

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КАК НЕМАНИПУЛИРУЕМОГО МЕХАНИЗМА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

Коргин Н.А.¹

(Институт проблем управления РАН, Москва)

nkorgin@ipu.ru

Доказывается, что любой механизм последовательного распределения ресурса, который является неманипулируемым для множества однопиковых функций предпочтений агентов, может быть представлен как неманипулируемый механизм активной экспертизы для множества многомерных функций предпочтений агентов с одним плато – т.е. обобщенной медианной схемы и правила устранения многозначности.

Ключевые слова: неманипулируемые механизмы планирования, механизм последовательного распределения ресурсов, механизм многокритериальной активной экспертизы, обобщенные медианные схемы.

1. Введение

Неманипулируемость механизма планирования (т.е. механизма принятия решений центром на основе информации, поступающей от подчиненных - агентов) – это свойство, гарантирующее, что каждому агенту нет смысла искажать передаваемую центру информацию. В работах [2,8,12] задача

¹ Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 09-07-00093-а

построения неманипулируемых механизмов распределения ресурсов решается для случая, когда каждый агент заинтересован только в том количестве ресурсов, которые получает он. В работах [3,5] задача распределения ресурсов была сформулирована как задача многокритериальной активной экспертизы, в которой число направлений, по которым распределяется ресурс, отличается от числа агентов, для каждого из которых существенным является распределение ресурса по всем направлениям. В рамках данной работе устанавливается эквивалентность между этими двумя классами задач, которая до этого момента была доказана только для случая двух агентов [8].

2. Основные определения и предварительные результаты

2.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Формально, задача распределения ресурсов записывается следующим образом. *Организационная система* состоит из одного *центра* и множества $N = \{1, \dots, n\}$ *агентов*. У центра имеются ресурсы в ограниченном количестве - $R \in \mathbb{R}_+^1$, которые должны быть распределены между агентами. *Предпочтения* каждого агента $i \in N$ относительно количества выделяемого ему ресурсов $x_i \in [0, R]$ определяются однопиковой функцией $u_i : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$:

1. Существует единственная точка пика $\tau_i = \arg \max_{x \in \mathbb{R}_+^1} u_i(x) \quad \forall i \in N$;
2. $\forall z, z' \in \mathbb{R}^1$, если $\tau_i > z > z'$, то $u(z) \geq u(z')$, если $z > z' > \tau_i$, то $u(z) \leq u(z')$.

В случае, когда $\sum_{i \in N} \tau_i > R$, имеет место *дефицит ресурсов*.

Считается, что значения точек пика не известны центру, но являются общим знанием для агентов.

Для распределения ресурсов центр использует механизм планирования $x = \pi(s)$, определяя итоговое распределение ресурсов $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \geq 0$, $\sum_{i \in N} x_i \in [0, R]$ на основании

сообщений (*заявок*) агентов $s = \{s_1, \dots, s_n\}$, $s_i \in S_i$, $i \in N$, где S_i - множество допустимых заявок i -го агента. Если в качестве сообщения агента просят сообщить значение своей точки пика, то такой механизм является *прямым* [6].

Т.к. выделяемые каждому агенту центром ресурсы зависят от заявок всех агентов (которые они сообщают одновременно), то между агентами возникает *игра в нормальной форме*:

$$\Gamma_0 = (N, \{u_i(\pi_i(s))\}_{i \in N}, \{S_i\}_{i \in N}),$$

где $\pi_i(s)$ - количество ресурсов, выделяемое в соответствии с механизмом $\pi(s)$ агенту $i \in N$.

Если для механизма планирования $\pi(s)$ можно для каждого возможного вектора точек пика агентов $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ определить *равновесные по Нэшу* заявки¹ - $s_\pi^*(\tau)$, то для него можно предъявить *соответствующий* прямой механизм $h(\tau)$: $x_i = h_i(\tau) = \pi_i(s_\pi^*(\tau))$.

Прямой механизм планирования $h(\tau)$ называется *неманипулируемым*, если доминантной стратегией каждого агента является сообщение своей истинной точки пика:

¹ Следует отметить, что равновесия может не быть вообще, или их может быть несколько. Если равновесий несколько, то необходимо ввести правило отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбрать единственное.

$$\tau_i \in \underset{s_i}{\operatorname{Argmax}} u_i(h_i(s_i, s_{-i})) \quad \forall s_{-i}, \quad \forall i \in N,$$

где s_{-i} обозначает сообщения всех агентов, кроме i -го.

Механизмы $\pi(s)$ и $\varphi(s)$ считаются *эквивалентными*, если при заданном количестве ресурсов R для любого вектора точек пика агентов эти механизмы в равновесии дают одинаковое распределение ресурсов - $\pi(s_{\pi}^*(\tau)) = \varphi(s_{\varphi}^*(\tau))$. Соответствующий $\pi(s)$ прямой механизм $h(\tau)$ является эквивалентным $\pi(s)$, если он неманипулируем.

Механизм распределения ресурсов является *анонимным*, если он симметричен относительно перестановок агентов – итоговое распределение ресурсов зависит только от заявок агентов.

В работах [2,8,11] было показано, что любой неманипулируемый, эффективный по Парето и *монотонный в группах*¹ механизм распределения ресурсов – это *механизм последовательного распределения ресурсов* (МПРР). Эффективность по Парето подразумевает, что при наличии дефицита ресурсов весь имеющийся в наличии ресурс должен быть распределен полностью между агентами.

В [5] получена его аналитическая запись для МПРР, эквивалентных механизмам *прямых* или *обратных приоритетов* [1,6]:

$$(1) \quad x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N: i \in S} d_i(S)R(S)\}, \quad i \in N,$$

¹ Если количество ресурсов, распределяемое между группой агентов, увеличилось, то каждый из агентов этой группы получит не меньшее количество ресурсов, чем раньше.

где $R(S) = R - \sum_{j \in N \setminus S} \tau_j$, а функции $d_i(\bullet) : 2^N \setminus \emptyset \rightarrow [0, 1]$

определяют «вес» агента $i \in S$ в группе $S \subseteq N$ причем $\forall S, V \in 2^N \setminus \emptyset$:

1. $\sum_{i \in S} d_i(S) = 1$;

2. если $S \subset V$ то $d_i(S) \geq d_i(V)$.

В [1, 12] было показано, что существует единственный анонимный МПРР, аналитическая запись которого имеет следующий вид [4]:

$$(2) \ x_i = \min \left\{ \tau_i, \frac{R - \sum_{j < i} x_j}{n - (i - 1)} \right\}, \ i \in N.$$

2.2 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

Задача многокритериального коллективного выбора (частным случаем которой является задача активной экспертизы) формулируется следующим образом. Задано множество координат $M = \{1, \dots, m\}$, $m \geq 2$. $Z \subset \mathbb{R}^m$ - множество допустимых альтернатив (результатов выбора), являющееся полноразмерным компактом. Обозначив проекцию Z на произвольную координату $k \in M$ как Z_k , определим понятие минимального блока для Z :

$$\hat{B}(Z) = \prod_{k \in M} [\min Z_k, \max Z_k].$$

Альтернативы из $\hat{B}(Z) \setminus Z$ являются *недопустимыми*.

Предпочтения агентов определяются *многомерно-однопиковой функцией* $u_i: Z \rightarrow \mathbb{R}^1$:

1. Существует *единственная точка* $\tau_i = \arg \max_{x \in Z} u_i(x)$, $\tau_i \in Z \quad \forall i \in N$;
2. $\forall z, z' \in \mathbb{R}^m$,
 $[z' \in \hat{B}(\{z, \tau_i\}) \text{ and } z \neq z'] \Rightarrow [u^i(z') > u^i(z)]$.

Обозначим класс допустимых предпочтений агентов U . Тогда функция *коллективного выбора* $F: U^n \rightarrow Z$ определяет выбор единственной альтернативы на основе информации о предпочтениях агентов. Функция коллективного выбора является *наманипулируемой*, если доминантной стратегией каждого агента будет достоверное сообщение своих предпочтений. В механизмах активной экспертизы применяются функции коллективного выбора, в которых агенты сообщают Центру лишь одну альтернативу – которую они хотят видеть в качестве результата выбора.

Доказано [7], что для описанной модели функция коллективного выбора *неманипулируема* тогда и только тогда, когда она является *обобщенной медианной схемой* обладаю *свойством пересечения*.

Обобщенная медианная схема записывается следующим образом. Для каждой координаты $k \in M$ на $Z_k \equiv [a_k, b_k]$ определим *систему правых коалиций* $\mathfrak{R}_k$, которая ставит в соответствие любому $z_k \in Z_k$ некоторые множества группы агентов $\mathfrak{R}_k(z_k)$ такие, что:

- 1) $\forall z_k \in (a_k, b_k]$, $\mathfrak{R}_k(z_k) \neq \emptyset$, $\emptyset \not\subset \mathfrak{R}_k(z_k)$ и $\mathfrak{R}_k(a_k) = 2^N \setminus \emptyset$;
- 2) если $W \in \mathfrak{R}_k(z_k)$ и $W \subset W' \Rightarrow W' \in \mathfrak{R}_k(z_k)$.
- 3) Если $z'_k < z_k$ и $W \in \mathfrak{R}_k(z_k)$ $\mathbf{P}$ $W \in \mathfrak{R}_k(z'_k)$.

4) $\forall W \subseteq N, \forall z_k \in Z_k$ и любой последовательности $\{z_k^t\} \subset Z_k$ такой что $\lim_{t \rightarrow \infty} z_k^t = z_k$ верно
 $[\forall t, W \in \mathfrak{R}_k(z_k^t)] \Rightarrow [W \in \mathfrak{R}_k(z_k)]$.

Семейство $\mathfrak{R}$ систем правых коалиций для $\hat{B}(Z)$ - это набор $\{\hat{A}_k\}_{k=1}^m$ где $\hat{A}_k$ - система правых коалиций для Z_k . Для каждой координаты $k \in M$, обозначим $\tau^k = (\tau_1^k, \dots, \tau_n^k)$ вектор проекций точек пиков агентов на нее. Тогда любая обобщенная медианная схема – это функция $F : Z^n \rightarrow \hat{B}(Z)$, определяемая следующим образом: $\forall u \in U^n, \forall k \in M$

$$F_k(\tau) = \max\{z_k \in Z_k \mid \{i \in N \mid \tau_i^k \geq z_k\} \in \mathfrak{R}_k(z_k)\}.$$

Важным свойством обобщенных медианных схем является то, что результат выбора зависит только от значений точек пика агентов, а не от функций предпочтений в целом.

Свойство пересечения гарантирует, что для любых возможных предпочтений агентов результат выбора будет принадлежать Z - т.е. $F : Z^n \rightarrow Z$. Подробно о проблеме реализуемости и свойстве пересечения см. [4, 7], т.к. в рамках данной статьи оно применяться не будет.

В работе [11] было доказано, что, если размерность пространства множества выбора больше 2 то не существует оптимальных по Парето неманипулируемых механизмов коллективного выбора.

Рассмотренная в предыдущем разделе задача распределения ресурсов может быть представлена как частный случай задачи многокритериальной активной экспертизы ($n = m$), в которой центру необходимо определить значение некоторого параметра из множества его допустимых значений:

$$Z = \{x \in Z \subset \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n x_j \leq R\}.$$

В работе [3] задача распределения ресурсов рассматривалась как задача многокритериальной активной экспертизы и было показано, что при $n \geq 3$ не существует обобщенных медианных схем, обеспечивающих распределение всего ресурса целиком, т.е. с множеством допустимых значений

результатов выбора $\tilde{Z} = \{x \in \tilde{Z} \subset \mathfrak{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = R\}$. При этом

предполагалось, что предпочтения агентов – многомерно-однопиковые, т.е. каждому, агенту важно не только, сколько ресурсов получает лично он, но и остальные агенты.

Для одномерной задачи коллективного выбора в работе [9] было показано, что если предпочтения агентов вместо точки пика содержат *плато* – выпуклое множество наилучших альтернатив, то любой неманипулируемый механизм так же является обобщенной медианной схемой, дополненной *неманипулируемым правилом устранения многозначности*. Функции предпочтений агентов $v_i: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ с одним плато удовлетворяют следующим требованиям:

1. $[\underline{t}_i; \bar{t}_i] = \underset{x \in \mathbb{R}^1}{\text{Arg max}} v_i(x) \quad \forall i \in N$;
2. $\forall z, z' \in \mathbb{R}^1$, если $\underline{t}_i > z > z'$, то $v(z) \geq v(z')$, если $z > z' > \bar{t}_i$, то $v(z) \leq v(z')$.

Если обозначить множество всех функций предпочтений с плато как Π , то компонента правила устранения многозначности для агента $i \in N$ - это функция $t_i: \Pi^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, такая, что

1. $\forall v \in \Pi^n \quad t_i(v) \in [\underline{t}_i; \bar{t}_i]$;

$$2. \forall \tilde{v} \in \Pi^n \text{ если } \forall j \in N \operatorname{Arg} \max_{x \in \mathbb{R}^1} v_j(x) = \operatorname{Arg} \max_{x \in \mathbb{R}^1} \tilde{v}_j(x),$$

$$\text{то } t_i(v) = t_i(\tilde{v}).$$

Неманипулируемость правила устранения многозначности означает, что $\forall i \in N \quad \forall v \in \Pi^n, \quad \forall j \in N \setminus \{i\} \text{ и } \forall \tilde{v}_j \in \Pi$
 $v_j(t_i(v)) \geq v_j(t_i(\tilde{v}_j, v_{-j})).$

Обобщенная медианная схема, дополненная правилом выбора (для одномерного случая) это любая обобщенная медианная схема в которую в качестве заявок агентов подставляются значения их компонентов правила устранения многозначности,

$$F(t(v)) = \max\{z \in Z \mid \{i \in N \mid t_i(v) \geq z\} \in \mathfrak{R}(z)\}.$$

Расширение данного результата на многомерный случай позволит установить, является ли МПРР частным случаем ОМС или нет.

3. Представление механизма последовательного распределения ресурса в виде обобщенной медианной схемы с правилом выбора точек пика

Для решения поставленной задачи предлагается следующая последовательность действий. Опираясь на результат [5], покажем, что любой МПРР представим в виде минимаксной схемы.

Затем покажем, что для любой полученной минимаксной схемы существует эквивалентная ОМС, дополненная многомерными правилами устранения многозначности. И докажем, что полученный механизм многокритериального выбора будет неманипулируемым.

3.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КАК МИНИМАКСНОЙ СХЕМЫ

Результаты, полученные в [5] для МПРР, эквивалентных приоритетным механизмам, могут быть обобщены на все МПРР.

Теорема 1. *Любой механизм последовательного распределения ресурсов представим в виде:*

$$(3) \quad x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N: i \in S} q_i(S, R(S))\}, \quad i \in N,$$

где функции $q_i(\cdot): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$ определяют, как ресурс $R(S) = R - \sum_{j \in N \setminus S} \tau_j$ может быть распределен между

агентами в группе $S \subseteq N$ и $\forall S, V \in 2^N \setminus \emptyset, \forall i \in S, \forall z \in [0, R]:$

$$1. \sum_{i \in S} q_i(S, z) = z;$$

$$2. \frac{\partial q_i(S, z)}{\partial z} \geq 0;$$

$$3. \text{ если } S \subset V \text{ то } q_i(S, z - Q_{V \setminus S}(V, z)) = q_i(V, z),$$

$$\text{где } Q_S(V, z) = \sum_{j \in S} q_j(V, z).$$

Доказательство теоремы 1 и других утверждений вынесено в приложение к статье.

Т.е. МПРР записываются в форме, аналогичной форме записи ОМС, что позволит доказать возможность представления произвольного МПРР в виде ОМС. Но аналитическая запись МПРР ценна сама по себе, вне контекста данной статьи, т.к. позволяет анализировать эффективность МПРР по различным критериям и другие их свойства (например, эквивалентность различных МПРР, как в [5]).

Выражение (3) позволяет записать в аналитической форме МПРР, для которых не существует приоритетного механизма распределения ресурсов, которому данный МПРР эквивалентен. Приведем пример подобного механизма.

Пример 1. R единиц ресурса делится между тремя агентами. Заявка первого агента всегда удовлетворяется полностью. Если оставшийся для второго и третьего агента ресурс

$z_{23} \geq 2R/3$, то второй агент получает не более $x_2 = R/3 + 1/5(z_{23} - 2R/3)$, а третий - $x_3 = R/3 + 4/5(z_{23} - 2R/3)$. В случае $z_{23} < 2R/3$ $x_2 = z_{23}/2$ и $x_3 = z_{23}/2$. Для данного МПРР функции $q_i(\cdot): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$, $i \in N$, описывающие его будут иметь следующий вид:

$$q_1(S \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1\}\}, z) = z;$$

$$q_2(S \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, z\} = 0;$$

$$q_2(S = \{2, 3\}, z) = \begin{cases} z/2, & z < 2R/3; \\ R/3 + 1/5(z - 2R/3), & z \geq 2R/3; \end{cases}$$

$$q_2(S = \{2\}, z) = z;$$

$$q_3(S \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, z\} = 0;$$

$$q_3(S = \{2, 3\}, z) = \begin{cases} z/2, & z < 2R/3; \\ R/3 + 4/5(z - 2R/3), & z \geq 2R/3; \end{cases}$$

$$q_3(S = \{3\}, z) = z. \blacksquare$$

3.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КАК ОБОБЩЕННОЙ МЕДИАННОЙ СХЕМЫ ДОПОЛНЕННОЙ ПРАВИЛОМ УСТРАНЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОСТИ

Покажем, что МПРР может быть представлен как ОМС, дополненная некоторым правилом устранения многозначности. Рассмотрим базовую постановку задачи распределения ресурсов из раздела 1.1. Для нее верно следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть МПРР $\pi(\tau)$ описывается набором функций $q_i(\cdot): 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$, $i \in N$. Определим ОМС дополненную правилом устранения многозначности $F(\tau)$:

$$x_i = \max\{z \in [0, R] \mid \{j \in N \mid s_j^i \geq z\} \in \mathfrak{R}_i(z)\}, \quad i \in N,$$

где

$$(4) \mathfrak{R}_i(z) = \{S \cup \{i\} : S \subseteq N \setminus \{i\} \wedge q_i(N \setminus S, R) \geq z\},$$

$$(5) s_j^i = \min\{\tau_j, \max_{S \subseteq N \setminus \{j\} : i \in S} q_i(S, R(S))\}, \quad j \in N \setminus \{i\},$$

$$s_i^i = \tau_i.$$

ОМС, дополненная правилом устранения многозначности, $F(\tau)$ эквивалентна МППР $\pi(\tau)$.

Иными словами, (4) определяет систему коалиций, порождающую одномерную ОМС, с помощью которой определяется количество ресурсов, выделяемое агенту i , а (5) – это правило устранения многозначности: заявка агента j относительно количества ресурсов для остальных агентов определяется на основе того же МППР $\pi(\tau)$ при условии, что самому агенту j выдано запрашиваемое им количество ресурсов τ_j или все R , если $\tau_j > R$.

Покажем, как получаются (4) и (5) для анонимного МППР. В соответствии с (2), при упорядочении агентов по возрастанию сообщенных заявок $q_i = \frac{1}{n - (i - 1)}(R - \sum_{j < i} \tau_j)$. При этом макси-

мум, что может получить агент i - $\bar{x}_i = R / (n + 1 - i)$ (при условии, что все агенты с номерами ничего не попросили себе вообще). Соответственно, система правых коалиций (которая будет одинаковой для всех агентов) записывается следующим образом:

$$\mathfrak{R}(z) = \{S \subseteq N : \#\{j \in N \mid s_j^i \geq z\} > \max(n + 1 - R / z, 0)\},$$

$$\mathfrak{R}(R) = \{N\}.$$

Иными словами, для того, что бы агент i получил ресурс в количестве z , число агентов, которые должны быть согласны с этим должно быть более $n + 1 - R / z$. Т.е., если любому агенту нужно больше чем $R / 2$ ресурсов, то на это должны быть согласны все остальные агенты. А гарантировано каждый может

получить R/n ресурсов, что полностью согласуется с результатами функционирования анонимного МПРР.

Таким образом, ОМС, эквивалентная анонимному МПРР (2) записывается следующим образом:

$$(6) \quad x_i = \max\{z \in [0, R] \mid \#\{j \in N \mid s_j^i \geq z\} > \max(n+1-R/z, 0)\}, \quad i \in N.$$

ОМС для анонимного механизма проинтерпретировать в терминах *фантомных агентов*, первоначально предложенных Муленом [10]. Ресурс, выдаваемый агенту - это медиана в упорядочении заявок самих агентов и фантомных агентов. Количество фантомных агентов - $n-1$. Вектор их заявок - $(\frac{R}{n}, \frac{R}{n-1}, \dots, \frac{R}{2})$.

Правило устранения многозначности будет следующим:

$$(7) \quad s_j^i = \min\{\tau_i, \frac{R - \tau_j - \sum_{k < i_j} s_j^k}{n - i_j}\}, \quad i, j \in N,$$

где i_j - номер агента i в упорядочении агентов из $N \setminus \{j\}$.

Пример 2. 10 единиц ресурса делятся между 5-ю агентами. Вектор сообщений агентов - (1,2,3,4,5). При использовании анонимного МПРР, на первом шаге каждому агенту будет предложено по $10/5=2$ ресурса, соответственно, будут удовлетворены заявки первых двух агентов. На втором шаге оставшийся ресурс $10-3=7$ будет делиться между последними тремя агентами. Каждому будет предложено по $7/3$ ресурса. Это меньше, чем заявка любого из них. Таким образом, итоговое распределение будет (1,2,7/3,7/3,7/3).

ОМС для анонимного механизма будет определяться фантомными агентами с точками пика (2,10/4,10/3,5). Вектора заявок агентов по всем пяти направлениям распределения ресурса в соответствии с правилом устранения многозначности (7) приведены в таблице 1. Номер строки соответствует номеру направления (кому давать), номер столбца - агенту (кто просит).

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	5/3	4/3
3	7/3	7/3	3	5/3	4/3
4	7/3	7/3	2	4	4/3
5	7/3	7/3	2	5/3	5

Таблица 1. Заявки агентов.

В таблице 2 приводится упорядочение заявок агентов и фантомных агентов для каждого из 5 направлений. Медиана каждого упорядочения выделена полужирным.

x_1	1	1	1	1	1	2	10/4	10/3	5
x_2	4/3	5/3	2	2	2	2	10/4	10/3	5
x_3	4/3	5/3	2	7/3	7/3	10/4	3	10/3	5
x_4	4/3	2	2	7/3	7/3	10/4	10/3	4	5
x_5	5/3	2	2	7/3	7/3	10/4	10/3	5	5

Таблица 1. Применение обобщенной медианной схемы.

Таким образом, итоговое распределение ресурса при применении ОМС (6) с правилом устранения многозначности (7) будет также (1,2,7/3,7/3,7/3). ■

3.3. АНАЛИЗ СВОЙСТВ МЕХАНИЗМОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА АГЕНТЫ ЗАИНТЕРЕСОВАНЫ В РЕСУРСАХ ПО НЕСКОЛЬКИМ НАПРАВЛЕНИЯМ

Важным свойством любого МПРР была оптимальность по Парето. В то время как неманипулируемые механизмы многокритериального выбора, при размерности пространства выбора больше 2 этим свойством не обладают, если у всех агентов функции предпочтения зависят от всех координат. В рамках данной статьи не будем проводить полноценного исследования этого вопроса, ограничившись лишь иллюстрацией того, что если у агентов присутствует заинтересованность в том, сколько ресурсов будет выделено более чем на одно направление, и по одному направлению несколько агентов считают оптимальным разное количество ресурсов, то не существует анонимного механизма коллективного выбора, оптимального по Парето. Т.к. анонимный МПРР один, то если показать, что он не применим в описанной постановке задачи, то это будет значить, что для нее нет анонимных, эффективных по Парето и неманипулируемых механизмов распределения ресурсов. Для этого приведем пример, в котором он даст недопустимое распределение ресурсов.

Модифицируем рассмотренный в предыдущем разделе анонимный МПРР следующим образом. Правило устранения многозначности (7) будет применяться только для тех направлений, количество выделяемых на которое ресурсов агенту безразлично.

Пример 3. R ресурсов делится между n направлениями на основе заявок от n агентов с помощью анонимного МПРР (6) с правилом устранения многозначности (7). Агенту 1 существенны два направления – свое и агента 2: $\tau_1^1 = (n-2)R / (n-1)$, $\tau_1^2 = R / (n-1)$. Остальные агенты требуют отдать весь ресурс себе. Очевидно, что в этом случае правило (7) определит, что заявки каждого агента по другим направлениям, будут нулевыми.

Тогда по второму направлению упорядочение точек пиков реальных агентов и фантомных, соответствующих ОМС (6), будет следующим:

$$(0, \dots, 0, \frac{R}{n}, \frac{R}{n-1}, \frac{R}{n-1}, \dots, \frac{R}{2}, R),$$

где 0 сообщают $n-2$ агентов. Медианой этого упорядочения будет $R/(n-1)$. По остальным направлениям, легко убедиться что медианой будет R/n

Таким образом, механизм (6) с правилом устранения многозначности (7) даст недопустимое распределение ресурсов, т.к.

$$\sum_{i \in N} x_i = \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) R > R.$$

Иными словами, механизм будет *нереализуем*. Следует отметить, что ОМС (6) была бы нереализуема в данном примере не зависимо от того, какое правило устранения многозначности в ней используется. ■

3. Заключение

Основным результатом статьи является доказательство того, что неманипулируемые механизмы распределения ресурсов являются частным случаем неманипулируемых механизмов многокритериального выбора что позволяет распространить результаты, полученные для последних на первые, например анализ степени манипулируемости различным механизмов распределения ресурсов, который на данный момент удалось провести только для анонимного случая. Полученная аналитическая запись произвольного механизмов последовательного распределения ресурсов ценна сама по себе, позволяя анализировать различные свойства данных механизмов, например, такие как их эквивалентность.

Отдельным перспективным направлением представляется полноценное расширение результатов, полученных для одномерных задач коллективного выбора для функций предпочтения

агентов с плато [9] на многомерные задачи коллективного выбора.

4. Приложение

Доказательство теоремы 1. Обозначим:

$l \in [1, \dots, n]$ - номер шага алгоритма работы механизма последовательного распределения ресурса;

q_i^l - предлагаемое агенту i на шаге l количество ресурса;

$K_l \subseteq N$ - множество агентов, чьи заявки удовлетворяются на шаге l ($i \in K_l : \tau_i \leq q_i^l$);

$N_l \subseteq N$ - множество агентов, чьи заявки остаются неудовлетворенными ($i \in N_l : \tau_i > q_i^l$);

R_l - доступный для распределения на шаге l ресурс,
 $\sum_{i \in N_{l-1}} q_i^l = R_l$.

Перед началом работы алгоритма $K_0 = \emptyset$, $N_0 = N$, $R_1 = R$. На каждом шаге каждый агент $i \in N_{l-1}$ может получить ресурс $x_i^l = \min\{\tau_i, q_i^l\}$. В итоге работы алгоритма (подробное описание алгоритма приведено [2, 4, 6]) за число шагов $k \leq n$ формируется множество агентов $K = \bigcup_{l \leq k} K_l$ (т.н. *диктаторы*),

чьи заявки были удовлетворены, и множество агентов N_k , каждый из которых получает $q_i^k : \sum_{i \in N_k} q_i^k = R - \sum_{j \in K} \tau_j$. Очевидно, что

$K \cup N_k = N$, $K \cap N_k = \emptyset$. Из требования монотонности в

группах, предъявляемого к МПРР следует, что $\forall l \leq k \quad \forall i \in N_l$
 $q_i^1 \leq q_i^2 \leq \dots \leq q_i^l$.

Т.е. для того, что бы определить механизм, необходимо для $\forall S \in 2^N \setminus \emptyset$ определить $q_i(S, z)$ - количество ресурса, предлагаемое агенту i если группа неудовлетворенных агентов составит S и для распределения в ней будет доступно количество ресурса z . Тогда итоговое распределение ресурса может быть записано в форме минимаксной схемы:

$$x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N: i \in S} q_i(S, z)\}.$$

Определим требования, которые должны предъявляться к $q_i(S, z)$.

Необходимость.

Во-первых, любое количество ресурса, доступное любой группе должно полностью предлагаться к распределению внутри группы, т.е.:

$$\forall S \in 2^N \setminus \emptyset, \quad \forall i \in S, \quad \forall z \in [0, R] \quad \sum_{i \in S} q_i(S, z) = z.$$

В том числе $\forall i \in N, \quad q_i(\{i\}, z) = z$.

Во вторых, требование монотонности в группах, означает, что $\forall S \in 2^N \setminus \emptyset, \quad \forall i \in S, \quad \forall z \in [0, R] \quad q_i(S, z)$ должна не убывать по z - т.е.

$$\forall S \in 2^N \setminus \emptyset, \quad \forall i \in S, \quad \forall z \in [0, R] \quad \frac{\partial q_i(S, z)}{\partial z} \geq 0^1$$

Следует отметить, что из условий 1 и 2 очевидным образом следует непрерывность $q_i(S, z)$ по z .

Перейдем к условию 3. Пусть для некоторых групп $V \subseteq N$ и $S \subset V \quad \exists k \in S$ т.ч. при некотором $\tilde{z} < R$

¹ но производная может быть разрывной по z

$q_k(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})) \neq q_k(V, \tilde{z})$. Рассмотрим ситуацию, когда предпочтения агентов удовлетворяют следующим условиям

$$\text{а. } \forall i \in N \setminus V \quad \tau_i \leq q_i(N, R) \text{ и } \sum_{i \in N \setminus V} \tau_i = R - \tilde{z};$$

$$\text{б. } \forall i \in V \quad \tau_i > q_i(N, R);$$

$$\text{в. } \forall i \in V \setminus S \quad \tau_i = q_i(V, \tilde{z});$$

$$\text{г. } \forall i \in S \quad \tau_i > q_i(V, \tilde{z}) \text{ и } \tau_i > q_i(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})).$$

Для данного набора точек пиков агентов по результатам первого шага работы МПРР $N_1 = V$, $R_2 = \tilde{z}$. После второго шага $\forall i \in V \quad x_i^2 = q_k(V, \tilde{z})$, соответственно, все агенты из $V \setminus S$ получают ровно столько, сколько просили и $N_2 = S$, $R_3 = \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})$. Следует отметить, что на втором шаге агенты из S в сумме получали $Q_S(V, \tilde{z}) = \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})$ - т.е. $R_3 = Q_S(V, \tilde{z})$. На третьем шаге алгоритм остановится, т.к. $N_3 = N_2$ и $\forall i \in S$ получают по $x_i^3 = q_i(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z}))$.

Если $q_k(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})) < q_k(V, \tilde{z})$ то это означает, что $x_k^3 < x_k^2$, что противоречит свойствам МПРР. Если $q_k(S, \tilde{z} - Q_{V \setminus S}(V, \tilde{z})) > q_k(V, \tilde{z})$, то из того, что количество ресурсов, распределяемое между агентами из S на втором и третьем шаге одинаковое, следует, что найдется хотя бы один агент $j \in S$, такой, что $x_j^3 < x_j^2$.

В заключение покажем, что для неманипулируемости механизма распределения ресурсов, определяемого (3) функции $q_i(\bullet)$ не могут зависеть от заявок агентов. В [8] доказано, что любой неманипулируемый механизм распределения ресурсов должен быть представим в виде $x_i = \min\{\tau_i, b_i(u_{-i})\}$, $i \in N$, где $b_i(u_{-i})$ должны обеспечивать $\sum_{i \in N} x_i = R$. Следовательно, $\forall i \in N$ функ-

ция $q_i(\bullet)$ не должна зависеть от u_i , т.е. от заявки самого агента.

Предположим, что $\exists k, j \in N$ т.ч. $q_k(\bullet)$ для некоторого множества агентов и $S \subseteq N : k \in S$ зависит не только от z , но и от u_j .

Если $j \in S$ то, в соответствии с условием 3 $\forall i \in \{k, j\}$ $q_i(\{k, j\}, z - Q_{S \setminus \{k, j\}}(S, z)) = q_i(S, z)$. Т.е. для множества агентов $\{k, j\}$ так же должна зависеть от u_j . Но, т.к. $\forall z \in [0, R]$ $q_k(\{k, j\}, z) + q_j(\{k, j\}, z) = z$, то $q_j(\bullet)$ для множества $\{k, j\}$ зависит от u_j , что недопустимо.

Если $j \notin S$, то рассмотрим множество агентов $\tilde{S} = \{j\} \cup S$. Т.к. $q_k(S, z - Q_{\{j\}}(\tilde{S}, z)) = q_i(\tilde{S}, z)$, то для $\tilde{S}$ $q_k(\bullet)$ так же зависит от u_j . Далее повторим выкладки предыдущего абзаца.

Таким образом, $\forall i \in N$ функция $q_i(\bullet)$ не могут зависеть от заявок агентов, следовательно $q_i(\bullet) : 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$.

Достаточность.

Пусть задан набор функций $q_i(\bullet) : 2^N \setminus \emptyset \times [0, R] \rightarrow [0, R]$, удовлетворяющий условиям 1-3. Необходимо показать, что механизм (3), определяемый этими функциями, является МПРР.

Проанализируем, на каких $S \subset N$ может достигаться $\max_{S: i \in S} \{q_i(S, R(S))\}$. Зафиксируем произвольную группу агентов $S \subset N$.

1. Покажем, что $\forall i, k \in S$

$$q_i(S, R(S)) \leq q_i(S \setminus \{k\}, R(S \setminus \{k\})) \Leftrightarrow \tau_k \leq q_k(S, R(S)) : \\ q_i(S, R(S)) \geq q_i(S \setminus \{k\}, R(S \setminus \{k\})),$$

$$\begin{aligned}
& \Updownarrow \text{ в соответствии с условиями 1 и 3,} \\
& q_i(S \setminus \{k\}, R(S) - q_k(S, R(S))) ? q_i(S \setminus \{k\}, R(S) - \tau_k), \\
& \Updownarrow \text{ в соответствии с условием 2,} \\
& R(S) - q_k(S, R(S)) ? R(S) - \tau_k, \\
& \Updownarrow \\
& \tau_k ? q_k(S, R(S)).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\forall i \in N \quad \max_{S: i \in S} \{q_i(S, R(S))\}$ достигается, когда $\forall k \in S \setminus \{i\} \quad \tau_k > q_k(S, R(S))$.

2. Покажем, что если $\tau_i > q_i(S, R(S))$, т.е. все множество S состоит из не-диктаторов, то во множестве $S \setminus i$ так же не возникнет новых диктаторов. Рассмотрим произвольного агента $j \in S \setminus i$. По построению $\tau_j > q_j(S, R(S))$. Т.к. $\tau_i > q_i(S, R(S))$, то из условия 2 следует, что $q_j(S \setminus \{i\}, R(S) - \tau_i) \leq q_j(S \setminus \{i\}, R(S) - q_i(S, R(S)))$. Из условия 3 получаем, что $q_j(S, R(S)) \geq q_j(S \setminus \{i\}, R(S \setminus \{i\}))$. Следовательно, $\forall S' \subset S, \quad \forall j \in S' \quad \tau_j > q_j(S', R(S'))$, т.е. в любом подмножестве S не найдется новых диктаторов.

3. Однако, если $\tau_i \leq q_i(S, R(S))$, то возможно, что $\exists k \in S \setminus i$, такой, что $\tau_k > q_k(S, R(S))$ но $\tau_k \leq q_k(S \setminus \{i\}, R(S \setminus \{i\}))$. Это соответствует ситуации, когда для некоторого шага алгоритма l агент $k \notin \bigcup_{j < l} K_j$, но $k \in K_l$ в то время как агент $i \in \bigcup_{j < l} K_j$. Т.е. для агентов-диктаторов

$\max_{S: i \in S} \{R(S)d_i(S)\}$ может достигаться на таких $S \subset N$, в которое входят другие диктаторы. Однако, так как

$$\tau_k \leq q_k(S \setminus \{i\}, R(S \setminus \{i\})), \text{ то } \min\{\tau_k, \max_{S:k \in S}\{R(S)d_k(S)\}\} = \tau_k,$$

что соответствует работе алгоритма МПРР.

Таким образом, (3) определит единственную группу $S^* \subseteq N$, т.ч.:

$$1. \forall i \in S^*, \forall \tilde{S} \subseteq S^* \setminus \{i\}$$

$$\tau_i > q_i(S^*, R(S^*)) > q_i(S^* \setminus \tilde{S}, R(S^* \setminus \tilde{S})) \text{ и}$$

$$\tau_i > q_i(S^*, R(S^*)) > q_i(S^* \cup \{i\}, R(S^* \cup \{i\}));$$

$$2. \forall j \in N \setminus S^* \tau_j \leq q_j(S^* \cup \{j\}, R(S^* \cup \{j\})).$$

Таким образом, полученный механизм будет механизмом последовательного распределения ресурсов.

Доказательство теоремы 2.

Эквивалентность механизмов означает, что при одинаковых заявках механизмы дают одинаковое распределение ресурсов и механизм $F(\tau)$ неманипулируем.

1. Покажем, что (4) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к системам правых коалиций:

$$1) \forall z \in (0, R]:$$

$$\mathfrak{R}_i(z) \neq \emptyset, \text{ т.к. } q_i(\{i\}, R) = R;$$

$$\emptyset \not\subset \mathfrak{R}_i(z), \text{ т.к. } \forall W \in \mathfrak{R}_i(z) \ i \in W;$$

$$\mathfrak{R}_i(0) = 2^N \setminus \emptyset \text{ по определению.}$$

$$2) \text{ В соответствии с теоремой 1 если } W \in \mathfrak{R}_k(z) \text{ и } W \subset W' \text{ то } \\ \Rightarrow W' \in \mathfrak{R}_k(z) \text{ т.к. } q_i(\{i\} \cup N \setminus W', R) \leq q_i(\{i\} \cup N \setminus W, R).$$

$$3) \text{ Если } z' < z \text{ и } W \in \mathfrak{R}_k(z_k) \text{ } \mathbf{P} \quad W \in \mathfrak{R}_k(z'_k) \\ \text{т.к. } q_i(\{i\} \cup N \setminus W, R) \geq z > z'.$$

$$4) \forall W \subseteq N, \forall z \in Z \text{ и любой последовательности } \{z^t\} \subset Z \\ \text{такой что } \lim_{t \rightarrow \infty} z^t = z \text{ верно}$$

$$[\forall t, W \in \mathfrak{R}_k(z_k^t)] \Rightarrow [W \in \mathfrak{R}_k(z_k)]$$

$$\text{т.к. } [\forall t, q_i(\{i\} \cup N \setminus W, R) \geq z^t] \Rightarrow [q_i(\{i\} \cup N \setminus W, R) \geq z].$$

Т.е. (4) определяет ОМС, в соответствии с которой, для того, чтобы $x_i = z$, необходимо:

1. $z \leq \tau_i$;
2. $S \subseteq N \setminus \{i\} : s_j^i \geq z$ удовлетворяло условию $q_i(N \setminus S, R) \geq z$.

II. Исследуем как формируются вектора s_j , $j \in N$ в соответствии с (5). Обозначим $K = \{j \in N : \pi_j(\tau) = \tau_j\}$.

Покажем, что $\forall i \in N$ и $\forall j \in K$ из (5) получаем, что $s_j^i = \tau_i$. Для произвольного вектора точек пиков агентов $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ обозначим $\tilde{\pi}^j(\tau_{-j})$ - механизм, распределяющий ресурсы $R - x_j$ между агентами из $N \setminus \{j\}$, и получаемый на основе тех же $q_i(\bullet)$, $i \in N \setminus \{j\}$ что и $\pi(\tau)$, где $x_j = \pi_j(\tau)$. В соответствии с условием монотонности по группам, которому удовлетворяет МППР, $\forall i, j \in N$ $\tilde{\pi}_i^j(\tau_{-j}) = \pi_i(\tau)$. Т.е.

$$x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N \setminus \{j\} : i \in S} q_i(S, R - x_j - \sum_{k \in N \setminus (S \cup \{j\})} \tau_k)\}.$$

Следовательно, если $x_j = \tau_j$, то

$$x_i = \min\{\tau_i, \max_{S \subseteq N \setminus \{j\} : i \in S} q_i(S, R(S))\}.$$

Т.е. $s_j^i = \tau_i$ если $j \in K$ и s_j^i определяется из (5).

Таким образом, $\forall j \in K \quad s_j = \pi(\tau)$. Из приведённых выкладок так же следует, что $\forall j \in N \setminus K, \quad \forall i \neq j \quad s_j^i \leq \tau_i$ т.к. $\tau_j > \pi_j(\tau)$.

III. В соответствии с (5) получаем, что $\forall i, j \in N \quad s_j^i = \tau_i$ если $\pi_j(\tau) = \tau_j$ или $j = i$ и $s_j^i \leq \tau_i$ если $\pi_j(\tau) < \tau_j$. Отсюда получаем, что $\forall i \in N$
 $x_i = \min\{\tau_i, q_i(N \setminus K, R(N \setminus K))\} = \pi_i(\tau)$.

Т.е., если агенты достоверно сообщают свои точки пиков, то $\forall \tau : u \in U^n$ имеем $F(\tau) = \pi(\tau)$.

IV. Покажем, что механизм $F(\tau)$ неманипулируем. Т.е., $\forall i \in N$ в случае, если $F_i(\tau) \neq \tau_i$ не существует $\tilde{\tau}_i$ т.ч. $u_i(F_i(\tilde{\tau}_i, \tau_{-i})) > u_i(F_i(\tau))$.

В соответствии с (4) возможен только случай, когда $F_i(\tau) \leq \tau_i$. Что означает, что $\forall j \neq i \quad s_j^i < \tau_i$. Это означает, что $\forall j \neq i \quad \max_{S \subseteq N \setminus \{j\}; i \in S} q_i(S, R(S)) < \tau_i$. Поэтому, сообщая $\tilde{\tau}_i > \tau_i$, агент i не сумеет изменить заявки других агентов, а сообщая $\tilde{\tau}_i < \tau_i$ - может только уменьшить. Т.е. при сообщении $\tilde{\tau}_i \neq \tau_i$ получаем, что $u_i(F_i(\tilde{\tau}_i, \tau_{-i})) \leq u_i(F_i(\tau))$.

Таким образом, получаем, что ОМС $F(\tau)$, дополненная правилом устранения многозначности, эквивалентна МПРР $\pi(\tau)$.

5. Литература

1. БУРКОВ В.Н., ГОРГИДЗЕ И.И., НОВИКОВ Д.А., ЮСУПОВ Б.С. *Модели и механизмы распределения затрат*

- и доходов в рыночной экономике.* М.: ИПУ РАН, 1997. – 61 с.
2. БУРКОВ В.Н., ДАНЕВ Б., ЕНАЛЕЕВ А.К. и др. *Большие системы: моделирование организационных механизмов.* М.: Наука, 1989. – 248 с.
 3. БУРКОВ В.Н., ИСКАКОВ М.Б., КОРГИН Н.А. *Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы* // Проблемы управления, 2008 г. , №4 С. 38-47
 4. КОРГИН Н. А. *Анализ реализуемости результатов многокритериальной экспертизы - применение "свойства пересечения"* // Проблемы управления, 2009 г. , №6 С. 18-27
 5. КОРГИН Н. А. *Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов* // Управление большими системами. Выпуск 26.1. М.: ИПУ РАН, 2009. С.319-347
 6. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* 2-е издание. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
 7. BARBERÁ S., MASSO J., SERIZAWA S. *Strategy-proof voting on compact ranges* // Games and Economic Behavior, 1998, vol.25, pp. 272-291
 8. BARBERÁ S., JACKSON M., NEME A., *Strategy-Proof Allotment Rules* // Games and Economic Behavior, 1997, Volume 18, Issue 1, January - pp.1-21.
 9. BERGA D., *Strategy-proofness and single-peaked preferences* // Mathematical Social Sciences, 1998, vol. 35, issue 2, pp. 105-120.
 10. MOULIN H. *On strategy-proofness and single-peakedness.* // Public Choice, 1980, vol. 35, pp. 437--455.
 11. NEHRING K., PUPPE C. *Efficient and strategy-proof voting rules: A characterization*, Games and Economic Behavior, 2007, vol 59, Issue 1, pp. 132-153.

12. SPRUMONT Y., *The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform rule* // *Econometrica*, 1991, vol 59, pp. 509–519.

REPRESENTATION OF SEQUENTIAL RESOURCE ALLOCATION MECHANISM IN FORM OF STRATEGY-PROOF MECHANISM OF MULTI-CRITERIA ACTIVE EXPERTISE

Korgin Nikolay, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., leading scientist (nkorgin@ipu.ru).

Abstract: We prove that any sequential resource allocation mechanism, which is strategy-proof for domain of single-peaked preferences, may be represented as strategy-proof mechanism of active expertise for domain of multidimensional single-plateaued preferences – generalized median voter scheme with tie-breaking rule.

Keywords: strategy-proof mechanisms, sequential resource allocation mechanism, mechanism of multi-criteria active expertise, generalized median voter scheme.