УДК 517.977.5
ББК 22.18

ОБЩИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕДУР УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К СТОХАСТИЧЕСКИМ И ИЕРАРХИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Горелик В.А.[1]
(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва)
Золотова Т.В.[2]
(Государственный университет Министерства Финансов РФ, Москва)

Статья посвящена описанию общей модели управления риском, включающей две подмодели: модель оценки эффективности системы и модель оценки риска ее функционирования. Рассмотрены задачи управления стохастическими системами, а также сложными системами, имеющими иерархическую структуру, функционирующими в условиях внутрисистемной неопределенности. Предложены методы решения этих задач управления, позволяющие находить оптимальную стратегию управления с точки зрения эффективности и устойчивости.

Ключевые слова: неконтролируемые факторы, минимизация риска, случайные процессы, функция риска, иерархия, цена децентрализации.

---

[1] *Горелик Виктор Александрович, доктор физико-математических наук, профессор (gorelik@ccas.ru).*
[2] *Золотова Татьяна Валерьяновна, доктор физико-математических наук, доцент (tgold11@mail.ru).*

Введение

При моделировании процессов управления в сложных системах неизбежно возникает вопрос о соотношении эффективности и устойчивости их функционирования. В теории управления существуют различные понятия устойчивости или гомеостазиса системы. Представляется интересной задачей развитие концептуального подхода к формализации и решению проблемы устойчивости сложных систем и процессов на основе понятия риска.

При управлении сложными системами или процессами устойчивость и эффективность их функционирования может быть достигнута путем обработки и использования информации при выборе управляющих параметров так, чтобы в пределах области гомеостазиса критерий эффективности принимал оптимальное значение. Если условием устойчивости является безопасность функционирования процесса или системы, то область гомеостазиса системы представляет собой совокупность управлений, обеспечивающих как можно меньшую возможность появления неблагоприятных ситуаций и связанных с ними отрицательных последствий.

Риск в широком смысле – это непредсказуемость состояния системы или течения процесса как результат неполноты информации. При этом под обеспечением устойчивости системы подразумевается достижение достаточно низкого уровня риска, оцениваемого величиной возможных потерь, связанных с принятием решений в условиях неполной информации. Это в свою очередь требует применения процедуры управления риском. Под управлением риском понимается управление системой или процессом, непременным атрибутом которого являются процедуры учета и оценки факторов риска в целях максимального снижения неопределенности при принятии решений и обеспечения устойчивости (или безопасности функционирования) системы. Под общей моделью управления риском, естественно, понимается не общая модель управления вообще, а ее конкретизация применительно к задачам управления риском. Некоторые задачи управления риском рассмотрены в [2, 3].

Ситуация риска связана с возможностью возникновения некоторых событий, которые нарушают текущее состояние системы или естественное (прогнозируемое) течение процесса. Поэтому проблему управления риском целесообразно рассматривать в двух вариантах: при «естественном» ходе процессов и при нарушении существующих тенденций. Соответственно, общая модель управления риском включает модель функционирования системы при прогнозируемых значениях внешних факторов (плановый сценарий) и модель функционирования системы при отклонении от прогноза.

Математические модели и соответственно методы управления различными сложными системами и процессами имеют разные аспекты. В моделях управления присутствуют такие характеристики, как иерархия, многокритериальность, случайность, неопределенность. Модели управления могут затрагивать организационные, экономические, экологические аспекты и предлагать разные механизмы управления. Общим для таких разнообразных моделей является то, что проблема устойчивости для них может быть решена на основе управления риском, а совместное рассмотрение управленческих решений с точки зрения эффективности и риска в процессах и системах позволяет принимать рациональные решения, создающие условия для их устойчивого функционирования.

1. Общая модель управления риском в сложных системах

Общими чертами модели управления деятельностью любой сложной системы в условиях неполной информации, а значит в условиях риска, является сочетание стремления к увеличению эффективности и одновременно снижению риска. Соответственно общая модель управления должна включать две подмодели: модель оценки эффективности системы и модель оценки риска ее функционирования. Основными компонентами обеих моделей являются описание процессов функционирования системы, т.е. изменения фазового состоянии под влиянием внутренних и внешних воздействий, процедур управления (схема управления, вид управления, ограничения), внешнего воздействия на систему и информационных процессов в системе (наличие случайных или неопределенных факторов, процедур обмена информацией).

Предлагается общая модель управления риском, которая задается оператором

(1) $\Psi(F(x,u,y,I),G(x,u,y,I))$,

определяющим принцип (или критерий) оптимальности управления на основе соизмерения оценок эффективности и риска, являющихся выходами подмодели оценки эффективности $F(x,u,y,I)$ и подмодели оценки риска $G(x,u,y,I)$. Оператор Ψ отображает совокупность выходов подмоделей оценок эффективности и риска во множество U_I^0, определяемое как множество оптимальных управлений.

В (1) x, u, y - переменные в моделях $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$, x - состояние системы или процесса в некотором фазовом пространстве, u - управление, y - неконтролируемые факторы, влияющие на функционирование системы. Исходные данные моделей определяются информационной компонентой I, включающей описание вида неконтролируемых факторов и информированности управляющего органа системы (законы распределения случайных параметров, область значений неопределенных факторов, схемы передачи информации в системе, процедуры обработки информации).

Переменные x, y, u моделей $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ являются, в общем случае, взаимосвязанными величинами. На выбор управления u оказывает влияние состояние x, в котором находится система, а также внешние факторы y, для описания которых используется информационная компонента I. Управление $u(x, y)$ для любых значений x и y должно удовлетворять ограничению $u(x, y)\in U$. При этом закон управления $u(\cdot, \cdot)$ принадлежит некоторому классу функций U_I, определяемому согласно имеющейся информации: $u(\cdot,\cdot)\in U_I$. Состояние x системы, в свою очередь, определяется выбираемым управлением и зависит от воздействия на систему внешних факторов, т. е. является некоторой функцией управления и значений внешних факторов: $x=\varphi(u, y)$. Заметим, что в статических моделях нет смысла разделять параметры на фазовые переменные и управления, поэтому в статическом случае управление (или стратегию) будем обозначать, как правило, переменной x.

Если внешние факторы y носят случайный характер и имеется статистическая информация об их значениях, то информационная компонента I включает описание закона распределения случайной величины $P(y)$. Если внешние факторы y неопределенные и информация о них представляет собой только описание области возможных значений Y, то информационная компонента включает условие вида $y\in Y$. Возможно сочетание случайных и неопределенных факторов, в том числе неточного знания закона распределения, параметры которого при этом оказываются неопределенными факторами. Если в системе осуществляется обмен информацией между подсистемами, для каждой из которых переданная информация является внешним фактором, то информационная компонента включает схемы передачи и содержание информации для каждой подсистемы. При этом схема управления может носить децентрализованный характер, а управление подсистем представлять собой функции от управлений других элементов системы, определяемые поступающей к ним информацией.

Модель оценки эффективности системы $F(x,u,y,I)$ включает описание целей функционирования системы, прогнозируемого состояния системы и внешней среды и определяет значение эффективности в случае планового функционирования системы. Пусть дана оценка значения внешнего фактора $\bar{y}_I$ согласно имеющейся информации (прогноз, математическое ожидание и т.п.). Тогда оценку эффективности (выход модели $F(x,u,y,I)$) при плановом варианте функционирования системы (базовый сценарий, среднее значение, текущее состояние и т.д.) можно представить в виде

(2) $\overline{w}(u) = f(x, u, \overline{y}_I)\ \ \forall u$, где $x{=}\varphi(u, \overline{y}_I)$.

Модель оценки риска функционирования системы $G(x,u,y,I)$ включает определение области гомеостазиса системы X, задаваемой ограничениями на параметры системы или мерой устойчивости на множестве значений параметров (нарушение этих ограничений или малое значение меры устойчивости приводит к потере гомеостазиса системы, т. е. к появлению ситуации риска), процесса функционирования системы при любых значениях неконтролируемых факторов и множества допустимых управлений D_u, обеспечивающих условие гомеостазиса. Например, в случае воздействия на систему неопределенных неконтролируемых факторов $y \in Y$ множество D_u имеет вид $D_u{=}\{u(\cdot, \cdot) \in \mathrm{U}_I \mid u(x, y) \in U,\ x{=}\varphi(u, y) \in X\ \ \forall y \in Y\}$.

Модель G(·) оценивает также возможный разброс показателей эффективности при различных значениях неконтролируемых факторов. Введем также в рассмотрение величину потерь $W_I(u, y)$ как результат воздействия неконтролируемых факторов y и оценку потерь в сравнении с плановым вариантом функционирования системы при имеющейся информации о неконтролируемых факторах (вероятности внешних воздействий, пессимистические, оптимистические сценарии и т. д.)

(3) $\overline{W_I}(u) = W_I(u, \overline{y}_I)\ \ \forall u$.

Оценка риска (выход модели $G(x,u,y,I)$) включает множество допустимых управлений D_u, оценку потерь (3) и может определяться выходом модели оценки эффективности $F(x,u,y,I)$.

Тогда оператор Ψ конкретизируется как отображение совокупности $(\{\overline{w}(u(\cdot,\cdot)\}_{u(\cdot,\cdot)\in \mathrm{U}_I}, \{\overline{W_I}(u(\cdot,\cdot))\}_{u(\cdot,\cdot)\in \mathrm{U}_I}, D_u)$ в подмножество оптимальных управлений U_I^0 множества допустимых управлений:

(4) $\Psi \colon (\{\overline{w}(u(\cdot,\cdot)\}_{u(\cdot,\cdot)\in \mathrm{U}_I}, \{\overline{W_I}(u(\cdot,\cdot))\}_{u(\cdot,\cdot)\in \mathrm{U}_I}, D_u) \to \mathrm{U}_I^0$.

Отметим, что отображение Ψ может зависеть только от части представленной совокупности, а некоторые из компонент этой совокупности могут быть константами (не зависеть от u).

Конкретизируем модель (4) для некоторых систем.

2. Задачи управления риском в стохастических системах

Для систем, функционирующих в условиях случайного воздействия внешней среды, внешние факторы y считаются случайными величинами, информационная компонента I представляет собой описание их законов распределения. Модель $F(\cdot)$ задает оценку эффективности системы как вектор математических ожиданий критериев эффективности подсистем или значений этих критериев эффективности при среднем значении неконтролируемых факторов $\bar{y}_I$ (в линейном случае это одно и то же). Модель $G(\cdot)$ определяет величину потерь $W_I(u, y)$ как множество значений отклонения эффективности системы от ее математического ожидания при всевозможных значениях y (отличных, вообще говоря, от $\bar{y}_I$) и в соответствии с вероятностной мерой некоторую оценку риска.

Если оценка риска присутствует в ограничениях, то область гомеостазиса представляет собой множество состояний системы, для которых возможные потери не превосходят в среднем некоторого заданного значения или вероятность того, что возможные потери превосходят заданное значение, меньше заданной малой величины. Множество D_u в этом случае представляет собой множество таких управлений из U, для которых мера риска не превосходят некоторого значения (в данном случае устойчивость системы понимается в вероятностном смысле). Если в задаче не накладываются ограничения на значения риска, то оценка риска понимается как мера устойчивости системы с «размытой» областью гомеостазиса. Принцип оптимальности Ψ предполагает оптимизацию различных сверток оценок эффективности и риска на множестве допустимых управлений, т.е. отображает оценки эффективности и риска во множество точек экстремума конкретной свертки.

Рассмотрим задачи управления риском для коррелированных стохастических процессов. Модель $F(\cdot)$ определяет в данном случае ожидаемый результат деятельности системы (математическое ожидание эффективности), модель $G(\cdot)$ - функцию риска, заданную в метрике l_2^2(дисперсия), или l_2(СКО), или как вероятностную функцию (VAR).

Пусть y_i - случайная величина эффективности деятельности i-й подсистемы (неконтролируемые факторы), $\bar{y}_i$ - математическое ожидание эффективности деятельности i-й подсистемы (оценка значений неконтролируемого фактора), $i = 1, \ldots, n$, σ_{ij} - ковариация результатов деятельности i-й и j-й подсистем, $x=(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ - управление в системе (например, x_i - доля средств, вкладываемая в развитие i-й подсистемы; в соответствии с ранее сделанным замечанием здесь и далее в статических задачах управление обозначено x). Если использовать свертку типа отношения оценки системного риска как СКО эффективности системы в целом и оценки эффективности как математического ожидания, то задачу управления риском всей системы можно представить в виде

$$(5)\quad \min_{x\in X}\frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i x_i},$$

где $X=\{x \mid x_i \geq 0, i=1,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}$.

Теорема 1. В задаче (5) свертка критериев эффективности и риска достигает минимума на заданном множестве X в точке $x=(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$ такой, что $x_i^0=\frac{\xi_i^0}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^0}$, $i = 1, \ldots, n$, а

$\xi^0=(\xi_1^{\ 0}, \ldots, \xi_n^{\ 0})$ является решением задачи квадратичного программирования:

(6) $$\min_{\xi}\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\xi_i\xi_j \mid \xi_i \geq 0, i=1,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\xi_i = 1\}.$$

Доказательство. Введем обозначение $z=(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i x_i)^{-1}$. Тогда задача (5) примет вид

$$\min_{x,z}\{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}(zx_i)(zx_j))^{1/2} \mid \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i(zx_i)=1, \sum_{i=1}^{n}x_i=1, x_i \geq 0, i=1,\ldots,n\}.$$

Далее, приняв $\xi_i=zx_i$ и введя коэффициент 0,5 в критерии, получаем задачу квадратичного программирования (6). Пусть $\xi^0=(\xi_1^{\ 0}, \ldots, \xi_n^{\ 0})$ - решение задачи (6), тогда $x_i^0=\dfrac{\xi_i^0}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^0}$, $i=1, \ldots, n$, - компоненты решения задачи (5). Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия экстремума для ненулевых ξ_i, $i=1, \ldots, n$, сводятся к системе линейных алгебраических уравнений:

(7) $$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\xi_j - \lambda\bar{y}_i = 0, i=1,\ldots,n, \quad \sum_{j=1}^{n}\bar{y}\xi_i = 1.$$

Если часть переменных принимает нулевое значение, то система (7) становится меньшего порядка.

Для коррелированных стохастических процессов предлагается рассматривать следующие вероятностные функции риска: $R_{probp}(x)=P(r(x)<r_p)$, $R_{probd}(x)=P(r(x)<d(x))$, $R_{prob\delta}(x)=P(d(x)\text{-}r(x)\geq\delta)$, $\delta>0$, где через $y=r(x)$ обозначена функция, определяющая случайное значение эффективности системы при управлении x как результат внешних воздействий, а через $\bar{y}=d(x)$ – функция, определяющая ожидаемое значение эффективности. Если в качестве оценки системного риска использовать функцию риска, представляющую собой вероятность того, что случайное значение эффективности системы $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ меньше требуемого (планового) значения r_p, а область значений оператора Ψ - множество точек экстремума этой функции, то задача управления риском имеет вид

(8) $$\min_x \{P(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i < r_p) \mid x_i \geq 0, i = 1,\dots,n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Для задачи (8) справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\{y_i\}$- система нормально распределенных случайных величин с математическими ожиданиями $\bar{y}_i$ и ковариационной матрицей $[\sigma_{ij}]$. Тогда в задаче (8) критерий эффективности достигает минимума на заданном множестве X в точке $x=(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$ такой, что $x_i^0 = \dfrac{\hat{\xi}_i^0}{\sum_{i=1}^{n} \hat{\xi}_i^0}$, $i = 1, \dots, n$, а $\hat{\xi}^0 = (\hat{\xi}_1^0, \dots, \hat{\xi}_n^0)$ является решением задачи квадратичного программирования:

(9) $$\min_{\hat{\xi}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \hat{\xi}_i \hat{\xi}_j \mid \hat{\xi}_i \geq 0, i = 1,\dots,n, \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i \hat{\xi}_i - r_p \sum_{i=1}^{n} \hat{\xi}_i = 1\}.$$

Доказательство. Случайная величина $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ нормально распределена, т.е. $P(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i < r_p) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_p} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$, где $a = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i$ - математическое ожидание, $\sigma = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j)^{1/2}$ - СКО случайной величины $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$. Для вычисления величины $P(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i < r_p)$ воспользуемся функцией Лапласа

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\zeta} e^{\frac{-t^2}{2}}dt:$$

$$P(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i < r_p)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{r_p} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{r_p-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}dz,$$ где

$z=\dfrac{t-a}{\sigma}$ или $t=a+\sigma z$. Далее имеем $P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_p)=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{r_p-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}+\Phi(0)-\Phi(\frac{a-r_p}{\sigma})=$$

$\dfrac{1}{2}-\Phi(\dfrac{a-r_p}{\sigma})$. Тогда задача, эквивалентная (8) имеет вид

(10) $$\frac{\sigma}{a-r_p}\to\min.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

(11) $$\min_{x\in X}\frac{(\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i x_i - r_p},$$

где $X=\{x\,|\sum_{i=1}^{n}x_i=1, x_i\geq 0, i=1,\ldots,n\}$.

Далее задача (10) сводится к задаче квадратичного программирования и, в конечном счете, к системе линейных алгебраических уравнений. Действительно, введем обозначение $\hat{z}=(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i x_i - r_p)^{-1}$. Тогда задача (11) примет вид

$$\min_{x,\hat{z}}\{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(\hat{z}x_i)(\hat{z}x_j))^{1/2}\,|\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i(\hat{z}x_i)-\hat{z}r_p=1,\sum_{i=1}^{n}x_i=1, x_i\geq 0, i=1,\ldots,n\}.$$

Приняв $\hat{\xi}_i = \hat{z}x_i$, имеем $\sum_{i=1}^{n} \hat{\xi}_i = \hat{z}$ и получаем задачу (9). Пусть $\hat{\xi}^0 = (\hat{\xi}_1^0, ..., \hat{\xi}_n^0)$ - решение задачи (9), тогда $x_i^0 = \frac{\hat{\xi}_i^0}{\sum_{i=1}^{n} \hat{\xi}_i^0}$, i = 1, …, n, - компоненты решения задачи (8). Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия экстремума для ненулевых $\hat{\xi}_i$, i = 1, …, n, приводят к системе линейных алгебраических уравнений, аналогичной системе (7).

В отличие от традиционных задач с использованием VAR, заключающихся в нахождении такого значения случайной величины, которое обеспечивается с заданной вероятностью, в задаче (8) минимизируется вероятность того, что случайная величина будет меньше требуемого значения (гомеостазис в вероятностном смысле).

3. Задачи управления риском в иерархических системах

Рассмотрим системы, функционирующие в условиях внутрисистемной неопределенности, связанной с различной информированностью подсистем в условиях децентрализованного управления. Принцип оптимальности управления Ψ в иерархической системе объединяет стремление к увеличению значения критерия эффективности центра и к достижению устойчивости (или гомеостазиса) функционирования системы, которая описывается совместными ограничениями на параметры подсистем. Основным условием устойчивости и эффективности функционирования в иерархической системе является согласованность интересов всех ее элементов. Интересы элементов согласуемы, если центр может обеспечить устойчивое функционирование системы. Если при этом центр может достичь абсолютного максимума своего критерия эффективности, то интересы элементов системы идеально согласуемы. Таким образом, риск здесь связан не только со случайным воздействием внешней среды, но и что специфично с возможными нескоординированными действиями подсистем, приводящими к нарушению гомеостазиса системы. Информационные аспекты здесь включают вопросы взаимной информированности центра и подсистем, схемы передачи информации, виды и способы описания внешних факторов. Близкие вопросы в рамках теории организационных систем отражены в работах [1, 5].

Обозначим управление верхнего уровня (центра) через u, считая его точкой некоторого пространства U. Управления элементов нижнего уровня (подсистем) обозначим v_i, $i = 1, \ldots, n$, а управление нижнего уровня в целом через $v=(v_1, \ldots, v_n)$, также считая его точкой некоторого пространства V. Пространства управлений подсистем $V_i(u)$ зависят от управления центра, т.е. центр имеет возможность в определенных пределах регламентировать свободу их действий. При выборе центром управления и передаче некоторой фиксированной информации об этом выборе множество возможных управлений нижнего уровня есть $R(u)\subseteq V$, т.е. v является для центра неопределенным неконтролируемым фактором с областью значений $R(u)$. Если фазовое состояние системы x однозначно определяется управлениями u,v, т.е. $x=f(u,v)$, то условие устойчивости системы $x\in X$, где X - область гомеостазиса системы, может быть представлена в виде

(12) $(u, v) \in \Gamma$,

где множество $\Gamma\subseteq U\times V$ представляет собой совокупность управлений, приводящих к устойчивым состояниям (в случае неоднозначности состояний системы множество Γ определяется условиями включения или пересечения множества достижимости с областью гомеостазиса). Множество допустимых управлений центра, гарантирующих выполнение условия устойчивости (12) (сильная устойчивость), есть

(13) $D_{сн} = \{u \in U \mid (u, v) \in \Gamma \quad \forall v \in R(u)\}$,

а множество управлений, возможно обеспечивающих (вообще говоря, при некоторых дополнительных предположениях относительно стремления подсистем к достижению гомеостазиса) условие устойчивости (слабая устойчивость) есть

(14) $D_{сл} = \{u \in U \mid (u, v) \in \Gamma \quad \exists v \in R(u)\}$.

В качестве оценки эффективности системы принимается нижняя грань функционала центра $F(u,v)$: $\inf\limits_{v \in R(u)} F(u,v)$. Это гарантированное значение эффективности зависит от реакции подсистем на управление центра, определяемой центром на основе исходной информации. Отношение центра к риску (выход модели $G(\cdot)$) заключается в определении множества допустимых управлений, обеспечивающих гомеостазис системы, и оценки разброса значений эффективности в результате самостоятельных действий подсистем и, возможно, воздействия внешних факторов. В качестве такой оценки будем использовать разность между глобальным максимумом критерия эффективности центра $F^0_{гл}$ при централизованной схеме управления и гарантированным его значением в данной иерархической структуре $F^0_{гл} - \inf\limits_{v \in R(u)} F(u,v)$.

Предположим , что подсистемы независимы, т.е. их целевые функционалы зависят только от управлений центра и данной подсистемы: $G_i(u,v_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Будем считать, что подсистема при выборе управления стремится максимизировать $G_i(u,v_i)$. Тогда оптимальная стратегия i-й подсистемы $v_i^0(u)$ определяется из условия

(15) $G_i(u, v_i^0(u)) = \max\limits_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$.

При этом реакция i-й подсистемы есть $R_i(u) = Arg \max\limits_{v_i \in V_i(u)} G_i(u, v_i)$. Множество возможных управлений нижнего уровня имеет вид $R(u) = \prod\limits_{i=1}^{n} R_i(u)$. При гарантированном подходе к оценке эффективности и риска выбор управления должен осуществляется из множества (13), а задача нахождения оптимального управления u^0 и результата F^0 центра имеет вид

(16) $F^0 = \max_{u \in D_{сн}} \inf_{v \in R(u)} F(u,v)$.

Оператор Ψ здесь есть отображение оценки эффективности $\inf_{v \in R(u)} F(u,v)$ и множества $D_{сн}$ во множество решений максиминной задачи (16). Если максимум в задаче (16) определяется однозначно или центру известен выбор нижнего уровня, т.е. имеет место $R_i(u) = arg \max_{v_i \in V_i(u)} G_i(u,v_i)$, то

(17) $F^0 = \max_{u \in D_{сн}} F(u, v^0(u))$.

Минимальный риск от самостоятельных действий подсистем (неконтролируемых факторов) равен $F^0{}_{гл} - F^0$ (цена децентрализации). Далее для модели регулируемого равновесия предлагается механизм управления, обеспечивающих идеальную согласованность интересов, при которой цена децентрализации равна нулю.

Под управлением центра можно понимать передачу информации, которую подсистемы самостоятельно добывать не могут, о прогнозируемых значениях факторов, влияющих на функционирование всей системы и ее подсистем. Если управление центра сводится только к передаче информации нижнему уровню о значениях некоторых параметров, то такое управление называется информационным регулированием. Двухуровневую иерархическую систему, в которой управление центра представляет собой информационное регулирование и после сообщения центра нижний уровень достигает ситуации равновесия, называют моделью регулируемого равновесия. В такой модели задача центра состоит в переводе системы в наиболее эффективную для него ситуацию равновесия, определяемую информированностью подсистем. Рассмотрим модель территориальной корпорации с горизонтальными связями на нижнем уровне.

Пусть система погружена во внешнюю среду, состояние которой характеризуется параметрами K и ξ. Для нижнего уровня

K является неопределенным неконтролируемым фактором. Величину ξ будем считать случайным неконтролируемым фактором, принимающим конечное число значений. Центр имеет возможность точно определять K и вероятности появления тех или иных значений ξ (например, ущерба от техногенных катастроф). Регулирующее воздействие (управление) центра состоит в передаче на нижний уровень информации о значении K и векторе вероятностей случайной величины ξ: $\overline{p}=(p_1,...,p_n)$, где p_i - вектор вероятностей, сообщаемый i-й подсистеме. Будем выделять такие векторы вероятностей, что $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$, и называть их однородными. Определено шесть типов передачи информации, носящих как случайный, так и неопределенный характер, $K=\hat{K}$ - действительное значение K, $p=\hat{p}$ - действительные однородные векторы вероятностей случайных событий.

Рассмотрим вопрос существования ситуаций регулируемого равновесия и оптимальных стратегий информационного регулирования центра с критериями эффективности нижнего уровня

$$W_j(x_1,...,x_n,K,p_i)=$$

$$=\begin{cases} c_j b_j x_j^r - w x_j^{2r} - R(K,p_i)\dfrac{\alpha_j b_j x_j^r}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j b_j x_j^r}, x_j>0,\ j=1,...,n, \\ 0, \quad x_j=0,\ j=1,...,n, \end{cases} \tag{18}$$

где x_i - объем некоторого фактора производства, используемого i-м предприятием, связанного с отравляющим воздействием на окружающую среду, i=1,…,n, $f_i(x_i)=b_i x_i^r$, $0<r\leq 1$ - производственная функция, $wg_i(x_i)x_i$ - функция затрат для каждого предприятия, w - «базовая» цена единицы фактора, $g_i(x_i)=x_i^{2r-1}$ - функция, корректирующая стоимость единицы фактора (предполагается, что стоимость единицы фактора может устанавливаться в зависимости от объема затрачиваемого ресурса). Если c_i - стоимость единицы продукции предприятия, то

$c_i f_i(x_i) - wg_i(x_i)x_i$ - прибыль i -го предприятия в результате его производственной деятельности, $R(K,p_i)\alpha_j b_j x_j^r (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j x_j^r)^{-1}$ - размер компенсации для i-го предприятия, пропорциональный величине ущерба $R(K,p_i)$, α_i - непосредственный ущерб в виде загрязнения территории.

Условия существования точки равновесия для функций (18) сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3. При выполнении условий

(19) $$R(K,p_i)\alpha_j b_j - c_j b_j A < 0,\ R(K,p_i)(\alpha_j b_j)^2 - wA^2 < 0,$$

j=1,…,n, существует единственная точка равновесия для набора функций $W_j(x_1,...,x_n,K,p_i)$, j=1,…,n, в неотрицательном ортанте x_j>0, j=1,…,n, которая при фиксированных K, p_i и 0<r≤1 определяется по формулам

(20) $$x_j^0(K,p_i) = \left(\frac{R(K,p_i)\alpha_j b_j A - c_j b_j A^2}{R(K,p_i)(\alpha_j b_j)^2 - 2wA^2} \right)^{\frac{1}{r}},\ j = 1,...,n,$$

где A является решением уравнения

(21) $$\sum_{j=1}^{n} (R(K,p_i) - \frac{c_j}{\alpha_j} A)(R(K,p_i) - \frac{2w}{(\alpha_j b_j)^2} A^2)^{-1} = 1.$$

Доказательство теоремы 3 приведено в [4].

Интересы центра описываются в виде функции

(22) $$F_0(x_1,...,x_n,K,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i F_i(x_1,...,x_n,K,\xi),$$

где β_i>0, i=1,…,n, (их можно интерпретировать как проценты налоговых отчислений с прибыли).

Рассмотрен вопрос, какая стратегия центра является оптимальной, если центр использует однородные векторы вероятностей и неоднородные векторы вероятностей.

Теорема 4. Оптимальная стратегия центра (K^0,p^0) существует и является решением уравнения

$$(23)\qquad \sum_{j=1}^{n}(R(K^0,p^0)-\frac{c_j}{\alpha_j}A^0)(R(K^0,p^0)-\frac{2w}{(\alpha_j b_j)^2}A^{0^2})^{-1}=1,$$

где $(A^0, z_1^0, \ldots, z_n^0) > 0$ определяется из условий

$$(24)\qquad \begin{gathered} \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i c_i z_i^0}{\alpha_i}-2A^0\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i w z_i^{0^2}}{(\alpha_i b_i)^2}=0, \\ A^0\frac{\beta_i c_i}{\alpha_i}-2A^{0^2}\frac{\beta_i w z_i^0}{(\alpha_i b_i)^2}=R(\hat{K},\hat{p})\beta_i+\lambda,\ i=1,\ldots,n,\quad \sum_{i=1}^{n}z_i^0=1. \end{gathered}$$

Теорема 5. Оптимальная для центра ситуация неоднородного равновесия при любых положительных коэффициентах $\beta_1,\ldots,\beta_n$ является паретовской точкой для нижнего уровня и глобальным максимумом для центра, т.е. данный механизм управления исключает риск, связанный с децентрализацией управления.

Доказательства теорем 4 и 5 приведены в [4].

Таким образом, предложенные механизмы информационного регулирования позволяют согласовывать интересы в иерархических системах. При этом разная информированность подсистем приводит не просто к снижению риска, а к его нейтрализации (цена децентрализации равна нулю).

Литература

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Как управлять организациями*. М.: Синтег, 2004. 400 с.
2. ГОРЕЛИК В.А., ЗОЛОТОВА Т.В. *Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах*. Научное издание. – М.: ВЦ РАН, 2009. – 162 с.
3. ГОРЕЛИК В.А., ЗОЛОТОВА Т.В. *Модели оценки коллективного и системного риска.* Научное издание. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 163 с.
4. ЗОЛОТОВА Т.В. *Механизм информационного регулирования в иерархической модели управления корпорацией* // Сис-

темы управления и информационные технологии, 2010. – №1. – С. 58-63.
5. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. М.: Физматлит, 2007. – 583 с.

THE GENERAL APPROACH TO MODELLING PROCEDURES OF MANAGEMENT BY RISK AND ITS APPLICATION TO STOCHASTIC AND HIERARCHICAL SYSTEMS

Viktor Gorelik, Computer Center of the name A.A.Dorodnitsyn of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Doctor of Science, professor (gorelik@ccas.ru)
Tatiana Zolotova, State University of the Ministry of Finance of the Russian Federation, Moscow, Doctor of Science, assistant professor (tgold11@mail.ru)

Abstract: Article is devoted to the description of the general model of management by the risk, including two submodel: model of an estimation of a system effectiveness and model of an estimation of risk of its functioning.. Problems of management by stochastic systems, and also the complex systems having hierarchical structure, functioning in conditions of intrasystem uncertainty are considered. Methods of the decision of these problems of the management, allowing to find optimum strategy of management from the point of view of efficiency and are offered to stability.

Keywords: uncontrollable factors, minimization of risk, casual processes, function of risk, hierarchy, the price of decentralization.