УДК 512.57 + 512.64 + 519.71
ББК 32.813

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ АГЕНТА В НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ МЕТОДАМИ ИДЕМПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ[1]

Николаев Д.А.
(*Липецкий государственный технический университет, Липецк*)

Интеллектуальный характер движения агента, подразумевающий чередование актов восприятия, планирования и частичной реализации плана, делает затруднительным или вовсе невозможным построение математических моделей на основе традиционного аппарата алгебраических, дифференциальных или разностных уравнений над полем действительных или комплексных чисел. В связи с этим, в статье разрабатывается и исследуется модель движения агента в дискретной динамической неопределенной полностью наблюдаемой внешней среде на основе идемпотентной алгебры – важного раздела теории полуколец, роль которой как теоретической дисциплины и эффективного инструмента решения многих практических задач в экономике, технике, управлении и других областях неуклонно растет.

Ключевые слова: агент, идемпотентная алгебра, неопределенная внешняя среда, уравнение движения, интеллектное управление.

1. Введение

Процесс движения в статической полностью наблюдаемой внешней среде уже хорошо понят и является предметом изуче-

---

[1] *Работа поддержана РФФИ, проект № 11-07-00580-а.*

ния классической теории управления – науки о проектировании систем, действующих преимущественно оптимальным образом [3,10,12]. По причине того, что в большинстве встречающихся задач на процесс движения оказывают существенное влияние неконтролируемые внешние факторы, процесс планирования приходится осуществлять в режиме реального времени на основе оперативно поступающей информации о состоянии внешней среды. Выполнение традиционных для классической теории управления условий оптимальности в случаях неограниченной неопределенности в общем случае не возможно и задача управления движением в реальном времени становится предметом рассмотрения пограничной области теории управления и искусственного интеллекта – интеллектного управления (Intelligent Control) – науки о проектировании систем, состоящих, как правило, из агентов, руководствующихся более слабыми, чем оптимальность, представлениями о рациональности своих действий, тем самым достигая некоторого сходства с интеллектом, демонстрируемым живыми организмами [2,11].

До недавнего времени постановка и решение задач управления опирались на более или менее традиционные математические модели в форме тех или иных уравнений динамики. Однако в ряде задач интеллектного управления зависимости настолько сложны, что не допускают своего обычного аналитического представления. К примеру, интеллектуальный характер движения агента, подразумевающий чередование актов восприятия, планирования и частичной реализации плана, делает затруднительным или вовсе невозможным построение математических моделей на основе традиционного аппарата алгебраических, дифференциальных или разностных уравнений над полем действительных или комплексных чисел, заставляя многих исследователей переключить свое внимание на изучение математических моделей на основе алгебраических структур, отличных от классических [1].

Недавний прогресс в развитии одной из важнейших областей теории полуколец – идемпотентной и тропической математики [6,13,14] – привел к переформулировке ряда задач теории оптимального управления в терминах идемпотентных полуколец [9,8]. К сожалению, до сих пор не было обнаружено методов, позволяющих распространить известные результаты идемпотентной теории оптимального управления на проблематику задач интеллектного управления, например, задач моделирования и управления движения агента в дискретной динамической неопределенной полностью наблюдаемой внешней среде, что и послужило стимулом для написания данной работы.

2. Постановка задачи

Процесс движения в дискретной среде понимается в следующем смысле: агент сначала исчезает в некоторой клетке, а затем появляется в одной из соседних. Внешняя среда является динамической, то есть она может изменяться в ходе того, как агент реализует очередное запланированное действие. По отношению к агенту внешняя среда считается неопределенной в том смысле, что агент не информирован о принципах ее изменения и вынужден в режиме реального времени следить за изменением состояния внешней среды посредством восприятия. Удобно считать, что совместные действия агента и внешней среды выполняются синхронно в некоторые дискретные моменты времени. Внешняя среда полагается полностью наблюдаемой или, другими словами, датчики агента имеют доступ к полной информации о состоянии внешней среды в каждый момент времени.

Задача агента состоит в том, чтобы определить, какая последовательность действий приведет его в целевое состояние. Причем для достижения цели, в общем случае, единственного действия недостаточно, поэтому агенту приходится функционировать в режиме реального времени, чередуя акты восприятия, планирования и частичной реализации плана. Основная проблема заключается в неограниченной неопределенности – всегда могут возникнуть непредвиденные обстоятельства, для которых уже подготовленные действия окажутся неприемлемыми. По аналогии с жадными алгоритмами [4] агента принято называть жадным, если при выборе действий он руководствуется жадной стратегией, принимая лучшее в некотором смысле решение на основе лишь той информацией, которая была получена в результате текущего акта восприятия, и не учитывая ни истории актов восприятия, ни возможных последствий своих действий [11].

3. Основы идемпотентной алгебры

К концу прошлого века был накоплен богатый запас результатов в теории оптимизации и теории оптимального управления, вследствие чего назрела задача выработки единого взгляда на все многообразие полученных фактов, создания новых общих методов. Такая перестройка науки осуществляется под влиянием бурного роста новой унифицирующей формы теории оптимизации – идемпотентной математики, роль которой как теоретической дисциплины и эффективного инструмента решения многих практических задач в экономике, технике, управлении и других областях неуклонно растет [3,4,6,7,12,13]. Идемпотентную математику можно рассматривать как составную часть теории полуколец, изучающую полукольца с идемпотентным сложением.

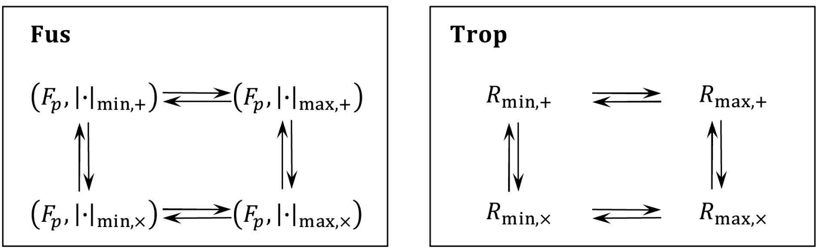

Рис. 1. Коммутативная диаграмма

Распространенным примером таких алгебраических структур [1] является так называемое тропическое полукольцо $R_{\min,+}$, носителем которого выступает множество $T = R \cup \{+\infty\}$ вместе с операциями $a \oplus_T b = \min(a,b)$ и $a \otimes_T b = a + b$ с нулевым

$\overline{0}_T = +\infty$ и единичным $\overline{1}_T = 0$ элементами. В идемпотентных полукольцах определено каноническое отношение порядка $a \leq_T b \Leftrightarrow a \oplus_T b = b$, в соответствии с которым любой элемент идемпотентного полукольца неотрицателен. По этой причине идемпотентные полумодули имеют много общего с векторными пространствами над полуполем неотрицательных чисел, то есть с выпуклыми конусами неотрицательного ортанта, что влечет за собой справедливость для идемпотентных полумодулей хорошо известных результатов классической теории Перрона-Фробениуса. На ряду с идемпотентным полукольцом $R_{\min,+}$ на Рис. 1 приведены также и изоморфные ему идемпотентные полукольца $R_{\max,+}$, $R_{\min,\times}$, $R_{\max,\times}$, составляющие категорию Trop [7].

Однако обычных идемпотентных полуколец для вывода искомых уравнений движения оказывается недостаточно. Потребуется специальный класс идемпотентных полуколец – конечнопорожденные нормированные идемпотентные fusion-полукольца $\left(F_p, \left|\cdot\right|_T\right)$ с $2^p \in N$ образующими, представляющие собой алгебраические структуры, носителем которых выступает $F_p = \left\{\varnothing, c, \{\varnothing, c\}^{p+}\right\}$ вместе с операциями идемпотентного коммутативного сложения $a \oplus_F b = a \,\mathbf{pf}\, b$ и некоммутативного умножения $a \otimes_F b = a \Delta b$ с нулевым $\overline{0}_F = \varnothing$ и единичным $\overline{1}_F = c$ элементами, неархимедовой нормой $\left|\cdot\right|_T : F_p \to T$ [13,14]. Символом $+$ обозначается операция замыкания Клини, примененная к множеству $\{\varnothing, c\}$ в декартовой степени p, тем самым определяющая носитель, порожденный, помимо двух нейтральных элементов, конечным множеством 2^p бинарных векторов размерности p. Закон параллельной композиции $\mathbf{pf}$ и закон последовательной композиции Δ, называемый также fusion-произведением, определяются $\forall a = a_1 \ldots a_k$, $b = b_1 \ldots b_l \in F_p$ формулами

$$(1)\quad a\,\mathbf{pf}\;b=\begin{cases} a,\textit{если}\ |a|_T \leq_T b,\\ \quad b,\ \textit{иначе}.\end{cases}$$

$$(2)\quad a\Delta b=\begin{cases} a_1 ... a_k b_2 ... b_{\mathbf{l}},\textit{если}\ a_k = b_1,\\ \qquad \varnothing,\ \textit{иначе}.\end{cases}$$

Аксиомы и определения понятия нормы без существенных изменений переносятся на случай идемпотентных полуколец категории Trop. Под нормой на F_p понимается функция $|\cdot|_T : F_p \to T$, переводящая элемент F_p в элемент числового идемпотентного полукольца T из категории Trop и $\forall a,b \in F_p$ удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $|a|_T \geq_T \overline{0}_T$, $|a|_T = \overline{0}_T \Leftrightarrow a = \overline{0}_F$ (неотрицательность),
2. $|ab|_T = |a|_T |b|_T$ (мультипликативность),
3. $|a \oplus_F b|_T = |a|_T \oplus_T |b|_T$ (сильное неравенство треугольника).

Свойство архимедовости $\forall a,b \in F_p, \exists n \in N : |a \oplus_F \mathbf{K} \oplus_F a|_T \geq_T |b|_T$, где n – число слагаемых в приведенной выше сумме, для данной нормы не выполняется из-за того, что областью значений нормы является идемпотентное полукольцо T. Справедливо также свойство $|\overline{1}_F|_T = \overline{1}_T$. Таким образом, норма в данном случае является отображением, переводящим сложение F_p в сложение T, умножение F_p в умножение T, нулевой и единичный элементы F_p в нулевой и единичный элементы T, определяя гомоморфизм идемпотентных полуколец $\left(F_p, |\cdot|_T\right)$, T и изоморфизм категорий Fus, Trop. Заметим, что объекты одной и той же категории на Рис. 1 изоморфны, а объекты разных категорий гомоморфны. Приведением вышеуказанных фактов завершается иллюстрация формального сходства категорий идемпотентных полуколец Trop и идемпотентных fuision-полуколец Fus и обосновывает справедливость результатов идемпотентной математики в случае работы с конечнопорожденными нормированными идемпотентными fusion-полукольцами $\left(F_p, |\cdot|_T\right)$ с $p \in N$ образующими.

Выполнение свойства идемпотентности $a \oplus a = a$ влечет за собой отсутствие во всех идемпотентных полукольцах операции вычитания, что существенно сужает класс моделей, которые могут быть построены с использованием данных алгебраических структур. Например, дифференциальные и конечно-разностные уравнения без операции вычитания не могут быть построены в принципе. Это придает особое значение исследованию алгебраических уравнений, которые во многих случаях успешно формулируются и решаются с использованием некоторых математических ухищрений, используемых для преодоления связанных с необратимостью сложения ограничений.

Одним из важнейших уравнений идемпотентной математики, связанным с задачами дискретной оптимизации и теории оптимального управления, является уравнение Беллмана $x = Ax \oplus b$. Ввиду отсутствия в полукольце операции вычитания, оно не может быть решено подобно тому, как это делается в традиционной математике, то есть по формуле $x = (I - A)^{-1} b$. Однако, существует другой более интересный и действенный метод. Матрица $(I - A)^{-1}$ разлагается в бесконечный степенной ряд по параметру A и, таким образом, полностью выражается в терминах идемпотентного полукольца. Этот ряд сходится, если спектральный радиус матрицы A меньше или равен $\overline{1}$ в силу указанного отношения порядка, что всегда верно в исследуемом классе прикладных задач. К тому же благодаря математической природе исследуемой алгебраической структуры нет необходимости выполнять бесконечное суммирование: сумма ряда может быть вычислена абсолютно точно за конечное число шагов, $x = \left(I \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^{n-1}\right) b$, где n – порядок матрицы. Для записи решения уравнения Беллмана в более компактной форме

$x = A^{+}b$, удобно использовать операцию квазиобращения, или замыкания Клини, $+$.

4. Уравнение движения агента

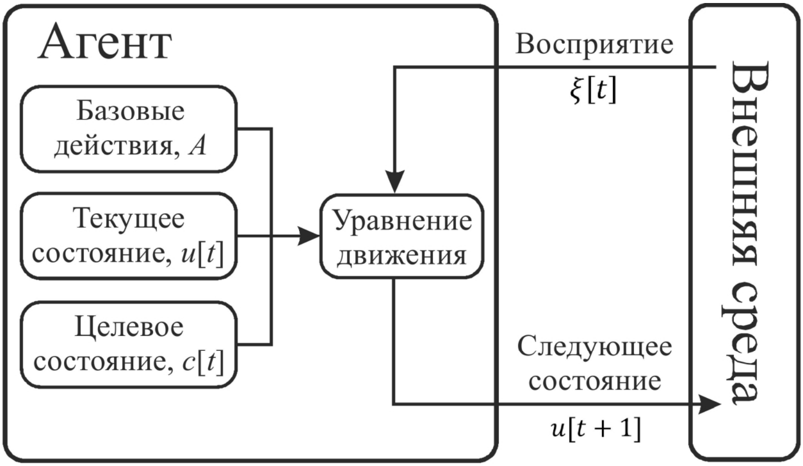

Рис. 2. Архитектура агента

Движение жадного агента с архитектурой, изображенной на Рис. 2, описывается динамической системой, определенной над некоторым идемпотентным fusion-полукольцом из категории Fus и состоящей из трех векторно-матричных уравнений,

$$(3)\quad \begin{cases} x[t] = x[t]x^{t}[t] * Ax[t] \oplus_F u[t], \\ \qquad y[t] = c^{t}[t]x[t], \\ u[t] = s\,(y[t-1]),\;\; t \in \mathrm{N}, \end{cases}$$

где $A \in F_p^{n \times n}$ – матрица базовых действий, $x[t] \in F_p^{n}$ – текущее восприятие агента, $u[t] \in F_p^{n}$ – текущее состояние агента, $c[t] \in F_p^{n}$ – целевое состояние агента, t – операция транспонирования, $*$ – операция адамарова произведения. Исключая из рассмотрения $x[t]$ с использованием операции квазиобращения

$+$, или замыкания Клини, система (2) может быть приведена к системе, состоящей из единственного уравнения,

(4) $\quad y[t]=c^t[t]\left(x[t]x^t[t]*Ax[t]\right)^+ s\,\left(y[t-1]\right),\ t\in \mathrm{N}.$

Динамика этой системы подчинена следующему алгоритму.

Начало алгоритма. Матрица базовых действий A и текущее целевое состояние агента $c^t[t]$ считаются заданными;

1. В качестве входов подается вектор текущего состояния агента $u[t]$;
2. С датчиков получается вектор текущего восприятия $x[t]$;
3. Вычисляются выход системы $y[t]$ по формуле (3);
4. Проверяется критерий останова: если $y[t]=y[t-1]$, то система (2) достигла своего устойчивого состояния, иначе $t=t+1$, вычисляется $u[t]=s\,\left(y[t-1]\right)$ и происходит переход на шаг 2.

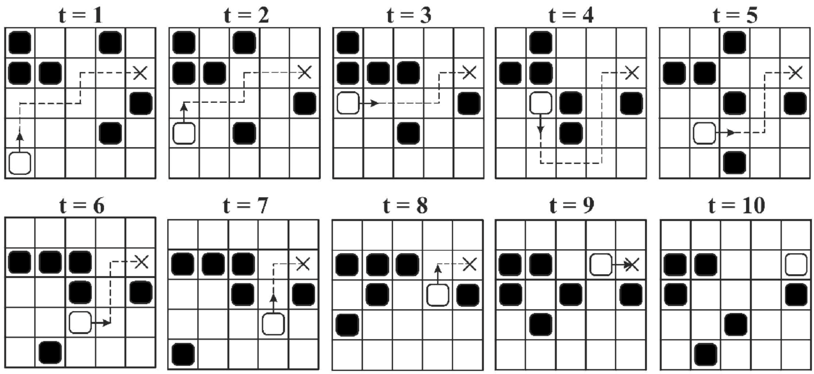

Рис. 3. Процесс управления

Наличие нелинейной функции обратной связи s в уравнении движения (3) или (4) , как и принято в классической теории управления [10], связано со способностью агента адаптироваться к постоянным изменениям внешней среды. С данной системой можно ассоциировать геометрический объект – единичный гиперкуб, по отношению к которому каждая итерация интерпретируется как действие группы поворотов $G(2^n)$. этого гиперкуба. Специфической особенностью моделируемой предметной области, является тот факт, что рассматриваемой динамической системы (4) реализуется не вся группа $G(2^n)$ целиком, а лишь ее подгруппа $G(n)$ поворотов в фиксированной гиперплоскости главного диагонального сечения гиперкуба. Наличие неподвижной точки на орбите [3] рассматриваемой системы, состоящей ровно из n точек, гарантируется предметной областью – полагается что у всех агентов должны быть целевые состояния, попав в которые агент считает свою цель выполненной и ждет появления новой.

Каждый такт работы системы (4), как показано на Рис. 3, интерпретируется как мгновенно оптимальное перемещение (обозначенного стрелкой $\rightarrow$) агента (обозначаемого незакрашенным квадратом ▢) в пространстве собственных состояний (на плоской решетке) в сторону его целевого состояния (обозначенного крестиком $\times$) вдоль мгновенно оптимальной траектории (обозначенной пунктиром). Таким образом, агент за десять шагов достигает целевого состояния, согласуя свое движение с высокодинамичным окружением, в каждый момент времени блокирующего часть доступных агенту состояний (обозначаемых закрашенными квадратами ■).

Данная линейно-нелинейная динамическая система с нелинейной обратной связью и бинарным векторным входом в общем случае не является асимптотически устойчивой в силу специфики предметной области, которую она описывает: неустойчивость в первую очередь связана с неограниченной неопределенностью модели. Однако те вырожденные случаи, когда определяемый уравнением (3) или (4) процесс асимптотически не сходится, вызваны крайне неблагоприятными условиями внешней среды и редко встречаются на практике. Таким образом приведенное уравнение (4) является алгебраической моделью движения жадного агента в дискретной динамической неопределенной полностью наблюдаемой внешней среде, на основе которой, очевидно, решается и задача управления этим же агентом.

5. Заключение

Несмотря на длительную историю и возрастающее прикладное значение задач управления в условиях неопределенности алгебраических моделей изучаемого процесса движения агента к настоящему времени получено не было. Традиционная методика не ставит целью дать исчерпывающее решение задачи, ограничиваясь разработкой алгоритмов и оставляя поиск тех уравнений, что так или иначе должны присутствовать за кадром, для дополнительного исследования. Полученные в настоящей статье результаты в области аналитического описания интеллектуальной дискретной динамики имеют фундаментальное значение и представляют ценность для аналитических методов теории управления [10]. Без привлечения современных результатов теории полуколец попытки получения уравнения движения агента в явном виде лишь на основе средств традиционной математики наталкиваются на труднопреодолимые препятствия и до сих пор не приводились в известной автору источниках. Полученные уравнения обладают большей общностью и позволяют охватить большее количество различных типов рациональности агентов и, следовательно, большее количество различных потенциальный приложений за счет того, что полученные уравнения определены над целой категорией идемпотентных fusion-полуколец. Поэтому с практической точки зрения, помимо специалистов в искусственном интеллекте и теории управления, результаты данной работы могут быть полезны разработчикам программного обеспечения, стремящихся меньшим количеством исходного кода решить большее количество потенциально возможных задач и тем самым удовлетворить потребности большего числа конечных пользователей.

6. Литература

1. БУРБАКИ Н. Алгебра. *Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра* – М. : ГИФМЛ, 1962. – 516 с.
2. ВАСИЛЬЕВ С.Н., ЖЕРЛОВ А.К., ФЕДОСОВ Е.А., ФЕДУНОВ Б.Е. *Интеллектное управление динамическими системами* – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 352.
3. КАТОК А.Б., ХАССЕЛБЛАТ Б. *Введение в современную теорию динамических систем.* – М. : Изд-во «Факториал», 1999. – 768 с.
4. КОРМЕН Т., ЛЕЙЗЕРСОН Ч., РИВЕСТ Р., ШТАЙН К. *Алгоритмы: построение и анализ.* – М. : Вильямс. – 2005. – 1296 с.
5. КРИВУЛИН Н.К. *Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем.* – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та. – 2009. – 256 с.
6. ЛИТВИНОВ Г. Л. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение // Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. XIII, Зап. научн. сем. ПОМИ, 326. – СПб. : ПОМИ, 2005. – С. 145-182.
7. МАКЛЕЙН С. *Категории для работающего математика.* – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 352 с.
8. МАСЛОВ В.П. *О новом принципе суперпозиции для оптимизационных задач* // Успехи математических наук, 42, N3, 1987. – С. 39-48.
9. МАСЛОВ В.П., КОЛОКОЛЬЦЕВ В.Н. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* – М. : Наука, 1994.
10. ПОДЧУКАЕВ В.А. *Теория автоматического управления (аналитические методы).* – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 392 с.
11. РАССЕЛ С., НОРВИГ П. *Искусственный интеллект: современный подход.* – М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.

12. ФИЛЛИПС Ч., ХАРБОР Р. *Системы управления с обратной связью.* – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.
13. GOLAN J.S. *Semirings and their applications.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 396 p.
14. GONDRAN M., MINOUX M. *Graphs, Dioids and Semirings: New Models and Algorithms.* – New York: Springer Science + Business Media. – 2008 – 383 p.

MODELLING AND CONTROL OF AGENT'S MOTION IN UNCERTAIN ENVIRONMENT BY IDEMPOTENT ALGEBRA METHODS

Nikolayev Dmitry, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Ph.D. Student (NikolayevDmitry@yandex.ru).

Abstract: *Intelligent nature of agent motion always contains several stages (perception, planning and partial realization of plan). That is why it is difficult or even impossible to build mathematical models based on traditional mathematical tools such as algebraic, differential or difference equations over the field of real of complex numbers. Therefore the main subject of present article is developing and researching of agent motion model in discrete dynamic uncertain completely observable environment based on idempotent algebra – important part of semiring theory which has a lot of useful applications in economics, technics and control theory.*

Keywords: agent, idempotent algebra, uncertain environment, motion equation, intelligent control.