор по выходу K порядка n_ξ с реализацией (2), являющийся решением задачи 1, существует, если система неравенств

$$(26) \quad \eta - (\det(e^{-2a/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(27) \quad \left[\begin{array}{cccc} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\ B_w + B_u D_c D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ B_c D_{yw} & -\Pi_{12}^T & -\Pi_{22} & * \\ D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] < 0,$$

$$(28) \quad \left[\begin{array}{cccccc} -\Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ -\Phi_{12}^T & -\Phi_{22} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & * \\ A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} & -\Pi_{12}^T & -\Pi_{22} & * \\ C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c & D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] < 0,$$

$$(29) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \\ \Phi := \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} \succ 0, \quad \Pi := \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix} \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , матриц $A_c \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_\xi \times p_y}$, $C_c \in \mathbb{R}^{m_u \times n_\xi}$, $D_c \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ и двух взаимнообратных $(n \times n)$ -матриц Φ , Π , удовлетворяющих условию

$$(30) \quad \Phi\Pi = I_n,$$

где $n = n_x + n_\xi$ — порядок замкнутой системы.

Задача вычисления матриц параметров (A_c, B_c, C_c, D_c) динамического регулятора заданного порядка (2), являющегося решением задачи 1, сводится к проверке разрешимости системы неравенств (26)–(30). Задача (26)–(30) не является выпуклой из-за условия (30). Хотя применение известных алгоритмов [34, 23, 8, 19, 6, 53, 1, 55, 56] для поиска взаимнообратных матриц, удовлетворяющих линейным матричным неравенствам, может привести к успешному решению задачи (26)–(30), следует помнить, что каждый из перечисленных алгоритмов может сойтись к локальному минимуму. Тем не менее, для решения задачи синтеза регулятора полного порядка можно применить стандартную процедуру овыпукления — линеаризующую замену переменных, рассмотренную далее.

2.4. Регулятор по выходу полного порядка

Для решения задачи синтеза регулятора полного порядка ($n_x = n_\xi$) можно эффективно применить известную линеаризующую замену переменных, введенную в [21] и примененную в [64] для решения задач многокритериального управления непрерывными системами с помощью ЛМН. Из блочного разбиения в (29) и условия (30) следует

$$(31) \quad \Phi \begin{bmatrix} \Pi_{11} \\ \Pi_{12}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\Phi\Pi_1 = \Phi_1, \quad \Pi\Phi_1 = \Pi_1$$

с учетом обозначений

$$(32) \quad \Phi_1 := \begin{bmatrix} I_{n_x} & \Phi_{11} \\ 0 & \Phi_{12}^T \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 := \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ \Pi_{12}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Можно показать прямым вычислением, что

$$(33) \quad \Pi_1^T \Phi \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi \Phi_1 = \Pi_1^T \Phi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix}.$$

Ключевая линеаризующая замена переменных матриц регулятора определяется следующим образом [21]:

$$(34) \quad \mathcal{A}_c := \Phi_{12} A_c \Pi_{12}^T + \Phi_{12} B_c C_y \Pi_{11} + \\ + \Phi_{11} B_u C_c \Pi_{12}^T + \Phi_{11} (A + B_u D_c C_y) \Pi_{11},$$

$$(35) \quad \mathcal{B}_c := \Phi_{12} B_c + \Phi_{11} B_u D_c,$$

$$(36) \quad \mathcal{C}_c := C_c \Pi_{12}^T + D_c C_y \Pi_{11},$$

$$(37) \quad \mathcal{D}_c := D_c.$$

Новые переменные \mathcal{A}_c , \mathcal{B}_c , \mathcal{C}_c , \mathcal{D}_c имеют размерности $n_x \times n_x$, $n_x \times p_y$, $m_u \times n_x$ и $m_u \times p_y$, соответственно, даже если $n_x \neq n_\xi$. В [64] отмечено, что если матрицы Φ_{12} и Π_{12} имеют полный строчный ранг и если матрицы \mathcal{A}_c , \mathcal{B}_c , \mathcal{C}_c , \mathcal{D}_c , Π_{11} и Φ_{11} известны, всегда можно найти матрицы регулятора A_c , B_c , C_c , D_c , удовлетворяющие (34)–(37). Если матрицы Φ_{12} и Π_{12} являются квадратными ($n_x = n_\xi$) и обратимыми, то матрицы \mathcal{A}_c , \mathcal{B}_c , \mathcal{C}_c и \mathcal{D}_c удовлетворяющие (34)–(37), единственны. Таким образом, при синтезе регулятора полного порядка отображение, определяемое (34)–(37), биективно [21], [64].

Решение задачи 1 синтеза регулятора полного порядка дано в следующей теореме.

Теорема 2. Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$, динамический регулятор по выходу K полного порядка $n_\xi = n_x$ с реализацией (2), являющийся решением задачи 1, существует, если система неравенств

$$(38) \quad \eta - (\det(e^{-2a/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(39) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\ B_w + B_u \mathcal{D}_c D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ \Phi_{11} B_w + \mathcal{B}_c D_{yw} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\ D_{zw} + D_{zu} \mathcal{D}_c D_{yw} & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0,$$

(40)

$$\begin{bmatrix} -\Pi_{11} & * & * & * & * & * \\ -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & * \\ A\Pi_{11} + B_u\mathcal{C}_c & A + B_u\mathcal{D}_cC_y & B_w + B_u\mathcal{D}_cD_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ A_c & \Phi_{11}A + \mathcal{B}_cC_y & \Phi_{11}B_w + \mathcal{B}_cD_{yw} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\ C_z\Pi_{11} + D_{zu}\mathcal{C}_c & C_z + D_{zu}\mathcal{D}_cC_y & D_{zw} + D_{zu}\mathcal{D}_cD_{yw} & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(41) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Pi_{11} \succ 0, \quad \Phi_{11} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , матриц $A_c \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathcal{B}_c \in \mathbb{R}^{n_x \times p_y}$, $\mathcal{C}_c \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$, $\mathcal{D}_c \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ и двух $(n_x \times n_x)$ -матриц Π_{11} , Φ_{11} . Если задача (38)–(41) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрицы регулятора $A_c \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_x \times p_y}$, $C_c \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$, $D_c \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ единственным образом определяются равенствами

$$(42) \quad D_c := \mathcal{D}_c,$$

$$(43) \quad C_c := (\mathcal{C}_c - D_c C_y \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T},$$

$$(44) \quad B_c := \Phi_{12}^{-1} (\mathcal{B}_c - \Phi_{11} B_u D_c),$$

$$(45) \quad A_c := \Phi_{12}^{-1} (A_c - \Phi_{12} B_c C_y \Pi_{11} - \Phi_{11} B_u C_c \Pi_{12}^T - \Phi_{11} (A + B_u D_c C_y) \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T}$$

и вычисляются из решения задачи нахождения двух невырожденных $(n_x \times n_x)$ -матриц Π_{12} , Φ_{12} , удовлетворяющих условию

$$(46) \quad \Pi_{12} \Phi_{12}^T = I_{n_x} - \Pi_{11} \Phi_{11}.$$

Доказательство. Пусть решение системы (38)–(41) существует. Из (32)–(37) и (25) следует, что

$$\begin{bmatrix} A\Pi_{11} + B_u\mathcal{C}_c & A + B_u\mathcal{D}_cC_y \\ A_c & \Phi_{11}A + \mathcal{B}_cC_y \end{bmatrix} = \Phi_1^T \mathcal{A} \Pi_1,$$

$$\begin{bmatrix} B_w + B_u\mathcal{D}_cD_{yw} \\ \Phi_{11}B_w + \mathcal{B}_cD_{yw} \end{bmatrix} = \Phi_1^T \mathcal{B},$$

$$\begin{bmatrix} C_z\Pi_{11} + D_{zu}\mathcal{C}_c & C_z + D_{zu}\mathcal{D}_cC_y \end{bmatrix} = \mathcal{C} \Pi_1,$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} = \Pi_1^T \Phi \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi \Phi_1,$$

где Φ и Π определяются (29) и удовлетворяют (30) при $n_\xi = n_x$. Подстановка предыдущих выражений в неравенства (39), (40) дает

$$(47) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi_1 & \mathcal{D}^T \\ \Phi_1^T \mathcal{B} & -\Phi_1^T \Pi \Phi_1 & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Pi_1^T \Phi \Pi_1 & 0 & \Pi_1^T \mathcal{A}^T \Phi_1 & \Pi_1^T \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi_1 & \mathcal{D}^T \\ \Phi_1^T \mathcal{A} \Pi_1 & \Phi_1^T \mathcal{B} & -\Phi_1^T \Pi \Phi_1 & 0 \\ \mathcal{C} \Pi_1 & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование неравенств (47) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, \Phi_1^{-T}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(\Pi_1^{-T}, I_{m_w}, \Phi_1^{-T}, I_{p_z}),$$

соответственно, приводит к

$$(48) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Pi & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Pi & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (38), (48), (29), (30) следует, что замкнутая система (25) является устойчивой и ее a -анизотропийная норма не превосходит желаемого порогового значения γ , т.е. выполняется неравенство (5). Процедура восстановления матриц реализации регулятора (A_c, B_c, C_c, D_c) из переменных решения (A_c, B_c, C_c, D_c) по формулам (46), (42)–(45) является стандартной [21], [64].

Следствие 3. Поскольку неравенства (38)–(41) являются также линейными по $\hat{\gamma} := \gamma^2$, условия теоремы 2 позволяют вычислять наименьшее значение γ из численного решения задачи

выпуклой оптимизации

$$(49) \quad \hat{\gamma} \rightarrow \inf$$

на множестве $\Psi, \Phi_{11}, \Pi_{11}, \mathcal{A}_c, \mathcal{B}_c, \mathcal{C}_c, \mathcal{D}_c, \eta, \hat{\gamma}$,
удовлетворяющих ограничениям (38)–(41).

Если задача выпуклой оптимизации (49) разрешима, матрицы параметров регулятора вычисляются согласно теореме 2.

В [64] подчеркивается, что применяемая процедура синтеза не вносит дополнительного консерватизма, если критерий анализа не является консервативным.

Результат теоремы 2 делает возможным применение анизотропной нормы замкнутой системы в качестве целевой функции или спецификации качества для определенных групп вход-выходных каналов замкнутой системы в задачах многокритериального управления, решение которых основано на существовании общей функции Ляпунова [64], наряду с другими спецификациями качества и целевыми функциями, которые могут быть сформулированы в терминах ЛМН.

2.5. Статическая обратная связь по выходу

Рассмотрим важный случай, когда регулятор имеет вид статической обратной связи по измеряемому выходу

$$(50) \quad u_k = K y_k.$$

Предполагается, что для объекта управления (1) и регулятора (50) выполняется условие Кимуры [37] нулевого порядка:

$$n_x - m_u - p_y < 0.$$

Выполнение этого условия гарантирует существование стабилизирующей статической обратной связи по измеряемому выходу.

Задача 3. Для заданного объекта управления P с реализацией (1), уровня средней анизотропии $\alpha \geq 0$ внешнего возмущения W и некоторого желаемого порогового значения $\gamma > 0$, найти регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу (50), стабилизирующий замкнутую систему $T_{ZW}(z)$ с реализацией

$$(51) \quad \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{array} \right]$$

и гарантирующий, что ее α -анизотропийная норма не превосходит порогового значения γ , т.е.

$$(52) \quad \|T_{ZW}\|_a < \gamma.$$

Прямое применение достаточных условий (12)–(14) леммы 1 к реализации замкнутой системы (51) приводит к следующему прямому решению задачи 3.

Следствие 4. Для заданных $\alpha \geq 0$, $\gamma > 0$, статический регулятор по выходу (50), являющийся решением задачи 3, существует, если система неравеств

$$(53) \quad \eta - (\det(e^{-2\alpha/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(54) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(55) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(56) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \Phi \succ 0, \quad \Pi \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $(m_u \times p_y)$ -матрицы K и двух взаимнообратных $(n_x \times n_x)$ -матриц Φ , Π , удовлетворяющих условию

$$(57) \quad \Phi \Pi = I_{n_x}.$$

Задача вычисления матрицы статической обратной связи по выходу K , являющейся решением задачи 3, сводится к проверке разрешимости системы неравенств (53)–(56). Задача (53)–(57), полученная прямым применением леммы 1, не является выпуклой из-за условия (57). Можно попытаться получить решение этой общей задачи, применяя известные алгоритмы [34, 23, 8, 19, 6, 53, 1, 55, 56] для поиска взаимнообратных матриц, удовлетворяющих ЛМН.

Тем не менее, специальная линеаризующая замена переменных, предложенная в [60], может сделать результирующую задачу оптимизации выпуклой для отдельного класса объектов управления, определенного некоторым структурным свойством. А именно, предполагается, что матричная передаточная функция объекта

управления (1) от входа управления U к измеряемому выходу Y равна нулю, т.е. [60]

$$(58) \quad T_{yu}(z) := C_y(zI - A)^{-1}B_u = 0.$$

Для стабилизируемого и детектируемого объекта управления (1), если выполняется условие (58), существует преобразование подобия T , такое что

$$(59) \quad \left[\begin{array}{c|cc} TAT^{-1} & TB_w & TB_u \\ \hline C_zT^{-1} & D_{zw} & D_{zu} \\ C_yT^{-1} & D_{yw} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} & B_{w_1} & B_{u_1} \\ 0 & A_{22} & B_{w_2} & 0 \\ \hline C_{z_1} & C_{z_2} & D_{zw} & D_{zu} \\ 0 & C_{y_2} & D_{yw} & 0 \end{array} \right]$$

где подсистема (A_{11}, B_{u_1}) является управляемой, (A_{11}, C_{y_2}) — наблюдаемой, а матрица A_{22} — устойчивой [60]; см. также [57]. Из представления (59) следует, что реализация системы, замкнутой статической обратной связью по измеряемому выходу имеет вид (60)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} + B_{u_1}KC_{y_2} & B_{w_1} + B_{u_1}KD_{yw} \\ 0 & A_{22} & B_{w_2} \\ \hline C_{z_1} & C_{z_2} + D_{zu}KC_{y_2} & D_{zw} + D_{zu}KD_{yw} \end{array} \right].$$

Неизвестная матрица Φ в неравенствах (13), (14) леммы 1 разбивается на блоки в соответствии с блочным разбиением \mathcal{A} в (60) [60]:

$$(61) \quad \Phi = \left[\begin{array}{cc} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{array} \right] \succ 0.$$

Ключевая линеаризующая замена переменных определяется в [60] следующим образом:

$$(62) \quad P := \left[\begin{array}{cc} Q & S \\ S^T & R \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Phi_{11}^{-1} & -\Phi_{11}^{-1}\Phi_{12} \\ -\Phi_{12}^T\Phi_{11}^{-1} & \Phi_{22} - \Phi_{12}^T\Phi_{11}^{-1}\Phi_{12} \end{array} \right].$$

В [60] отмечено, что преобразование (62) отображает множество всех положительно определенных матриц в множество всех матриц с положительно определенными блоками на главной диагонали; это отображение биективно; обратное отображение определяется как

$$(63) \quad \left[\begin{array}{cc} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} Q^{-1} & -Q^{-1}S \\ -S^TQ^{-1} & R - S^TQ^{-1}S \end{array} \right].$$

Преобразование (62) мотивируется факторизацией [60]

$$(64) \quad P_1\Phi = P_2,$$

где

$$(65) \quad P_1 := \begin{bmatrix} Q & 0 \\ S^T & I \end{bmatrix}, \quad P_2 := \begin{bmatrix} I & -S \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Теорема 3. *Предположим, что для объекта управления P с реализацией (1) выполняется условие (58). Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$, статический регулятор по выходу (50), являющийся решением задачи 3, существует, если система неравенств*

$$(66) \quad \eta - (\det(e^{-2a/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(67) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathbf{B}(R, S, K) & \mathbf{P}(Q, R) & * \\ \mathbf{D}(K) & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(68) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{P}(Q, R) & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathbf{A}(Q, R, S, K) & \mathbf{B}(R, S, K) & \mathbf{P}(Q, R) & * \\ \mathbf{C}(Q, S, K) & \mathbf{D}(K) & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\mathbf{P}(Q, R) := \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(Q, R, S, K) := \begin{bmatrix} A_{11}Q & A_{11}S - SA_{22} + A_{12} + B_{u1}KC_{y2} \\ 0 & RA_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(R, S, K) := \begin{bmatrix} B_{w1} + B_{u1}KD_{yw} - SB_{w2} \\ RB_{w2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(Q, S, K) := [C_{z1}Q \quad C_{z1}S + C_{z2} + D_{zu}KC_{y2}],$$

$$\mathbf{D}(K) := D_{zw} + D_{zu}KD_{yw},$$

$$(69) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad Q \succ 0, \quad R \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , матрицы регулятора K и матриц Q , R и S .

Доказательство. Пусть решение системы неравенств (66)–(69) существует. Тогда из (65), (60), (63) следует, что

$$(70) \quad \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = P_1 \Phi P_1^T,$$

$$(71) \quad \begin{bmatrix} A_{11}Q & A_{11}S - SA_{22} + A_{12} + B_{u1}KC_{y2} \\ 0 & RA_{22} \end{bmatrix} = P_1 \Phi A P_1^T,$$

$$(72) \quad \begin{bmatrix} B_{w_1} + B_{u_1} K D_{yw} - S B_{w_2} \\ R B_{w_2} \end{bmatrix} = P_1 \Phi \mathcal{B},$$

$$(73) \quad \begin{bmatrix} C_{z_1} Q & C_{z_1} S + C_{z_2} + D_{zu} K C_{y_2} \end{bmatrix} = \mathcal{C} P_1^T.$$

Подставляя выражения (70)–(73) в ЛМН (67), (68), имеем

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi P_1^T & \mathcal{D}^T \\ P_1 \Phi \mathcal{B} & -P_1 \Phi P_1^T & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(74) \quad \begin{bmatrix} -P_1 \Phi P_1^T & 0 & P_1 \mathcal{A}^T \Phi P_1^T & P_1 \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi P_1^T & \mathcal{D}^T \\ P_1 \Phi \mathcal{A} P_1^T & P_1 \Phi \mathcal{B} & -P_1 \Phi P_1^T & 0 \\ \mathcal{C} P_1^T & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование неравенств (74) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, P_1^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(P_1^{-1}, I_{m_w}, P_1^{-1}, I_{p_z}),$$

соответственно, где P_1 определяется (65), приводит к

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi & \mathcal{D}^T \\ \Phi \mathcal{B} & -\Phi & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(75) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T \Phi & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi & \mathcal{D}^T \\ \Phi \mathcal{A} & \Phi \mathcal{B} & -\Phi & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Умножая неравенства (75) слева и справа на матрицы

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, \Phi^{-1}, I_{p_z}) \succ 0, \quad \text{blockdiag}(I_{n_x}, I_{m_w}, \Phi^{-1}, I_{p_z}) \succ 0,$$

соответственно, получим

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(76) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (66), (76), (69), (61) следует, что матрица статического регулятора по выходу K является решением задачи 3 для объекта управления (59) и замкнутой системы (60), что и требовалось доказать.

Следствие 5. *Выпуклые ограничения (66)–(69) линейны по γ^2 . С учетом обозначения $\hat{\gamma} := \gamma^2$, условия теоремы 3 позволяют вычислять наименьшее значение γ из решения задачи выпуклой оптимизации*

$$(77) \quad \hat{\gamma} \rightarrow \inf$$

на множестве $\Psi, Q, R, S, K, \eta, \hat{\gamma}$,
удовлетворяющих ограничениям (66)–(69).

Матрица коэффициента усиления K статического регулятора по выходу непосредственно входит в ЛМН (67), (68). Как отмечено в [60], это позволяет накладывать на матрицу регулятора некоторые структурные требования для синтеза, например, децентрализованного управления (с блочно-диагональной матрицей K) из решения задачи выпуклой оптимизации.

Результат теоремы 3 делает возможным применение анизотропной нормы замкнутой системы в качестве целевой функции или спецификации качества для определенных групп вход-выходных каналов замкнутой системы в задачах многокритериального управления со спецификациями в терминах ЛМН, рассматриваемых в [64].

Следует также отметить, что в общем случае, когда структурное свойство (58) не выполняется, можно следовать [60] и использовать параметризацию Юлы-Кучеры стабилизирующего регулятора [38, 73] для аффинной параметризации замкнутой системы, навязывая указанное структурное свойство и приводя реализацию замкнутой системы к виду (59). Тогда задачу синтеза анизотропного регулятора можно переформулировать как задачу нахождения параметра Юлы, входящего в замкнутую систему аффинно, посредством применения результата теоремы 3 и следствия 5.

Кроме класса систем, для которых выполняется структурное свойство (58), существуют два важных частных случая структуры

объекта управления, которые позволяют сформулировать задачу синтеза статического регулятора по выходу в виде некоторой задачи выпуклой оптимизации посредством применения невырожденных преобразований координат и введения некоторых вспомогательных переменных аналогично тому, как это было сделано в [42] для задач синтеза \mathcal{H}_∞ регуляторов. Эти случаи называются сингулярными задачами управления и фильтрации.

Рассмотрим сперва сингулярную задачу управления, когда матрица D_{zu} реализации объекта управления (1) равна нулю, а матрица B_u имеет полный ранг по столбцам. Тогда существует невырожденная матрица преобразования координат состояния T_u такая что [42]

$$(78) \quad \bar{B}_u := T_u B_u = \begin{bmatrix} I_{m_u} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В новых координатах матрицы реализации объекта управления имеют вид

$$(79) \quad \bar{A} := T_u A T_u^{-1}, \quad \bar{B}_w := T_u B_w, \quad \bar{C}_z := C_z T_u^{-1}, \quad \bar{C}_y := C_y T_u^{-1}.$$

Теорема 4. Пусть для объекта управления P с реализацией (1) выполняется $D_{zu} = 0$ и $\text{rang } B_u = m_u$. Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$, анизотропийный субоптимальный регулятор в виде статической обратной связи по выходу (50), являющийся решением задачи 3 для реализации замкнутой системы

$$(80) \quad \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} + \bar{B}_u K C_y & \bar{B}_w + \bar{B}_u K D_{yw} \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array} \right],$$

существует, если система неравенств

$$(81) \quad \eta - (\det(e^{-2a/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(82) \quad \left[\begin{array}{cc|cc} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\ \bar{S} \bar{B}_w + L D_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * & * \\ \hline D_{zw} & 0 & -I_{p_z} & \end{array} \right] \prec 0,$$

$$(83) \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\bar{\Phi} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & * & * & * & * \\ \bar{S} \bar{A} + L \bar{C}_y & \bar{S} \bar{B}_w + L D_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * & * & * & * & * \\ \hline \bar{C}_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} & & & & \end{array} \right] \prec 0,$$

$$(84) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \bar{\Phi} \succ 0,$$

где \bar{A} , \bar{B}_w , \bar{C}_z , \bar{C}_y определяются (79), разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $(n_x \times n_x)$ -матрицы $\bar{\Phi}$ и двух структурированных матричных переменных

$$(85) \quad \bar{S} := \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если система неравенств (81)–(84) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора по выходу $K = \bar{S}_1^{-1} L_1$.

Доказательство этой теоремы близко к доказательству в [42] для задачи синтеза \mathcal{H}_∞ регулятора.

Доказательство. Пусть решение системы неравенств (81)–(84) существует. Конгруэнтное преобразование неравенств (82), (83) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, T_u^\top, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(T_u^\top, I_{m_w}, T_u^\top, I_{p_z}),$$

соответственно, приводит к

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ T_u^\top \bar{S} T_u B_w + T_u^\top L D_{yw} & T_u^\top (\bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^\top) T_u & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -T_u^\top \bar{\Phi} T_u & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ T_u^\top \bar{S} T_u A + T_u^\top L C_y & T_u^\top \bar{S} T_u B_w + T_u^\top L D_{yw} & T_u^\top (\bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^\top) T_u & * \\ C_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0$$

где матрицы реализации объекта управления получены применением обратного преобразования (79). Обозначим $S := T_u^\top \bar{S} T_u$, $\Phi := T_u^\top \bar{\Phi} T_u$. Тогда из (85) и определения $K = \bar{S}_1^{-1} L_1$ следует, что

$$(86) \quad T_u^\top L = T_u^\top \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T_u^\top \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_u} \\ 0 \end{bmatrix} K = \\ = T_u^\top \bar{S} \bar{B}_u K = S B_u K,$$

и предыдущие ЛМН можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ S(B_w + B_u K D_{yw}) & \Phi - S - S^\top & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ S(A + B_u K C_y) & S(B_w + B_u K D_{yw}) & \Phi - S - S^T & * \\ C_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

или, в терминах реализации замкнутой системы (80), в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ S\mathcal{B} & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ S\mathcal{A} & S\mathcal{B} & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование предыдущих неравенств с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, S^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(I_{n_x}, I_{m_w}, S^{-1}, I_{p_z}),$$

соответственно, приводит к

$$(87) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{B} & S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T} & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(88) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T} & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Из неравенства

$$(S^{-1} - \Phi^{-1})(-\Phi)(S^{-1} - \Phi^{-1})^T \prec 0$$

следует, что

$$-\Phi^{-1} \prec S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T}.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (81), (87), (88), (84) следует, что матрица статического регулятора K является решением задачи 3 для замкнутой системы с реализацией (80), что и требовалось доказать.

Замечание 2. В отличие от доказательств теорем 1–3, для теоремы 4 невозможно доказать эквивалентность неравенств синтеза (81)–(84) и условий (12)–(14) леммы 1. ЛМН синтеза (82), (83) устанавливают только достаточные условия разрешимости неравенств (13), (14) леммы 1. Это также касается и последующей теоремы синтеза.

Следствие 6. С учетом обозначения $\hat{\gamma} := \gamma^2$, условия теоремы 4 позволяют вычислять наименьшее значение γ из решения задачи выпуклой оптимизации

$$(89) \quad \hat{\gamma} \rightarrow \inf \quad \text{на множестве } \Psi, \bar{\Phi}, \bar{S}, L, \eta, \hat{\gamma},$$

удовлетворяющих ограничениям (81)–(84).

Если задача (89) разрешима, матрица статического регулятора вычисляется согласно теореме 4.

Рассмотрим теперь сингулярную задачу фильтрации, когда матрица D_{yw} реализации объекта управления (1) равна нулю, а матрица C_y имеет полный строчный ранг. Тогда существует невырожденная матрица преобразования координат T_y , такая что [42]

$$(90) \quad \bar{C}_y := C_y T_y^{-1} = \begin{bmatrix} I_{p_y} & 0 \end{bmatrix}.$$

В новых координатах матрицы реализации объекта управления имеют вид

$$(91) \quad \bar{A} := T_y A T_y^{-1}, \quad \bar{B}_w := T_y B_w, \quad \bar{B}_u := T_y B_u, \quad \bar{C}_z := C_z T_y^{-1}.$$

Теорема 5. Предположим, что для объекта управления P с реализацией (1) выполняется $D_{yw} = 0$ и $\text{rank } C_y = p_y$. Для заданных $a \geq 0$, $\gamma > 0$, статический регулятор по выходу (50), являющийся решением задачи 3 для реализации замкнутой системы

$$(92) \quad \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline c & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w \\ \hline C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} \end{array} \right],$$

существует, если система неравенств

$$(93) \quad \eta - (\det(e^{-2a/m_w} \Psi))^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(94) \quad \left[\begin{array}{ccc} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{B}_w & -\bar{\Pi} & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] \prec 0,$$

$$(95) \quad \begin{bmatrix} \bar{\Pi} - \bar{R} - \bar{R}^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{A}\bar{R} + \bar{B}_u M & \bar{B}_w & -\bar{\Pi} & * \\ \bar{C}_z \bar{R} + D_{zu} M & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(96) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \bar{\Pi} \succ 0,$$

где \bar{A} , \bar{B}_w , \bar{C}_z , \bar{C}_y определяются (91), разрешима в отношении скалярной переменной η , вещественных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $(n_x \times n_x)$ -матрицы $\bar{\Pi}$ и двух структурированных матричных переменных

$$(97) \quad \bar{R} := \begin{bmatrix} \bar{R}_1 & 0 \\ 0 & \bar{R}_2 \end{bmatrix}, \quad M := [M_1 \quad 0].$$

Если система неравенств (93)–(96) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора по выходу $K = M_1 \bar{R}_1^{-1}$.

Доказательство этой теоремы дуально доказательству теоремы 4 и аналогично доказательству в [42] для задачи синтеза \mathcal{H}_∞ регулятора.

Доказательство. Пусть существует решение системы неравенств (93)–(96). Поставим матрицы реализации, определяемые (91), в ЛМН (94), (95). Выполним конгруэнтное преобразование ЛМН (94), (95) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, T_y^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(T_y^{-1}, I_{m_w}, T_y^{-1}, I_{p_z}),$$

соответственно. Затем определим $R := T_y^{-1} \bar{R} T_y^{-T}$ и $\Pi := T_y^{-1} \bar{\Pi} T_y^{-T}$. Из (97) и определения $K = M_1 \bar{R}_1^{-1}$ следует, что $M T_y^{-T} = K C_y R$ и ЛМН (94), (95) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w & -\Pi & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Pi - R - R^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ (A + B_u K C_y) R & B_w & -\Pi & * \\ (C_z + D_{zu} K C_y) R & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

или, в терминах реализации замкнутой системы (92), в виде

$$(98) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(98) \quad \begin{bmatrix} \Pi - R - R^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A}R & \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{C}R & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование последнего неравенства с матрицей

$$\text{blockdiag}(R^{-T}, I_{m_w}, I_{n_x}, I_{p_z})$$

приводит к

$$(99) \quad \begin{bmatrix} R^{-T}\Pi R^{-1} - R^{-1} - R^{-T} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Из неравенства

$$(R^{-1} - \Pi^{-1})^T(-\Pi)(R^{-1} - \Pi^{-1}) \prec 0$$

следует

$$-\Pi^{-1} \prec R^{-T}\Pi R^{-1} - R^{-1} - R^{-T}.$$

Обозначим $\Phi := \Pi^{-1}$. В силу леммы 1, из (93), (98), (99), (96) следует, что матрица статического регулятора по выходу K является решением задачи 3 для реализации замкнутой системы (92), что и требовалось доказать.

Следствие 7. С учетом обозначения $\hat{\gamma} := \gamma^2$, условия теоремы 5 позволяют вычислять наименьшее значение γ из решения задачи выпуклой оптимизации

$$(100) \quad \begin{aligned} & \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ & \text{на множестве } \Psi, \bar{\Pi}, \bar{R}, M, \eta, \hat{\gamma}, \\ & \text{удовлетворяющих ограничениям (93)–(96)}. \end{aligned}$$

Если задача (100) разрешима, матрица регулятора вычисляется согласно теореме 5.

Как отмечено в [42], поскольку сингулярные задачи управления и фильтрации дуальны, системы неравенств (81)–(84) и (93)–(96) теорем 4 и 5 в некотором смысле также являются дуальными, также как и задачи выпуклой оптимизации (89) и (100) следствий 6 и 7. Заменяя матрицы реализаций и переменные в новых координатах в формулах теоремы 4 и следствия 6 как

$$\begin{aligned} \{\bar{A}, \bar{B}_w, \bar{B}_u, \bar{C}_z, D_{zw}, \bar{C}_y, D_{yw}\} \\ \longrightarrow \{\bar{A}^T, \bar{C}_z^T, \bar{C}_y^T, \bar{B}_w^T, D_{zw}^T, \bar{B}_u^T, D_{zu}^T\}, \\ \{\eta, \Psi, \bar{\Phi}, \bar{S}, L\} \longrightarrow \{\eta, \Psi, \bar{\Pi}, \bar{R}^T, M^T\}, \end{aligned}$$

получим соответствующие формулы теоремы 5 и следствия 7, где матрица статического регулятора по выходу $K \longrightarrow K^T$.

В [42] показано, что результаты теоремы 4 и следствия 6 можно применять для синтеза децентрализованных анизотропийных субоптимальных и γ -регуляторов в виде статической обратной связи по выходу и заданного порядка. В свою очередь, теорема 5 и следствие 7 позволяют получить решение задач анизотропийного управления множественными объектами по измеряемому выходу.

2.6. Синтез регулятора заданного порядка с помощью выпуклой оптимизации

Известно (см. например [31]), что задачу синтеза динамического регулятора заданного порядка можно представить в виде задачи синтеза статического регулятора по выходу, дополнив вектор состояния объекта управления состояниями регулятора:

$$(101) \quad \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{cc|cc|cc} A & 0 & B_w & 0 & 0 & B_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_\xi} & 0 \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} & 0 & 0 & D_{zu} \\ \hline 0 & I_{n_\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Реализация замкнутой системы с расширенным объектом управления (101) имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_w \\ C_z & D_{zw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ D_{zu} \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{zw} \\ C_z + D_{zw} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где матрица K включает матрицы параметров регулятора:

$$(102) \quad K := \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}.$$

Поэтому, если в модели объекта управления (1) одна из матриц D_{zu} или D_{yw} равна нулю, и матрицы B_u или C_y имеют полный столбцовый/строчный ранг, соответственно, можно применить теорему 4 и следствие 6 или теорему 5 и следствие 7, чтобы найти анизотропийный γ -оптимальный (субоптимальный) регулятор заданного порядка как решение задачи синтеза статического регулятора по выходу (102) для расширенной реализации объекта управления (101).

3. Вычислительные примеры

В этом разделе мы рассмотрим несколько иллюстративных примеров синтеза анизотропийных γ -оптимальных регуляторов методом выпуклой оптимизации. Будут рассматриваться только два частных случая структуры регулятора и объекта, а именно, регулятор полного порядка и статическая обратная связь по выходу для сингулярной задачи фильтрации, определенные в теоремах 2 и 5, соответственно. Тестирование и сравнение различных алгоритмов для поиска взаимнообратных матриц (например, [23, 1, 55]) для решения общих задач 1, 3 синтеза анизотропийных субоптимальных регуляторов, решения которых определяются следствиями 2, 4, является предметом дальнейших исследований и его результаты будут опубликованы где-либо еще. Отметим, что алгоритмы [23, 1] тестировались на некотором разумном количестве случайных реализаций в пространстве состояний,

которые генерировались функцией `drss` пакета Control Systems Toolbox системы MATLAB, а также на ряде моделей из коллекции *COMPl_eib* [43, 44]. Вычислительные эксперименты показывают, что применение обоих алгоритмов часто приводит к сходимости к локальному минимуму в зависимости от выбора начальных условий.

Все вычисления выполнялись в системе MATLAB 7.9.0 (R2009b) средствами пакетов Control System Toolbox и Robust Control Toolbox в сочетании с интерфейсом YALMIP [45] и решателем SeDuMi [65] на процессоре P8700 2×2.53 ГГц.

3.1. Синтез регулятора полного порядка по выходу

3.1.1. Посадка самолета ТУ-154

Рассмотрим сперва задачу управления продольным движением самолета при заходе на посадку под воздействием детерминированных и стохастических возмущений в условиях сдвига ветра и шума измерений. Управление направлено на подавление влияния внешних возмущений и стабилизацию продольного движения самолета вдоль некоторой заданной глиссады. Линеаризованная дискретная стационарная модель посадки самолета Ту-154 представлена в [41], где задача была решена с помощью анизотропийного оптимального регулятора, синтезированного в соответствии с [69]. В настоящей работе мы рассмотрим результаты решения задачи синтеза анизотропийного γ -оптимального регулятора полного порядка методом выпуклой оптимизации в соответствии с результатами теоремы 2 и следствия 2.

Математическая модель продольного движения самолета в отклонениях от номинальной траектории была представлена в [41] в точке траектории, характеризующейся воздушной скоростью $V_0 = 71.375$ м/с, углом наклона траектории полета $\theta_0 = -2.7$ град, угловой скоростью тангажа $\omega_{z0} = 0$ град/с, углом тангажа $\vartheta_0 = 0$ град, высотой $h_0 = 600$ м и тягой $T_0 = 52540$ Н. Модель имеет порядок $n_x = 6$, два входа управления (сигналы $\Delta\vartheta_{cy}$ и $\Delta\delta_t$, генерируемые регулятором для отклонения обобщенных элеронов и положения сектора газа) и два измеряемых

выхода (отклонения воздушной скорости $\Delta V + w_{V,k}$ и высоты $\Delta h + w_{h,k}$). Шаг дискретного времени модели $\Delta t = 0.01$ с.

Анизотропийный γ -оптимальный регулятор K_a был получен из решения задач выпуклой оптимизации (49) по теореме 2. Реализация в пространстве состояний анизотропийного γ -оптимального регулятора K_a была вычислена для уровня средней анизотропии возмущения $a = 0.7$; реализации \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторов K_2 и K_∞ были вычислены функциями пакета Robust Control Toolbox системы MATLAB h2syn (решение уравнений Риккати) и hinfsyn (ЛМН). Результаты моделирования замкнутых систем в условиях сдвига ветра и шумов измерений представлены вместе с результатами решения задачи в табл. 1 и проиллюстрированы на рис. 2–5. При моделировании применялся типичный профиль ветра, описываемый моделью в форме вихревого кольца [33].

Таблица 1. Посадка самолета Ту-154. Сравнение замкнутых систем

	Регулятор в цепи обратной связи		
	K_2	K_a	K_∞
Результаты решения:			
$\min \gamma$	0.516	5.4203	10.894
$\ T_{ZW}\ _2$	0.516	1.1473	3.1448
$\ T_{ZW}\ _{0.7}$	7.8391	5.1768	5.5944
$\ T_{ZW}\ _\infty$	15.855	10.93	10.891
Время ЦП, с	0.78001	5.928	1.7004
Результаты моделирования:			
$\max \Delta V $, м/с	11.3	3.559	4.329
$\max \Delta h $, м	54.79	46.87	39.79
$\max \Delta \theta $, град	14.86	16.04	31.6
$\max \Delta \omega_z $, град/с	4.884	5.043	10.56
$\max \Delta \dot{\theta} $, град	19.06	19	38.08
$\max \Delta T $, кН	7.263	22.58	42.48
$\max \Delta \vartheta_{cy} $, град	20.7	20.8	21.91
$\max \Delta \delta_t $, град	8.224	29.25	29.23

Из результатов решения задачи в табл. 1 можно заключить, что

- квадратный корень из наименьшего значения целевой функции удовлетворяет цепочке неравенств $\gamma_2 < \gamma_a < \gamma_\infty$;

- a -анизотропийная норма замкнутой системы с анизотропийным γ -оптимальным регулятором удовлетворяет условию $\|T_{ZW}\|_{0.7} < \gamma_a$; регулятор является действительно субоптимальным.

Анализ результатов моделирования, представленных в табл. 1 и на рис. 2–5 показывает, что

- анизотропийный γ -оптимальный регулятор приводит к наименьшему максимальному абсолютному отклонению воздушной скорости и допустимому максимальному абсолютному отклонению высоты;
- наихудшие максимальные абсолютные отклонения управляемых переменных продемонстрированы замкнутой системой с \mathcal{H}_2 оптимальным регулятором;
- в замкнутой системе с анизотропийным регулятором максимальное дополнительное значение тяги двигателя, требуемое для маневра, *почти в два раза меньше*, чем дополнительная тяга, требуемая системой с \mathcal{H}_∞ регулятором;
- аналогичные замечания можно сделать в отношении максимальных значений отклонений угла наклона траектории, угловой скорости тангажа и угла тангажа;
- наименьшее максимальное значение дополнительной тяги двигателя требуется замкнутой системе с \mathcal{H}_2 оптимальным регулятором;
- наибольшие значения сигналов управления анизотропийного и \mathcal{H}_∞ регуляторов близки, но сигнал управления, генерируемый анизотропийным регулятором выглядит более реалистичным.

Очевидно, что анизотропийный γ -оптимальный регулятор в рассматриваемой задаче подавления возмущений является более эффективным, чем \mathcal{H}_2 регулятор, и менее консервативным, чем \mathcal{H}_∞ регулятор.

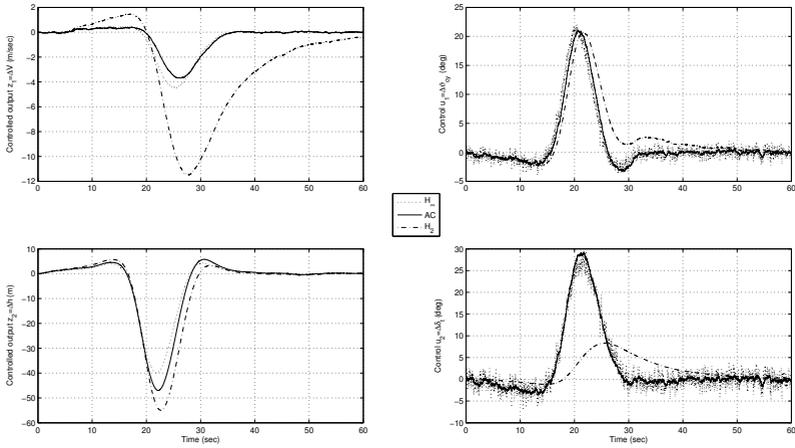


Рис. 2. Посадка самолета Ту-154. Воздушная скорость ΔV , высота Δh (диаграммы слева) и сигналы управления $\Delta \vartheta_{cy}$, $\Delta \delta_t$ (диаграммы справа)

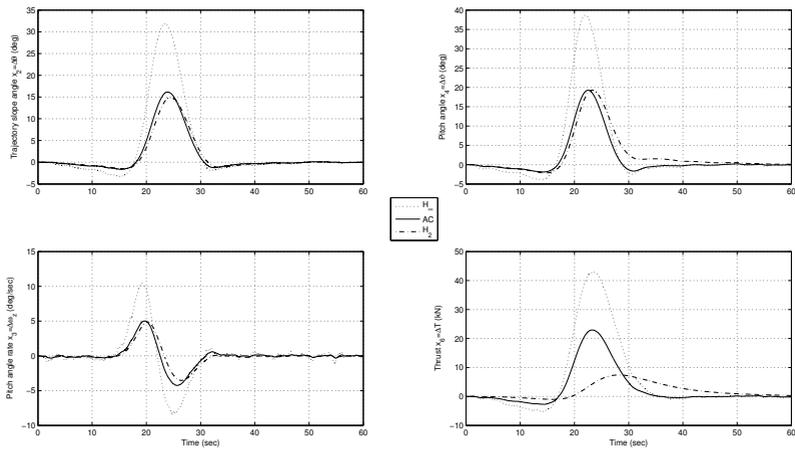


Рис. 3. Посадка самолета Ту-154. Угол наклона траектории $\Delta \theta$, угловая скорость тангажа $\Delta \omega_z$ (диаграммы слева), угол тангажа $\Delta \vartheta$, тяга двигателя ΔT (диаграммы справа)

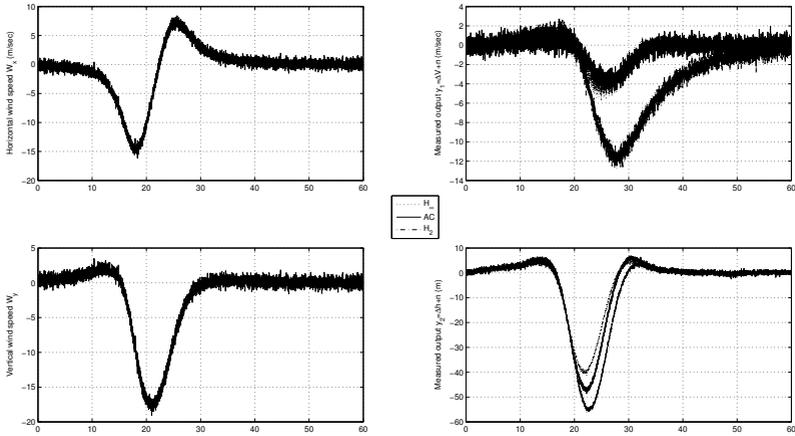


Рис. 4. Посадка самолета Ту-154. Профиль ветра (диаграммы слева) и измерения с шумами (диаграммы справа)

3.1.2. Примеры из библиотеки COMPl_eib

Анизотропийные γ -оптимальные регуляторы полного порядка были вычислены для ряда моделей из коллекции COMPl_eib [43, 44], перечисленных в табл. 2. Все эти модели были преобразованы в системы с дискретным временем с шагом Δt . Известно [44], что почти все из перечисленных моделей (за исключением модели ROC5) можно стабилизировать с помощью статической обратной связи по измеряемому выходу, но в рассматриваемом случае соответствующие задачи решались с помощью динамических регуляторов полного порядка по выходу исключительно с целью тестирования. В [67] показано, что выполнение условий частотной теоремы для анизотропийной нормы системы при $a \rightarrow 0, +\infty$ гарантирует, что \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы той же системы не превышают заданных пороговых значений. Поэтому \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторы для соответствующих задач также были получены как предельные случаи анизотропийного регулятора из решения задачи выпуклой оптимизации (49) согласно теореме 2, но для соответствующих уровней средней анизотропии внешнего возмущения $a = 0$ и

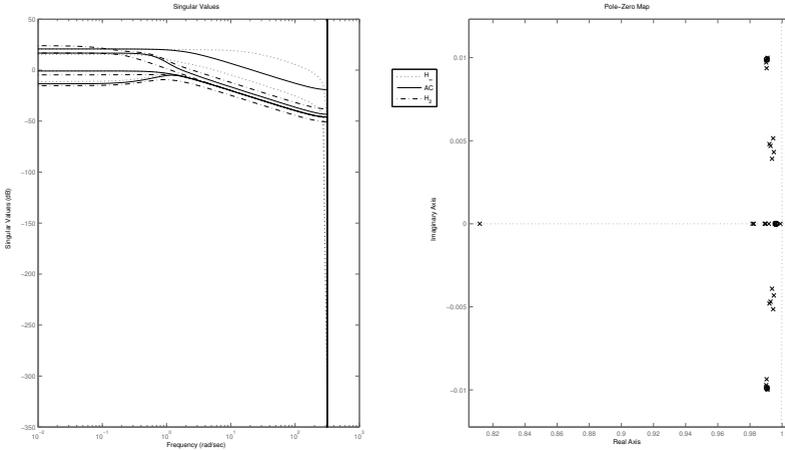


Рис. 5. Посадка самолета Ту-154. Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

$a = +\infty$.

Ниже приводятся результаты решения и моделирования для задачи управления углом атаки ракеты “воздух-воздух” (АС4), первоначально представленной в [19], где эта задача рассматривается в робастной постановке и требуется, чтобы автопилот управлял отклонением аэродинамического руля δ для обеспечения угла атаки α , соответствующего маневру, определяемому законом наведения [19]. Более точно, управление направлено на отслеживание ступенчатых входных команд, задающих требуемый угол атаки α_c , с установившейся ошибкой не более 1%, временем нарастания не более 0.2 с и ограниченным перерегулированием 2% в широком диапазоне углов атаки ± 20 град и изменений числа Маха от 2.5 до 3.5 [19]. Модель АС4 из коллекции *COMPlib* [43] не учитывает изменений числа Маха и поэтому не содержит неопределенных параметров.

Результаты моделирования замкнутых систем с \mathcal{H}_2 , анизотропным и \mathcal{H}_∞ регуляторами K_2 , K_a и K_∞ в условиях шумов измерений проиллюстрированы на рис. 6–10. При моделировании

Таблица 2. Примеры из коллекции $COMPl_{elib}$ [43, 44]. Регулятор полного порядка

Модель	(n_x, m_u, p_y)	Δt (сек)	$\min \gamma_2$	a	$\min \gamma_a$	$\min \gamma_\infty$
AC4	(4, 1, 2)	0.0005	0.1782	0.015	0.20071	0.56227
AC7	(9, 1, 2)	0.01	0.0042953	0.05	0.0094512	0.043755
AC8	(9, 1, 5)	0.01	0.049999	0.05	0.20454	1.5429
AC9	(10, 4, 5)	0.01	0.04454	0.9	0.43057	1.0007
AC12	(4, 3, 4)	0.01	0.0012071	0.01	0.0037555	0.31439
HE3	(8, 4, 6)	0.01	0.081028	0.015	0.18837	0.802
HE5	(8, 4, 2)	0.01	0.11888	0.2	0.67939	1.5066
HE6	(20, 4, 6)	0.01	0.65791	0.05	0.78951	2.3755
HE7	(20, 4, 6)	0.01	0.55239	0.05	0.68603	2.4341
JE1	(30, 3, 5)	0.01	0.76355	0.1	1.1173	—
JE3	(24, 3, 6)	0.01	1.107	0.07	1.2814	2.4149
EB1	(10, 1, 1)	0.001	0.044894	3	3.0259	3.1041
EB2	(10, 1, 1)	0.001	0.027729	3	1.7246	1.7677
EB3	(10, 1, 1)	0.001	0.029817	0.3	0.92218	1.7974
EB4	(20, 1, 1)	0.001	0.030079	0.3	0.9219	1.7863
EB5	(40, 1, 1)	0.001	0.029731	0.3	0.92087	1.7906
ROC5	(7, 3, 5)	0.001	0.0029492	0.7	0.0013201	0.0016873
TF1	(7, 2, 4)	0.1	0.043013	0.25	0.18306	0.24883
TF3	(7, 2, 3)	0.1	0.043081	0.25	0.18288	0.24799

опорные значения α_c генерировались как ступенчатые сигналы со случайной амплитудой и равной продолжительностью. Переходные характеристики на рис. 9 показывают, что время нарастания в замкнутых системах, отмеченное на этих графиках, не превосходит желаемого значения 0,2с для всех трех регуляторов. При этом диаграммы на рис. 6 демонстрируют приемлемое качество слежения и меньшую амплитуду сигнала управления δ в замкнутой системе с анизотропийным регулятором по сравнению с \mathcal{H}_∞ регулятором.

3.2. Синтез статической обратной связи по выходу

Анизотропийные γ -оптимальные регуляторы в виде статической обратной связи по выходу были синтезированы для ряда сингулярных задач фильтрации из коллекции $COMPl_{elib}$ [43, 44],

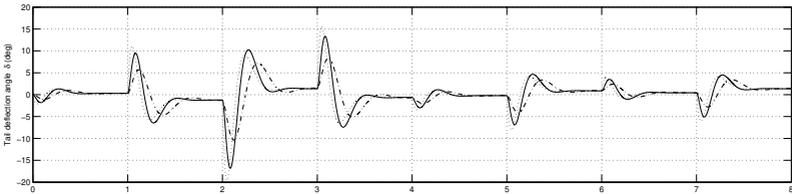
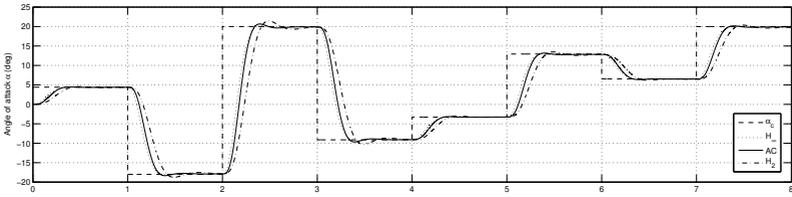


Рис. 6. Модель AC4 (ракета “воздух-воздух”) [19, 43, 44]. Угол атаки α (верхняя диаграмма) и угол отклонения аэродинамического руля δ (нижняя диаграмма)

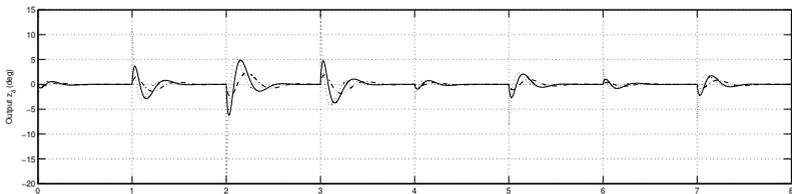
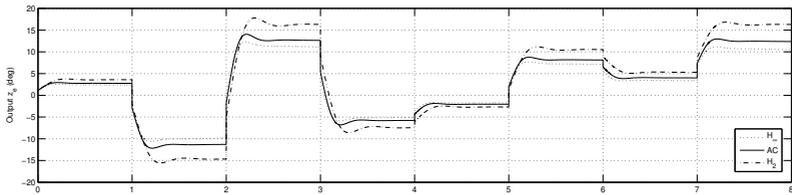


Рис. 7. Модель AC4 (ракета “воздух-воздух”) [19, 43, 44]. Управляемый выход z

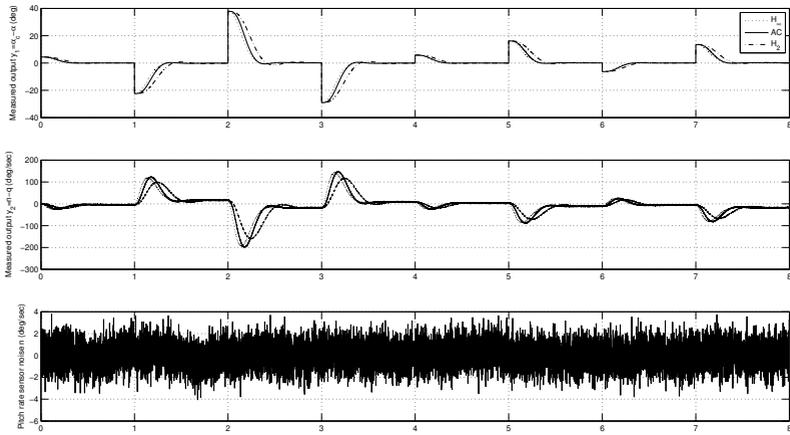


Рис. 8. Модель AC4 (ракета “воздух-воздух”) [19, 43, 44].
Измерение y (верхние диаграммы) шум датчика угловой скорости тангажа n (нижняя диаграмма)

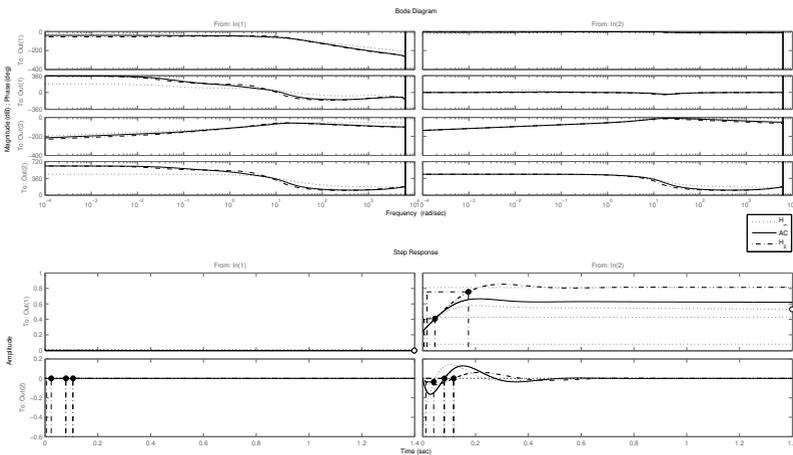


Рис. 9. Модель AC4 (ракета “воздух-воздух”) [19, 43, 44].
Диаграмма Бode (верхние диаграммы) и переходные характеристики (нижние диаграммы)

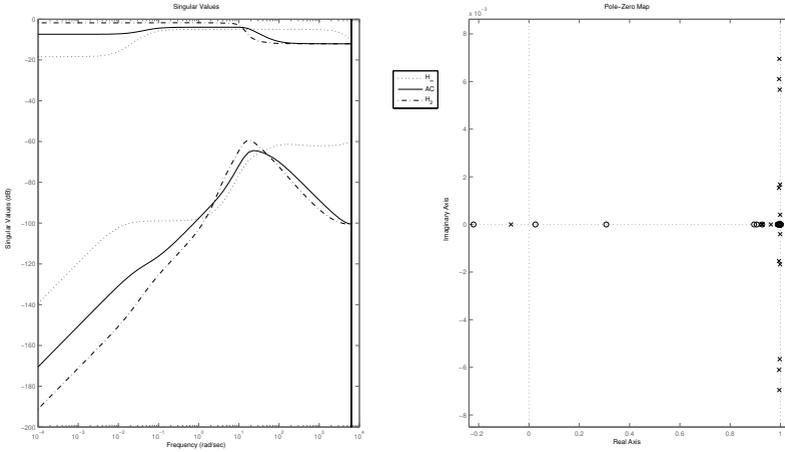


Рис. 10. Модель AC4 (ракета “воздух-воздух”) [19, 43, 44]. Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

перечисленных ниже в табл. 3. Все эти модели были преобразованы в системы с дискретным временем с шагом Δt . \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторы для соответствующих задач были получены, как предельные случаи анизотропийного регулятора из решения задачи выпуклой оптимизации (100) согласно теореме 5 и следствию 7, но для соответствующих уровней средней анизотропии возмущения $a = 0$ и $a = +\infty$.

С целью наглядной иллюстрации далее приводятся результаты решения и моделирования для задачи управления самолетом (модель AC1), первоначально рассмотренной в [29]. Модель AC1, представленная в коллекции *COMPl_εib* [43], была модифицирована для решения задачи подавления внешних возмущений, при этом шумы измерений в модели отсутствуют.

Результаты моделирования замкнутой системы в условиях внешних возмущений вместе с результатами решения задачи приводятся в табл. 4 и на рис. 11–14. При моделировании использовался тот же профиль ветра, что и в примере раздела 3.1.1.

Из результатов решения задачи в табл. 4 можно заключить,

Таблица 3. Примеры из коллекции COMPl_{eib} [43, 44]. Регулятор в виде статической обратной связи по выходу

Модель	(n_x, m_u, p_y)	Δt (сек)	$\min \gamma_2$	a	$\min \gamma_a$	$\min \gamma_\infty$
AC1	(5, 3, 3)	0.01	0.00045695	0.9	0.0034448	0.0036873
AC2	(5, 3, 3)	0.01	0.021254	0.9	1.3559	1.6199
AC15	(4, 2, 3)	0.0001	0.037899	0.8	0.67708	0.79834
HE1	(4, 2, 1)	0.0001	0.00075643	0.15	0.0063848	0.0099472
HE4	(8, 4, 6)	0.01	2.8727	0.05	8.0104	21.823
NN15	(3, 2, 2)	0.001	0.015202	0.3	0.25514	0.3441
NN16	(8, 4, 4)	0.001	0.0098319	0.5	0.20576	0.41639
BDT1	(11, 3, 3)	1	0.010557	0.007	0.042299	0.32302
PSM	(7, 2, 3)	0.001	0.035481	0.01	0.10554	0.92672
UWV	(8, 2, 2)	0.001	0.016479	0.03	0.011414	0.024207

Таблица 4. Модель AC1 (самолет) из коллекции COMPl_{eib} [43, 44]. Сравнение замкнутых систем

		Регулятор в цепи обратной связи		
		K_2	K_a	K_∞
Результаты решения:				
$\min \gamma$		0.00045695	0.0034448	0.0036873
$\ T_{ZW}\ _2$		$2.6532 \cdot 10^{-5}$	$1.2762 \cdot 10^{-6}$	$6.3218 \cdot 10^{-7}$
$\ T_{ZW}\ _{0.9}$		0.00050863	$2.3466 \cdot 10^{-5}$	$1.1795 \cdot 10^{-5}$
$\ T_{ZW}\ _\infty$		0.00075676	$3.5153 \cdot 10^{-5}$	$1.7708 \cdot 10^{-5}$
Время ЦП,	с	0.81121	3.042	0.546
Результаты моделирования:				
$\max z_1 ,$	м/с	$9.539 \cdot 10^{-5}$	$4.941 \cdot 10^{-6}$	$1.368 \cdot 10^{-6}$
$\max z_2 ,$	град	0.0003134	$1.437 \cdot 10^{-5}$	$9.539 \cdot 10^{-5}$
$\max x_1 ,$	м	3.152	3.412	3.35
$\max x_2 ,$	м/с	0.1647	0.1108	0.124
$\max x_3 ,$	град	0.02948	0.0192	0.02172
$\max x_4 ,$	град/с	0.008596	0.006704	0.006841
$\max x_5 ,$	м/с	0.406	0.278	0.3097
$\max u_1 ,$	10^{-1} град	0.1648	0.1108	0.124
$\max u_2 ,$	м/с ²	0.0299	0.01922	0.02173
$\max u_3 ,$	град	0.2117	0.1355	0.154

что

- квадратный корень из наименьшего значения целевой функции удовлетворяет цепочке неравенств $\gamma_2 < \gamma_a < \gamma_\infty$;
- a -анизотропийная норма замкнутой системы с анизотропийным γ -оптимальным регулятором удовлетворяет условию $\|T_{ZW}\|_{0.7} < \gamma_a$; регулятор является действительно субоптимальным;
- \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы замкнутых систем с \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторами удовлетворяют $\|T_{ZW}\|_2 < \gamma_2$, $\|T_{ZW}\|_\infty < \gamma_\infty$ для соответствующих пороговых значений; полученные \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторы также являются субоптимальными.

Анализ результатов моделирования, представленных в табл. 4 и на рис. 11–14 показывает, что

- анизотропийная γ -оптимальная статическая обратная связь по выходу приводит к наименьшим максимальным абсолютным отклонениям горизонтальной составляющей скорости x_2 , угла тангажа x_3 , угловой скорости тангажа x_4 и вертикальной составляющей скорости x_5 , при этом наименьшее максимальное абсолютное отклонение ошибки по высоте x_1 достигается при использовании \mathcal{H}_2 γ -оптимального статического регулятора по выходу;
- наибольшие максимальные абсолютные отклонения переменных управляемого выхода наблюдаются в замкнутой системе с \mathcal{H}_2 γ -оптимальным статическим регулятором;
- в замкнутой системе с анизотропийным γ -оптимальным статическим регулятором наименьшие максимальные абсолютные амплитуды сигналов управления.

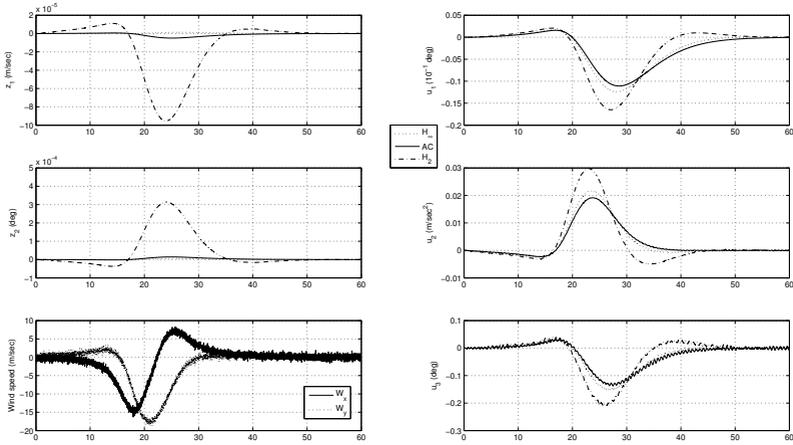


Рис. 11. Модель АС1 (самолет) [29, 43, 44]. Управляемый выход и профиль ветра (диаграммы слева), управление (диаграммы справа)

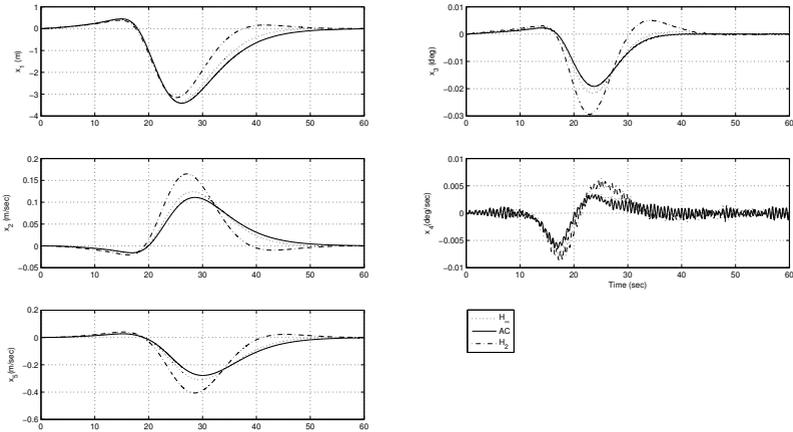


Рис. 12. Модель АС1 (самолет) [29, 43, 44]. Ошибка по высоте x_1 , горизонтальная составляющая скорости x_2 , вертикальная составляющая скорости x_5 (диаграммы слева), угол тангажа x_3 , угловая скорость тангажа x_4 (диаграммы справа)

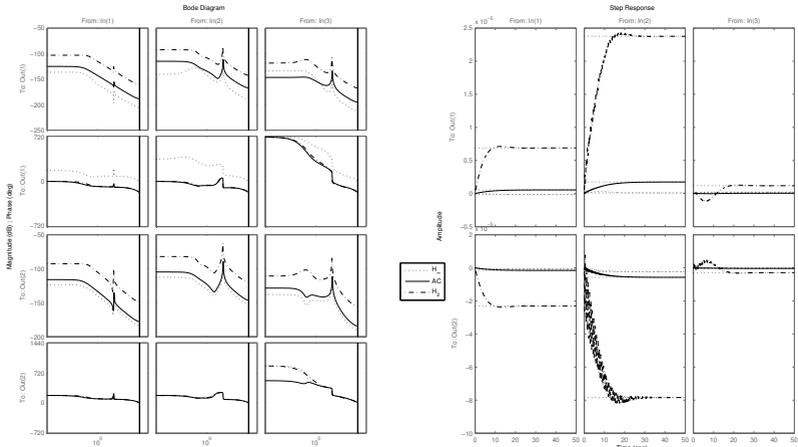


Рис. 13. Модель AC1 (самолет) [29, 43, 44]. Диаграмма Бode (диаграммы слева) и переходные характеристики (диаграммы справа)

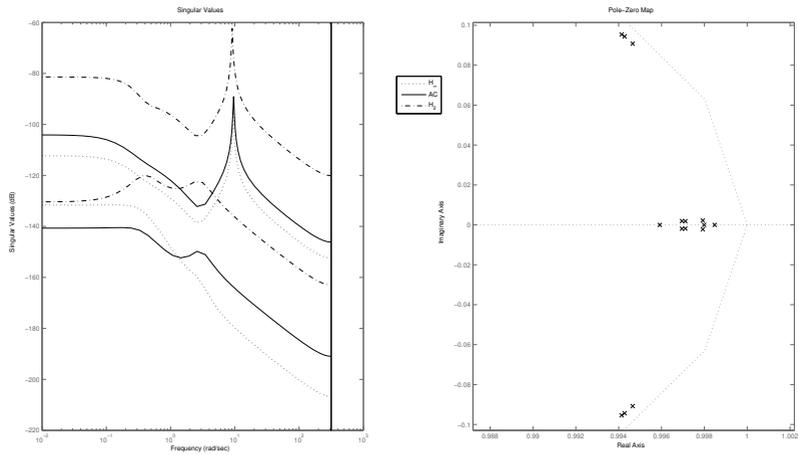


Рис. 14. Модель AC1 (самолет) [29, 43, 44]. Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

4. Заключение

В работе предлагается подход к решению задач синтеза анизотропийных субоптимальных и γ -оптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации. Синтез анизотропийных субоптимальных регуляторов является естественным продолжением оптимального подхода, разработанного в [69]. Вместо минимизации анизотропийной нормы замкнутой системы, субоптимальный регулятор гарантирует, что ее норма не превосходит заданного порогового значения. Общая процедура синтеза регулятора заданного порядка сводится к решению неравенства относительно детерминанта положительно определенной матрицы и двух ЛМН относительно взаимнообратных матриц, задача оптимизации не является выпуклой. Применением стандартных процедур овыпукления (линеаризирующих замен переменных и введения дополнительных переменных) показано, что результирующие задачи оптимизации можно сделать выпуклыми для задач синтеза регуляторов в виде статической обратной связи по состоянию (в случае полной информации о векторе состояния), регуляторов полного порядка по выходу и регуляторов в виде статической обратной связи по выходу для некоторых классов объектов, определяемых их структурными свойствами. Для этих задач можно найти анизотропийные γ -оптимальные регуляторы из решения задач выпуклой оптимизации. В сравнении с решением задачи синтеза анизотропийного оптимального регулятора, полученного в [69], предлагаемый подход на основе выпуклой оптимизации является новым и не требует разработки специальных вычислительных алгоритмов на основе метода гомотопий.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц* // *АиТ.* – 2005, №1. – С. 82-99.

2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД П., КЛОЕДЕН П. *Анизотропный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале* // *АиТ.* – 2006, №8. – С. 92-111.
3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // *ДАН.* – 1995. №3. –С. 583-585.
4. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Стохастическая проблема \mathcal{H}_∞ -оптимизации* // *ДАН.* – 1995. – Т. 343, №5. – С. 607-609.
5. КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А. *Решение задачи стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации для линейной системы с неопределенностью* // *АиТ.* – 2006, №8. – С. 112-142.
6. APKARIAN, P., NOLL, D., TUAN, H.D. *Fixed-order \mathcal{H}_∞ control design via a partially augmented Lagrangian method* // *Int. J. of Nonlinear and Robust Contr.* – 2003. – Vol. 13. – P. 1137-1148.
7. APKARIAN, P., PELLANDA, P.C., TUAN, H.D. *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ multi-channel linear parameter-varying control in discrete time* // *Syst. & Contr. Lett.* – 2000. – Vol. 41. – P. 333-346.
8. APKARIAN, P., TUAN, H.D. *Concave programming in control theory* // *J. of Glob. Opt.* – 1999. – Vol. 15. – P. 343-370.
9. ARZELIER, D., PEAUCELLE, D. *An iterative method for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ synthesis via static output feedback* // *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.* – 2002. – P. 3464-3469.
10. BEN-TAL, A., NEMIROVSKII, A. *Lectures on Modern Convex Optimization.* Technion, Haifa, Israel, 2000.
11. BERNSTEIN, D.S., HADDAD, W.M. *LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound: a Riccati equation approach* // *IEEE Trans. AC.* – 1989. – Vol. 34. – P. 293-305.
12. BOYD, S.P., GHAOUI, L.EL. *Method of centers for minimizing generalized eigenvalues* // *Lin. Alg. Appl.* – 1993. – Vol. 188. – P. 63-111.

13. BOYD, S., GHAOUI, L.EL., FERON, E., BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control theory*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
14. CHEN, X., WEN, J.T. *A linear matrix inequality approach to the general mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem* // Proc. American Control Conf. – 1995. – P. 1443-1447.
15. DIAMOND, P., KURDJUKOV, A.P., SEMYONOV, A.V., VLADIMIROV, I.G. *Homotopy methods and anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ optimization of control systems* // Report 97-14 of The University of Queensland, Australia. – 1997. – P. 1-22.
16. DIAMOND, P., VLADIMIROV, I.G., KURDYUKOV, A.P., SEMYONOV, A.V. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. of Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 28-42.
17. DOYLE, J.C. *Guaranteed margins for LQG regulators* // IEEE Trans. AC. – 1978. – Vol. 23. – P. 756-757.
18. DOYLE, J.C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P.P., FRANCIS, B.A. *State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 831-848.
19. FARES, B., APKARIAN, P., NOLL, D. *An augmented Lagrangian method for a class of LMI-constrained problems in robust control theory* // Int. J. of Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 348-360.
20. FRIDMAN, E., SHAKED, U. *Robust \mathcal{H}_∞ minimum entropy static output-feedback control of singularly perturbed systems* // Automatica. – 2000. – Vol. 36. – P. 1181-1188.
21. GAHINET, P. *Explicit controller formulas for LMI-based \mathcal{H}_∞ synthesis* // Automatica. – 1996. – Vol. 32. – P. 1007-1014.
22. GAHINET, P., APKARIAN, P. *A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control* // Int. J. of Robust and Nonlinear Contr. – 1994. – Vol. 4. – P. 421-448.
23. GHAOUI, L.EL., OUSTRY, F., RAMI, M.A. *A cone complementarity linearization algorithm for static output-*

- feedback and related problems* // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – P. 1171-1176.
24. GLOVER, K., DOYLE, J.C. *State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an \mathcal{H}_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity* // Syst. & Contr. Lett. – 1988. – Vol. 11. – P. 167-172.
 25. GUSEV, S.V. *Minimax control under a bound on the partial covariance sequence of the disturbance* // Automatica. – 1995. – Vol. 31. – P. 1287-1301.
 26. GUSEV, S.V. *Minimax control under a restriction on the moments of disturbance* // Proc. 34th IEEE Conf. on Decision and Control, New Orleans, USA. – 1995. – P. 1195-1200.
 27. GUSEV, S.V. *Method of moment restrictions in robust control and filtering* // Proc. 13th IFAC World Congress, San-Francisco, USA. – 1996. – P. 415-420.
 28. HINDI, H.A., HASSIBI, B., BOYD, S.P. *Multiobjective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -optimal control via finite dimensional Q -parametrization and linear matrix inequalities* // Proc. American Control Conf. – 1998. – P. 3244-3248.
 29. HUNG, Y.S., MACFARLANE, A.G.J. *Multivariable feedback: A quasi-classical approach*, Vol. 40 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
 30. IGLESIAS, P.A., MUSTAFA, D. *State-space solution of the discrete-time minimum entropy control problem via separation* // IEEE Trans. AC. – 1993. – Vol. 38. – P. 1525-1530.
 31. IWASAKI, T., SKELTON, R.E. *All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas* // Automatica. – 1994. – Vol. 30. – P. 1307-1317.
 32. IGLESIAS, P.A., MUSTAFA, D., GLOVER, K. *Discrete time \mathcal{H}_∞ controllers satisfying a minimum entropy criterion* // Syst. & Contr. Lett. – Vol. 14. – P. 275-286.
 33. IVAN, M. *A ring vortex downburst model for flight simulation* // J. Aircraft. – 1996. – Vol. 23. – P. 232-236.

34. IWASAKI, T., SKELTON, R.E. *The XY-centering algorithm for the dual LMI Problem: A new approach to fixed order design* // Int. J. of Contr. – 1995. – Vol. 62. – P. 1257-1272.
35. JACOBSON, D.H. *Extensions of Linear-Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory*. Academic Press, NY, 1977.
36. KHARGONEKAR, P.P., ROTEA, M.A. *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach* // IEEE Trans. AC. – 1991. – Vol. 36. P. 824-837.
37. KIMURA, H. *Pole assignment by gain output feedback* // IEEE Trans. AC. – 1975. – Vol. AC-20. – P. 509-516.
38. KUČERA, V. *Stability of discrete linear feedback systems* // Proc. IFAC World Congress, Boston, Massachusetts. – 1975. – Paper No. 44-1.
39. KURDYUKOV, A.P., MAXIMOV, E.A. *State-space solution to stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem with uncertainty* // Proc. 16th IFAC World Congr., Prague, Czechia. – 2005.
40. KURDYUKOV, A.P., MAXIMOV, E.A., TCHAIKOVSKY, M.M. *Anisotropy-based bounded real lemma* // Proc. 19th Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapest, Hungary. – 2010. – P. 2391-2397.
41. KURDYUKOV, A.P., PAVLOV, B.V., TIMIN, V.N., VLADIMIROV, I.G. *Longitudinal anisotropy-based flight control in a wind shear* // Proc. 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia. – 2004.
42. LEE, K.H., LEE, J.H., KWON, W.H. *Sufficient LMI conditions for \mathcal{H}_∞ output feedback stabilization of linear discrete-time systems* // IEEE Trans. AC. – 2006. – Vol. 51. – P. 675-680.
43. LEIBFRITZ, F. *COMPl_eib: Constraint matrix-optimization problem library – a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems* // Tech. rep. of the University of Trier, Germany, 2004, <http://www.complib.de>.
44. LEIBFRITZ, F., LIPINSKI, W. *Description of the benchmark examples in COMPl_eib 1.0* // Tech. rep. of the University of

- Trier, Germany, 2003, <http://www.complib.de>.
45. LÖFBERG, J. *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB* // Proc. of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan. – 2004. Available from <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
 46. MASUBUCHI, I., OHARA, A., SUDA, N. *LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution* // Int. J. of Robust and Nonlinear Contr. – 1998. – Vol. 8. – P. 669-686.
 47. MAXIMOV, E.A., KURDYUKOV, A.P., VLADIMIROV, I.G. *Anisotropic norm bounded real lemma for linear discrete time varying systems* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy. – 2011.
 48. MIRADORE, R., RICCI, G. *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: the discrete-time case* // Syst. & Contr. Lett. – 2005, – Vol. 54. – P. 1-13.
 49. MUSTAFA, D., GLOVER, K. *Minimum Entropy \mathcal{H}_∞ Control*. Springer-Verlag, NY, 1991.
 50. MUSTAFA, D., GLOVER, K., LIMEBEER, D. *Solutions to the \mathcal{H}_∞ general distance problem which minimize an entropy integral* // Automatica. – 1991. – Vol. 27. – P. 193-199.
 51. NEMIROVSKII, A., GAHINET, P. *The projective method for solving linear matrix inequalities* // Math. Programming Series B. – 1997. – Vol. 77. – P. 163-190.
 52. NESTEROV, YU., NEMIROVSKII, A. *Interior-point Polynomial Methods in Convex Programming*, volume 13 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
 53. NOLL, D., TORKI, M., APKARIAN, P. *Partially augmented Lagrangian method for matrix inequality constraints* // SIAM J. on Opt. – 2004. – Vol. 15. – P. 161-184.
 54. OLIVEIRA, M.C., GEROMEL, J.C., BERBNUSSOU, J. *An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems* // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. – 1999. – P. 27-38.

55. POLYAK, B.T., GRYAZINA, E.N. *Hit-and-Run: Randomized technique for control problems recasted as concave programming* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy. – 2011.
56. POLYAK, B.T., GRYAZINA, E.N. *Markov chain Monte Carlo method exploiting barrier functions with applications to control and optimization* // Proc. IEEE Multi-Conf. on Systems and Control. – 2010. – P. 1553-1557.
57. POZNYAK, A.S. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers. Volumes 1,2: Deterministic Techniques, Stochastic Techniques*. Elsevier, 2008, 2009.
58. ROTSTEIN, H., SZNAIER, M. *An exact solution to general four-block discrete-time mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ problems via convex optimization* // IEEE Trans. AC. – 1998. – Vol. 43. – P. 1475-1481.
59. SCHERER, C.W. *Multiobjective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control* // IEEE Trans. AC. – 1995. – Vol. 40. – P. 1054-1062.
60. SCHERER, C.W. *An efficient solution to multi-objective control problems with LMI objectives* // Syst. & Contr. Lett. – 2000. – Vol. 40. – P. 43-57.
61. SCHERER, C.W. *Robust controller design by output feedback against uncertain stochastic disturbances* // Proc. 3rd IFAC Symp. on Robust Control Design, Prague, Czechia. – 2000.
62. SCHERER, C.W. *Multi-objective control without Youla parametrization* // In Perspectives in Robust Control. Lecture Notes on Control and Information Sciences. – 2001. – Vol. 268. – P. 311-325.
63. SEMYONOV, A.V., VLADIMIROV, I.G., KURDJUKOV, A.P. *Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization* // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Florida, USA. – 1994. – P. 2249-2250.
64. SCHERER, C.W., GAHINET, P., CHILALI, M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – P. 896-911.
65. STURM, J.F. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for*

- optimization over symmetric cones // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11. – P. 625-653.*
66. TCHAIKOVSKY, M.M., KURDYUKOV, A.P., TIMIN, V.N. *Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy. – 2011. – P. 2332-2337.*
67. TCHAIKOVSKY, M.M., KURDYUKOV, A.P., TIMIN, V.N. *A convex formulation of strict anisotropic norm bounded real lemma // Preprint. Available from <http://arxiv.org/abs/1108.5140>. – 2011.*
68. VLADIMIROV, I.G., KURDJUKOV, A.P., SEMYONOV, A.V. *On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proc. 13th IFAC World Congress, San-Francisco, USA. – 1996. – P. 179-184.*
69. VLADIMIROV, I.G., KURDJUKOV, A.P., SEMYONOV, A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem // Proc. 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA. – 1996. – P. 427-432.*
70. WHITTLE, P. *Risk-sensitive linear/quadratic/Gaussian control // Adv. Appl. Prob. – 1981. Vol. 13. – P. 764-777.*
71. WHITTLE, P. *Entropy-minimizing and risk-sensitive control rules // Syst. & Contr. Lett. – 1989. – Vol. 13. – P. 1-7.*
72. YAESH, I., SHAKED, U. *Minimum entropy static output-feedback control with an \mathcal{H}_∞ -norm performance bound // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – P. 853-858.*
73. YOULA, D.C., JABR, H.A., BONGIORNO, J.J. *Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: the Multivariable case // IEEE Trans. AC. – 1976. – Vol. 21. – P. 319-338.*
74. YU, J. *A new static output feedback approach to the suboptimal mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ problem // Int. J. of Robust and Nonlinear Contr. – Vol. 14. – P. 1023-1034.*
75. ZHOU, K., GLOVER, K., BODENHEIMER, B.A., DOYLE, J.C. *Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance objectives I: Robust performance analysis, II: Optimal control // IEEE Trans. AC.*

SOLUTION OF ANISOTROPIC SUBOPTIMAL CONTROLLER SYNTHESIS PROBLEMS VIA LMI AND CONVEX OPTIMIZATION

Michael Tchaikovsky, Institute of Control Sciences of RAS,
Moscow, Candidate of Science (mmtchaikovsky@hotmail.com).

Abstract: This paper considers a disturbance attenuation problem for a linear discrete time invariant system under random disturbances with imprecisely known distributions. The designed anisotropic suboptimal controller generally is a dynamic fixed-order output-feedback compensator which is required to stabilize the closed-loop system and keep its anisotropic norm below a prescribed threshold value. The proposed optimization-based approach is novel and more convenient for practical computations.

Keywords: discrete linear time invariant systems, random disturbances, statistical uncertainty, norm, anisotropy, convex optimization, linear matrix inequalities.