

УДК 519.6+004.94

ББК 22.193

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СДУ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Черных Н. В.¹

(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического универ-
ситета им Р.Е. Алексеева)

Рассматриваются математические модели сложных систем в виде стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями диффузионной составляющей. Проводится экспериментальное сравнение применимости известных численных схем Эйлера, Мильштейна, Тейлора для аппроксимации решения таких уравнений, их устойчивости, погрешности. Представлены результаты численного моделирования в среде Scilab.

Ключевые слова: стохастические системы, марковские переключения, схемы Эйлера, Мильштейна, Тейлора для стохастических систем, сходимость, устойчивость, погрешность, доверительный интервал.

Введение

В последнее время гибридные системы, приводимые в движение непрерывными или дискретными во времени цепями Маркова привлекают большое внимание. Такие системы используются для моделирования многих практических систем, которые могут испытывать резкие изменения в своей структуре и параметрах, вызванных явлениями типа повреждения или отказа компонент, влекущих изменения взаимосвязи подсистем, и рез-

¹ Надежда Валентиновна Черных, аспирантка (nadezdacher@mail.ru).

ких волнений окружающей среды. Системы с переключаемыми диффузиями особенно привлекают внимание в области управления и оптимизации.

Математические модели таких систем представляют собой системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) со скачкообразными изменениями диффузионной составляющей. Для решения практических задач необходимы различные методы аппроксимации решения дифференциальных уравнений с переключениями. В работах [7], [8] рассмотрена возможность применения и сходимости схемы Эйлера к решению таких уравнений. В работе [5] для аппроксимации решений СДУ с марковскими переключениями используется схема среднеквадратичного порядка точности 1.5, основанная на стохастических аналогах формулы Тейлора.

Все авторы работ по численному моделированию отмечают, что сходимость численной схемы не является гарантией, что схема может использоваться эффективно в практическом моделировании. Неустойчивость схемы может сделать ее бесполезной для решения практических задач. Известно [4], что даже для численно устойчивой схемы при увеличении промежутка интегрирования ошибка численной схемы может расти и превышать допустимые пределы, хотя теоретически она остается ограниченной. Эта проблема становится особенно актуальной в тех задачах, где промежуток интегрирования $[t_0, T]$ заранее не известен, например, при моделировании момента первого выхода.

Поставим цель проведения компьютерных экспериментов с известными схемами Эйлера, Мильштейна, Тейлора (Платена) для стохастических систем, представленными в новом виде с переключаемой компонентой, чтобы сравнить их точность, устойчивость, возможность применения к решению СДУ с марковскими переключениями. Будем использовать теорию и методы из работы [8], а также некоторые теоретические сведения из [4], [1], [2].

1. Предварительные сведения

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^d \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) d\omega_s^j \text{ для } t \in [t_0, T], \text{ с на-}$$

чальным значением X_{t_0} ; $a = (a^i)_{i=1}^c$ и $b = (b^i)_{i=1}^c$ - c - размерные векторы.

Схема Эйлера - это самая простая сильная аппроксимация, из разложения Тейлора-Ито (1), имеющая порядок сильной сходимости 0,5.

$$(1) X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t d\omega_s + L^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s d\omega_z d\omega_s + \bar{R},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R} = & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) s \omega_z ds + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz d\omega_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^0 L^1 b(X_u) du d\omega_z d\omega_s + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^1 L^1 b(X_u) d\omega_u d\omega_z d\omega_s. \end{aligned}$$

Для заданной временной дискретизации $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$ на интервале $[t_0, T]$ аппроксимация Эйлера есть непрерывный во времени стохастический процесс $Y = \{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$, удовлетворяющий итерационной схеме

$$(2) Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta\omega_n,$$

в 1-размерном случае $c = d = 1$, где $\Delta_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} dt = \tau_{n+1} - \tau_n$ есть длина временного подынтервала дискретизации $[\tau_{n+1}, \tau_n]$ и

$\Delta\omega_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} d\omega_t = \omega_{\tau_{n+1}} - \omega_{\tau_n}$ есть $N(0, \Delta_n)$ распределенных приращений

винеровского процесса ω на $[\tau_{n+1}, \tau_n]$.

Для общего многомерного случая ($c, d = 1, 2, \dots$) k -компонентная схема Эйлера имеет форму (3), где (4) – $N(0, \Delta_n)$ распределенных приращений j -компонентного d -мерного стандартного винеровского процесса ω на $[\tau_n, \tau_{n+1}]$, таким образом, $\omega_n^{j_1}$ и $\omega_n^{j_2}$ независимы для $j_1 \neq j_2$.

$$(3) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \sum_{j=1}^n b^{k,j} \Delta\omega_n^j,$$

$$(4) \quad \Delta\omega_n^j = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} d\omega_t^j = \omega_{\tau_{n+1}}^j - \omega_{\tau_n}^j.$$

Если в 1-размерном случае ($c = d = 1$) добавить к схеме Эйлера (3) член $bb'I_{(1,1)} = \frac{1}{2}bb'\{(\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n\}$ из разложения Тейлора - Ито, то получим схему Мильштейна

$$(5) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta\omega_n + \frac{1}{2}bb'\{(\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n\}.$$

Можно переписать ее в виде

$$(6) \quad Y_{n+1} = Y_n + \underline{a}\Delta_n + b\Delta\omega_n + \frac{1}{2}bb'(\Delta\omega_n)$$

($\underline{a} = a - \frac{1}{2}bb'$), который можно получить из Стратонович – Тейлор разложения, включающего величину $bb'J_{(1,1)} = \frac{1}{2}bb'(\Delta\omega_n)^2$.

В общем многомерном случае ($c, d = 1, 2, \dots$) k -компонентная схема Мильштейна имеет форму

(7) $Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \sum_{j=1}^d b^{k,j} \Delta\omega_n^j + \sum_{j_1, j_2=1}^d L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)}$

в терминах повторного интеграла Ито $I_{(j_1, j_2)}$ или

$$(8) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \underline{a}^k \Delta_n + \sum_{j=1}^d b^{k,j} \Delta\omega_n^j + \sum_{j_1, j_2=1}^d \underline{L}^{j_1} b^{k, j_2} J_{(j_1, j_2)},$$

если используется повторный интеграл Стратоновича $J_{(j_1, j_2)}$.

При $j_1 = j_2$ имеем $I_{(j_1, j_1)} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta \omega_n^{j_1})^2 - \Delta_n \right\}$ и $J_{(j_1, j_1)} = \frac{1}{2} (\Delta \omega_n^{j_1})^2$. С

другой стороны, при $j_1 \neq j_2$ мы имеем $J_{(j_1, j_2)} = I_{(j_1, j_2)}$.

При включении слагаемых большего порядка ряда Тейлора - Ито в независимом 1-размерном случае ($c = d = 1$), мы получим строгую схему Тейлора (Платена) порядка 1.5

$$(9) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta\omega_n + \frac{1}{2}bb' \left\{ (\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n^2 \right\} + a'b\Delta Z_n + \\ + \frac{1}{2} \left(aa' + \frac{1}{2}b^2a'' \right) \Delta_n^2 + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b'' \right) \left\{ \Delta\omega_n\Delta_n - \Delta Z_n \right\} + \\ + \frac{1}{2}b(bb'' + (b')^2) \left\{ \frac{1}{3}(\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n \right\} \Delta\omega_n;$$

Дополнительная случайная переменная ΔZ_n определенная как

$$\Delta Z_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_n} d\omega_{s_1} ds_2 - \text{это нормально распределенная величина с}$$

математическим ожиданием $E(\Delta Z_n) = 0$, дисперсией

$$E((\Delta Z_n)^2) = \frac{1}{3} \Delta_n^3 \text{ и ковариацией } E(\Delta Z_n \Delta \omega_n) = \frac{1}{2} \Delta_n^2 \text{ и может быть}$$

сгенерирована вместе с $\Delta \omega_n$ из двух независимых $N(0;1)$ распределенных случайных чисел. Последнее слагаемое в (17) содержит

$$\text{тройной интеграл Ито } I_{(1,1,1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} (\Delta \omega_n)^2 - \Delta_n \right\} \Delta \omega_n.$$

2. Постановка задачи

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, F_t , $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – неубывающее семейство σ – подалгебр F , $\omega_r(\cdot)$, $r = 1, \dots, d$ – независимые винеровские процессы. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ – конечное множество.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с марковскими переключениями в форме

$$(10) \quad dX(t) = a(\beta(t), X(t))dt + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta(t), X(t))d\omega_r(t),$$

где $\beta(t)$ - однородный марковский процесс со счетным множеством состояний M , $\beta(0) = u_0, X(0) = x_0$.

$$(11) \quad P(\beta(t+h) = l | \beta(t) = u, x(s), \beta(s), s \leq t) = q_{ul}(t)h + o(h), \quad u \neq l,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$.

Переходная функция такого процесса определяется набором функций $P(t, u, l) = p_{ul}(t)$, образующих стохастическую матрицу $P(t)$ переходных вероятностей ($p_{ul}(t) \geq 0, \sum_l p_{ul}(t) = 1$), где числа

p_{ul} имеют смысл вероятностей перехода из u в l за интервал h при условии, что процесс $\beta(t)$ на этом интервале покинул состояние u .

$Q(t) = (q_{ul}(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ - матрица интенсивности переходов,

$$Q(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - P(0)}{t}, \quad \text{где для каждого } t \quad q_{ul}(t) \geq 0 \text{ при}$$

$$u \neq l, q_{uu} = -q_u, \quad \sum_{l=1}^m q_{ul}(t) = 0 \text{ для каждого } u \in M.$$

Предполагается, что функции $f(\beta(t), x(t))$ и $\eta_r(\beta(t), x(t))$ определены при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

условию Липшица при всех при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathfrak{R}^n$,

$y \in \mathfrak{R}^n$, $u \in M$:

$$(12) \quad |a(u, x) - a(u, y)| + |\sigma(u, x) - \sigma(u, y)| \leq K|x - y|, \text{ а также}$$

$$(13) \quad |a(u, x)| + |\sigma(u, x)| \leq K(1 + |x|),$$

(14) функция $a(\beta(t), x(t))$ и все ее первые и вторые производные непрерывны; функции $\sigma_r(\beta(t), x(t))$ непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы; функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma_r(\beta(t), x(t))$ равномерно ограничены (чтобы выполнялось условие Липшица), а указанные выше производные растут по x при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее линейной функции от $|x|$.

В 1-размерном случае представим схему Эйлера в виде:

$$(15) Y_{n+1} = Y_n + a(\beta, x)\Delta_n + \sigma(\beta, x)\Delta\omega_n, \text{ где } \beta = \beta(t), x = x(t).$$

Определим стандартный винеровский процесс $\omega = \{\omega(t), t \geq 0\}$ как непрерывный гауссовский процесс с независимым приращением $\Delta\omega = \omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)$, $\omega(0) = 0$, $E(\omega(t)) = 0$, $\sigma(\omega(t) - \omega(s)) = t - s$, где $0 \leq s \leq t$.

Для практических моделирований определяем (см. [1], [4], [5], [8]) $\Delta\omega = \xi\sqrt{\Delta}$, где ξ - гауссовская переменная.

Перепишем схему (15):

$$(16) Y_{n+1} = Y_n + a(\beta, x)\Delta_n + \sigma(\beta, x)\sqrt{\Delta}\xi_n$$

В таком виде схема рассмотрена в [6], [7], где представлено доказательство ее сходимости к решению уравнения

$$dx(t) = a(\beta(t), x(t))dt + \sigma(\beta(t), x(t))d\omega(t),$$

$x(0) = x_0$, $\beta(0) = \beta_0$, где β - марковский процесс переключений.

Далее представим схему Мильштейна в виде

$$(17) Y_{n+1} = Y_n + a(\beta, x)\Delta_n + \sigma(\beta, x)\Delta\omega_n + \\ + \frac{1}{2}\sigma(\beta, x)\sigma'(\beta, x)\left\{(\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n\right\}, \text{ где } \beta = \beta(t), x = x(t).$$

Перепишем (17) в виде

$$(18) Y_{n+1} = Y_n + a(\beta, x)\Delta_n + \sigma(\beta, x)I_{(1)} + \sigma(\beta, x)\sigma'(\beta, x)I_{(1,1)}, \text{ где } \\ I_{(1)}, I_{(1,1)} - \text{соответствующие интегралы Ито.}$$

Схему Тейлора (Платена) порядка 1.5 представим в виде

$$(19) Y_{n+1} = Y_n + a(\beta, x)\Delta_n + \sigma(\beta, x)\Delta\omega_n + \\ + \frac{1}{2}\sigma(\beta, x)\sigma'(\beta, x)\left\{(\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n\right\} + \\ + a'(\beta, x)\sigma(\beta, x)\Delta Z_n + \frac{1}{2}\left(a(\beta, x)a'(\beta, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta, x)a''(\beta, x)\right)\Delta_n^2 + \\ + \left(a(\beta, x)\sigma'(\beta, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta, x)\sigma''(\beta, x)\right)\left\{\Delta\omega_n\Delta_n - \Delta Z_n\right\} + \\ + \frac{1}{2}\sigma(\beta, x)\left(\sigma(\beta, x)\sigma''(\beta, x) + (\sigma'(\beta, x))^2\right)\left\{\frac{1}{3}(\Delta\omega_n)^2 - \Delta_n\right\}\Delta\omega_n,$$

где $\beta = \beta(t)$, $x = x(t)$.

Перепишем (19) в виде

$$(20) \quad Y_{n+1} = Y_n + a(\beta, x)\Delta_n + \sigma(\beta, x)I_{(1)} + \\ + \sigma(\beta, x)\sigma'(\beta, x)I_{(1,1)} + a'(\beta, x)\sigma(\beta, x)I_{(1,0)} + \\ + \left(a(\beta, x)a'(\beta, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta, x)a''(\beta, x) \right) I_{(0,0)} + \\ + (a(\beta, x)\sigma'(\beta, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta, x)\sigma''(\beta, x))I_{(0,1)} + \\ + \sigma(\beta, x)\left(\sigma(\beta, x)\sigma''(\beta, x) + (\sigma'(\beta, x))^2 \right) I_{(1,1)},$$

где $I_{(1)} = \Delta\omega_n$; $I_{(1,1)} = \frac{1}{2}(\Delta\omega_n^2 - \Delta_n)$; $I_{(0,0)} = \frac{1}{2}\Delta_n^2$;

$I_{(1,0)} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_n}\Delta_n \cdot \left(\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_2 \right)$; где ξ_1, ξ_2 - гауссовские случай-

ные величины;

$$I_{(0,1)} = \Delta\omega_n\Delta_n - I_{(1,0)}; \quad I_{(1,1,1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\Delta\omega_n^2 - \Delta_n \right)\Delta\omega_n; \text{ (см. [5])}$$

Стандартный винеровский процесс состоит из очень большого числа случайных переменных. Однако возможно представить его на любом ограниченном интервале $[0, T]$ в терминах только множества исчисляемых независимых гауссовских случайных переменных.

Используя леммы, доказанные Мильштейном и Обобщенную теорему Платена (см. [5]), можно установить среднеквадратичную сходимость схем (16), (18), (20) к решению уравнения (10) при выполнении условий (12), (13), (14) соответственно порядка точности $1/2, 1, 3/2$.

Далее рассмотрим вопросы применения схем (16), (18), (20) к решению стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями, используя компьютерные эксперименты, также оценим их устойчивость.

3. Теория постановки компьютерных экспериментов

Пусть $Y_p, p=0,1,\dots$ - дискретная аппроксимация решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1), которая стартует в момент t_0 из точки Y_0 . Через $Y'_p, p=0,1,\dots$ обозначим эту же дискретную аппроксимацию, но стартующую в момент t_0 из точки Y'_0 . Выберем некоторый конечный промежуток интегрирования $[t_0, T]$ и покроем его сеткой $\{\tau_j\}_{j=0}^{N_T}$, такой что

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N_T} = T, \Delta = \max_{0 \leq j < N_T} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Для любого $t \in [t_0, T]$ определим натуральное число N_t следующим образом:

$$N_t = \max_j \{j : \tau_j \leq t\}. \quad [4]$$

Определение 1. Будем говорить, что дискретная аппроксимация $Y_p, p=0,1,\dots$ стохастически численно устойчива для данного стохастического дифференциального уравнения, если для любого конечного интервала $[t_0, T]$ существует такое постоянное число $\Delta_0 > 0$, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall \Delta \in (0, \Delta_0)$ выполняется условие:

$$(21) \quad \lim_{|Y_0 - Y'_0| \rightarrow 0} \sup_{t_0 \leq t \leq T} P\{|Y_{N_t} - Y'_{N_t}| \geq \varepsilon\} = 0. \quad [4]$$

Известно [4], что даже для численно устойчивой схемы при увеличении промежутка интегрирования ошибка численной схемы может расти и превышать допустимые пределы, хотя теоретически она остается ограниченной. Однако в ряде случаев удается гарантировать выполнение требуемого ограничения сверху на ошибку численного метода. Как правило, достижение этого происходит за счет выбора подходящего шага интегрирования, параметров численной схемы и промежутка интегрирования. Существенную роль в устойчивости численных методов также играют особенности конкретных стохастических дифференциальных уравнений, к которым эти методы применяются. [1]

Критерий абсолютной погрешности.

Для определения качества аппроксимации систем с дискретным временем нужен критерий. Такой критерий должен отражать главную цель практических моделирований. Есть два основных типа задач, связанных с моделированием решений стохастических дифференциальных уравнений. Первое встречается в ситуациях, где требуется хорошее приближение, например в прямых моделированиях, фильтрации или тестировании статистических оценок. Во втором случае интерес сосредотачивается на приближении математических ожиданий функционалов процессов Ито, их вероятностных распределений и моментов. Это уместно во многих практических задачах, потому что часто такие функционалы не могут быть определены аналитически. [8]

Критерий абсолютной погрешности есть математическое ожидание модуля разности между приближением и процессом Ито в момент T , что есть

$$(22) \quad \varepsilon = E(|X_T - Y(T)|)$$

и что дает меру приближения на конце временного интервала $[0, T]$.

Можно получить статистическую оценку абсолютной погрешности, используя компьютерные эксперименты.

Для этого моделируются N типовых траекторий процесса Ито и их приближений, соответствующих тем же самым типовым траекториям винеровского процесса, построенных с использованием той или иной численной схемы.

Будем отмечать в момент T значения k -ых моделируемых траекторий как $X_{T,k}$ и $Y_{T,k}$ соответственно, и оценивать абсолютную погрешность как статистическую величину

$$(23) \quad \hat{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |X_{T,k} - Y_{T,k}| \quad [8]$$

Доверительные интервалы для абсолютной погрешности.

Для больших N , как известно из Центральной Предельной Теоремы, погрешность $\hat{\varepsilon}$ ведет себя асимптотически как гауссовская случайная величина и сходится в распределении к неслучайному математическому ожиданию ε абсолютного значения погрешности при $N \rightarrow \infty$.

Невозможно воспроизвести бесконечное число траекторий. Однако можно оценить среднее отклонение $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ от $\hat{\varepsilon}$ и затем использовать это, чтобы построить доверительный интервал для абсолютной погрешности ε . Для этого нужно моделировать M партий по N значений в каждой и оценивать отклонение от $\hat{\varepsilon}$ следующим образом. Обозначим как $Y_{T,k,j}$ значение k -й воспроизведенной траектории в j -партии в момент времени T и как $X_{T,k,j}$ соответствующее значение процесса Ито. Усредненные погрешности

$$(24) \quad \hat{\varepsilon}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |X_{T,k,j} - Y_{T,k,j}|$$

из M партий ($j = 1, 2, \dots, M$) являются тогда независимыми и приближенно гауссовскими для больших N .

Будем вычислять погрешности в каждой партии, потому что тогда мы можем использовать *Student t*-распределение для построения доверительных интервалов сумм независимых гауссовских случайных величин (или приближенно гауссовских) с неизвестной дисперсией.

В частности мы оцениваем средние величины для партий

$$(25) \quad \hat{\varepsilon} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\varepsilon}_j = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N |X_{T,k,j} - Y_{T,k,j}|$$

и затем используем формулу

$$(26) \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon})^2$$

чтобы оценивать дисперсию для найденных средних величин партий. Эксперименты показали, что средние числа партий могут интерпретироваться как являющиеся гауссовскими для партий размером $N > 15$; но обычно используют $N = 100$.

Для *Student t*-распределения с $M-1$ степенями свободы $100(1-\alpha)\%$ доверительный интервал имеет вид

$$(27) \quad (\hat{\varepsilon} - \Delta\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon} + \Delta\hat{\varepsilon}) \text{ с}$$

$$(28) \quad \Delta\hat{\varepsilon} = t_{1-\alpha, M-1} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{M}}$$

где значение $t_{1-\alpha, M-1}$ определяется из *Student t*-распределения с $M-1$ степенями свободы. Для $M=20$ и $\alpha=0.1$, мы имеем $t_{1-\alpha, M-1} \approx 1.73$ из таблицы. В этом случае абсолютная погрешность ε попадет в соответствующий доверительный интервал (27) с вероятностью $1 - \alpha = 0.9$.

Результаты экспериментов показывают, что длина доверительного интервала для абсолютной ошибки уменьшается с увеличением числа партий. Фактически, это предсказано формулой (28), из которой видно, что нужно увеличивать число партий в четыре раза при делении пополам доверительного интервала. Так как длина $2\Delta\hat{\varepsilon}$ доверительного интервала обратно пропорциональна квадратному корню числа партий M , необходимое число партий для выбранного доверительного интервала достаточно маленькой длины может быть очень большим. Следовательно, нужно решать, какая точность действительно необходима для решения конкретной проблемы. [8]

Более подробную информацию о построении доверительного интервала можно посмотреть в [8].

Зависимость абсолютной погрешности от размера шага.

Размер шага, конечно, имеет влияние на величину абсолютной погрешности. Это видно более явно, если построить зависимость $\log_2 \varepsilon$ от $\log_2 \Delta$. Известно, что функция $f(\Delta) = A\Delta^\gamma$ становится линейной в логарифмических координатах, и выполняется $\log_a f(\Delta) = \log_a A + \gamma \log_a \Delta$ для логарифмов с основанием $a \neq 1$. В сравнительных исследованиях удобно выбирать шаг в форме $\Delta = a^{-k}$ для $k = 1, 2, \dots$ и $a > 1$. [8]

Далее поставим задачу проведения компьютерных экспериментов по исследованию устойчивости численных схем (16), (18), (20), используя изложенные выше практические методы.

4. Пример

Пример 1.

Рассмотрим процесс Ито $X = \{X_t, t \geq 0\}$, удовлетворяющий линейному стохастическому уравнению

$$(29) \quad dX_t = f(\beta_t, X_t)X_t dt + g(\beta_t, X_t)X_t d\omega_t,$$

на временном интервале $[0, T]$ при $T = 1$, $X_0 = 1$.

$M = \{1, 2, \dots, m\}$ - число состояний марковской цепи, Q – матрица интенсивностей, P – матрица переходных вероятностей, $P = I + Q\Delta$, где I – единичная матрица (см. [5], [7])

$$(30) \quad X_t = X_0 \exp\left(\left(f(\beta_t, x_t) - \frac{1}{2}g^2(\beta_t, x_t)\right)t + g(\beta_t, x_t)\omega_t\right).$$

есть решение уравнения для $t \in [0, T]$ и данного винеровского процесса $\omega = \{\omega_t, t \geq 0\}$.

Чтобы смоделировать линейно интерполированную траекторию аппроксимаций (16), (18), (20) зададим начальное значение $Y_0 = X_0$ и будем рекурсивно генерировать значения Y_N с равным значением шага Δ .

Будем моделировать 20 партий по $n=100$ траекторий в каждой. В партиях оцениваем погрешность на каждом шаге, согласно (24), среднюю погрешность среди 100 траекторий (25) (в программе обозначено *eps*), а затем среднее значение погрешности из 20 партий (27) (*average*). Одновременно будем оценивать дисперсию для найденных средних величин партий, которая включается в формулу (28) для нахождения половины длины 90% конфиденциального интервала (*differ*).

Расчеты будем проводить для разного размера шага дискретизации. Кроме того, учитывая переключаемый характер диффузионного процесса, экспериментально проследим, насколько устойчива та или иная схема к колебаниям коэффициентов в уравнении (27), изменению матрицы переходов, увеличению или уменьшению интервала дискретизации.

Случай 1.

Пусть $f(\beta_b, x_t)$ принимает 4 значения - $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, соответствующие состояниям марковской цепи. Положим $\alpha_1=1.5$, значения $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ будут изменяться в ходе эксперимента.

$g(\beta_b, x_t)$ принимает значения - $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$. Положим $\lambda_1=0.1$, значения $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ будут изменяться в ходе эксперимента.

Будем полагать, что начальному моменту времени соответствуют значения α_1 и λ_1 .

1. $\alpha_2 = 0.2$; $\alpha_3 = 0.4$; $\alpha_4 = 0.3$; $\lambda_2 = 0.5$; $\lambda_3 = 0.7$; $\lambda_4 = 0.8$;

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}; \text{ временной интервал } [0; T]$$

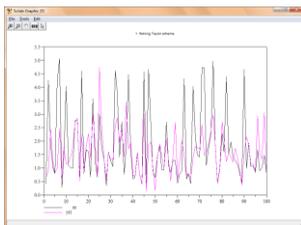


Рис. 1. Аппроксимация Эйлера $ut1$ и точное решение xt при $\Delta=0.2$ на интервале $[0, 1]$

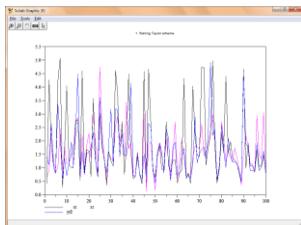


Рис. 2. Аппроксимация Мильштейна (синяя кривая)

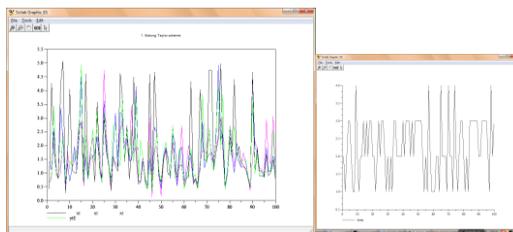


Рис. 3. Аппроксимация Тейлора 1.5 (зеленая кривая); марковская цепь

Euler eps1 =	Milstein eps2 =	Taylor eps =
0.7424543	0.7050396	0.7259674
0.6843271	0.6488645	0.6763814
differ1 =	differ2 =	differ =
0.0388087	0.0382535	0.0426432
0.0282928	0.0365962	0.0359902

Рис. 4. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины
конфиденциального интервала аппроксимации Эйлера,
Мильштейна, Тейлора при $\Delta=0.1; 0.2$ ($T=1.1; 1$)

2. $\alpha_2 = 13\alpha_1; \alpha_3 = 0.4\alpha_1; \alpha_4 = 5\alpha_1;$
 $\lambda_2 = 0.05\lambda_1; \lambda_3 = 10\lambda_1; \lambda_4 = 7\lambda_1;$
 $\Delta=0.002; 0.001; 0.0005; \quad T=0.01;$

Euler eps1 =	Milstein eps2 =	Taylor eps =
0.1048741	0.1010292	0.1016814
0.1009199	0.1006216	0.0973267
0.0999802	0.0972952	0.0967659
differ1 =	differ2 =	differ =
0.0020669	0.0031303	0.0021589
0.0029735	0.0022818	0.0025290
0.0029086	0.0027025	0.0025124

Рис. 5. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины
конфиденциального интервала

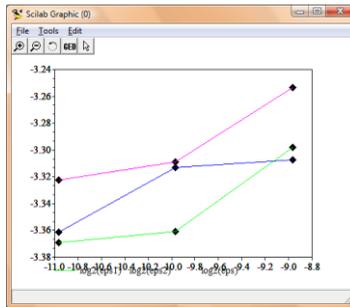


Рис. 6. Зависимость ошибки от величины шага для всех трех
методов ($\log_2 \varepsilon$ от $\log_2 \Delta$)

3. $\alpha_2 = 13\alpha_1; \alpha_3 = 0.4\alpha_1; \alpha_4 = 50\alpha_1;$
 $\lambda_2 = 0.05\lambda_1; \lambda_3 = 10\lambda_1; \lambda_4 = 7\lambda_1;$
 $\Delta=0.003; 0.0015; 0.00075; \quad T=0.01;$

	Euler	Milstein	Taylor
eps1 =	eps2 =	eps =	
tf =	0.2152883	0.2141130	0.2132914
0.012	0.180572	0.1798299	0.1822757
tf =	0.1756478	0.177927	0.1803360
	differ1 =	differ2 =	differ =
0.0105			
tf =	0.0080400	0.0111402	0.0106564
0.0105	0.0085343	0.0081158	0.0103525
	0.0095812	0.0096692	0.0105017

Рис. 7. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала

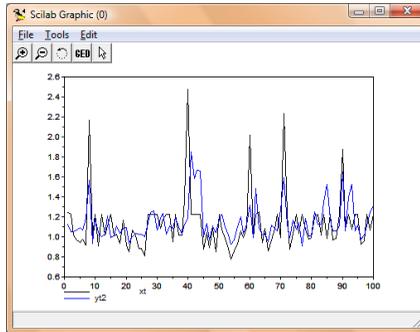


Рис. 8. Точное решение и аппроксимация Мильштейна при $\Delta=0.00075$

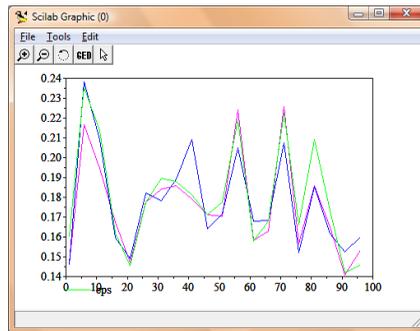


Рис. 9. Среднее значение абсолютной ошибки последней партии трех методов

Все методы работают практически равноценно. В таких случаях целесообразно использовать метод Эйлера. Схема его очень проста и точность вычислений достаточна. Вторые производные равны нулю, поэтому схема Тейлора приближается к

схеме Мильштейна, которая в свою очередь отличается от схемы Эйлера только одним слагаемым.

Все три схемы устойчивы в случаях колебаний коэффициентов относительно некоторого значения.

Случай 2.

$f(\beta_v, x_i)$ принимает два значения - $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, соответствующие первому и второму состоянию марковской цепи. $g(\beta_v, x_i)$ принимает два значения - $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Далее рассмотрим состояние – зависимую модель переключений.

Пусть $Q(\cdot): \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^{m \times m}$ - ограниченная и непрерывная функция.

$Q(x) = (q_{ul}(x)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ для каждого x , $q_{ul}(x) \geq 0$ при $u \neq l$,

$$\sum_{l=1}^m q_{ul}(x) = 0 \text{ для каждого } u \in M .$$

$$1. \quad Q = \begin{pmatrix} -\cos^2 x & \cos^2 x \\ -3\sin x & 3\sin x \end{pmatrix}; P = I + Q\Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin(x); \quad \alpha_2 = 1 + \sin(x)\cos(x); \quad \lambda_1 = 0.2; \quad \lambda_2 = 0.8;$$

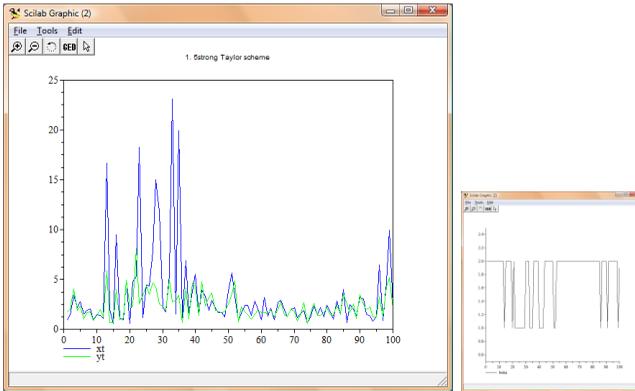


Рис. 10. Аппроксимация Тейлора 1.5 ут при $\Delta=0.15$ ($T=1$)

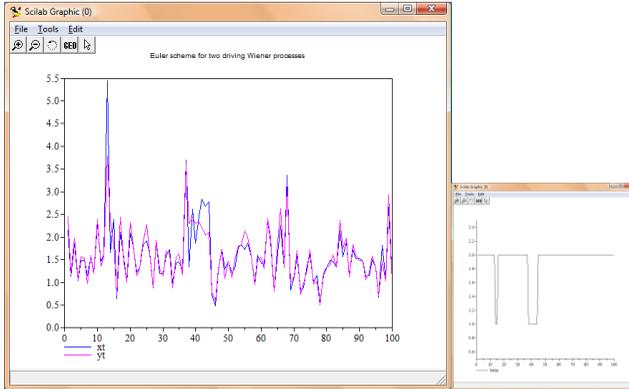


Рис. 11. Аппроксимация Эйлера yt и точное решение xt $\Delta=0.02$ ($T=0.4$); марковская цепь

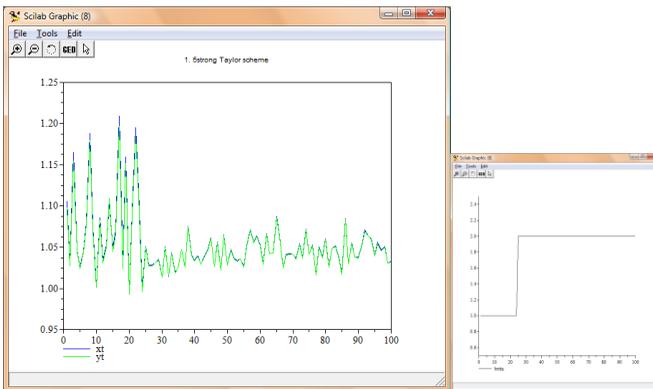


Рис. 12. Аппроксимация Тейлора 1.5 yt и точное решение xt $\Delta=0.002$ ($T=0.03$); марковская цепь

$eps =$	$eps =$	$eps =$
4.0498963	4.058594	3.9602948
2.3533058	2.2131661	2.2497568
$differ =$	$differ =$	$differ =$
0.3854933	0.4607896	0.3255276
0.1191743	0.2036297	0.2017326

Рис. 13. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала аппроксимаций Эйлера, Мильштейна, Тейлора при $\Delta=0.3; 0.15$ ($T=1$)

eps =	eps =	eps =
0.1795083	0.1768830	0.1779723
0.1529059	0.1528408	0.1415375
differ =	differ =	differ =
0.0172198	0.0153606	0.0122251
0.0151825	0.0181806	0.0133133

Рис. 14. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала при $\Delta=0.04$; 0.02 ($T=0.4$)

$$2. \quad Q = \begin{pmatrix} -5\cos^2 x & 5\cos^2 x \\ 10\cos^2 x & -10\cos^2 x \end{pmatrix}; \quad P=I+Q\Delta;$$

$$\alpha_1 = 20 + \cos^2(x); \quad \alpha_2 = \sin(x) + 5\cos(2x); \quad \lambda_1 = 0.2; \quad \lambda_2 = 0.08;$$

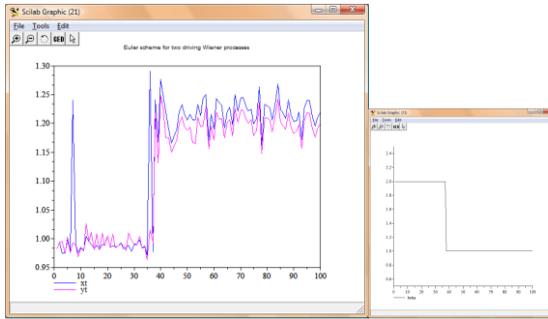


Рис. 15. Аппроксимация Эйлера u_t и точное решение x_t $\Delta=0.001$ ($T=0.01$); марковская цепь

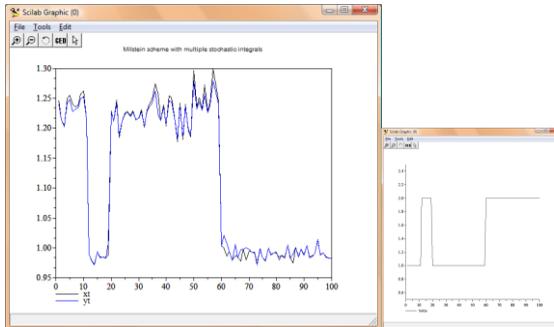


Рис. 16. Аппроксимация Мильштейна u_t и точное решение x_t $\Delta=0.001$ ($T=0.01$); марковская цепь

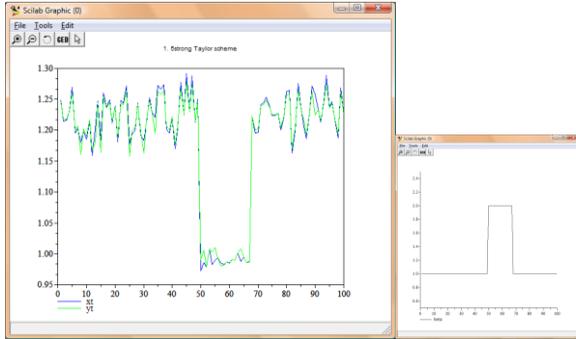


Рис. 17. Аппроксимация Тейлора 1.5 и точное решение уравнения

Случай 3.

$$1. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \sin x & 0 & 5 \sin x & 0 \\ 0 & -\cos^2 x & 0 & \cos^2 x \\ 0 & -\cos 2x & \cos 2x & 0 \\ 7 \cos x & 0 & 0 & -7 \cos x \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 3\sin(x); \quad \alpha_2 = 2+\cos(x); \quad \alpha_3 = -6\sin(2x); \quad \alpha_4 = 0.2x^2;$$

$$\lambda_1 = 0.2x; \quad \lambda_2 = 0.07x; \quad \lambda_3 = 2x^2; \quad \lambda_4 = 0.8x;$$

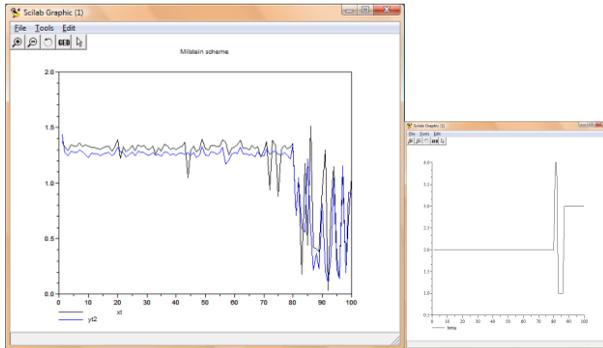


Рис. 18. Аппроксимация Мильштейна при $\Delta = 0.01$; ($T = 0.1$)

$$\alpha_1 = \sin(x); \quad \alpha_2 = 1+\cos(x); \quad \alpha_3 = 2\sin(2x); \quad \alpha_4 = 0.2x^2;$$

$$\lambda_1 = 0.2x; \quad \lambda_2 = 0.7x; \quad \lambda_3 = 0.1x^2; \quad \lambda_4 = 0.5x;$$

eps1 =	eps2 =	eps =
1.0309003	1.0398208	1.0346745
1.0829607	1.0885661	1.0879406
differ1 =	differ2 =	differ =
0.1276624	0.1248751	0.1243555
0.1614815	0.158617	0.1642647

Рис. 19. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала при $\Delta = 0.1; 0.05; 0.025; 0.0125$ ($T = 0.5; 0.25; 0.125; 0.0625$)

Euler eps1 =	Milstein eps2 =	Taylor eps =
1.0313254	1.0459634	1.0975805
0.0274728	0.0253831	0.0250581
0.0008867	0.0007102	0.0007009
0.0000926	0.0000126	0.0000125
differ1 =	differ2 =	differ =
0.1805186	0.1797422	0.1767159
0.0019903	0.0018234	0.0021860
0.0001757	0.0001502	0.0001529
0.0000060	0.0000025	0.0000028

Рис. 20. $\Delta = 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}$ ($T = 1; 0.1; 0.01; 0.001$)

eps1 =	eps2 =	eps =
1.0111136	1.0130151	1.0009257
0.9670502	0.9779316	0.9676305
1.1145291	1.1182377	1.123938
1.0417176	1.0467371	1.0381133
differ1 =	differ2 =	differ =
0.1553261	0.1504825	0.1542846
0.1250490	0.1234014	0.1283978
0.1719925	0.1705182	0.1716554
0.1188773	0.1197294	0.1175559

Рис. 21. Зависимость погрешности от размера шага дискретизации $\Delta = 2^{-2}; 2^{-3}; 2^{-4}; 2^{-5}$ ($T=1$)

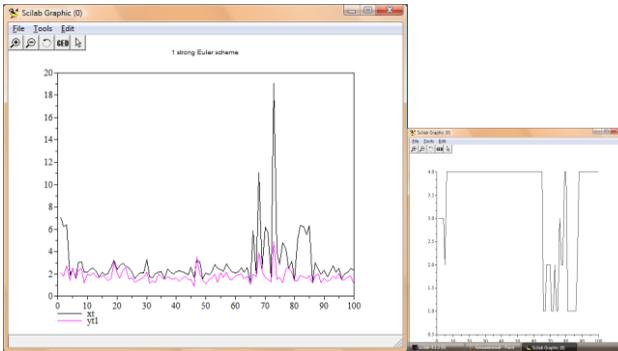


Рис. 22. Аппроксимация Эйлера при $\Delta = 0.1$; ($T = 1$)

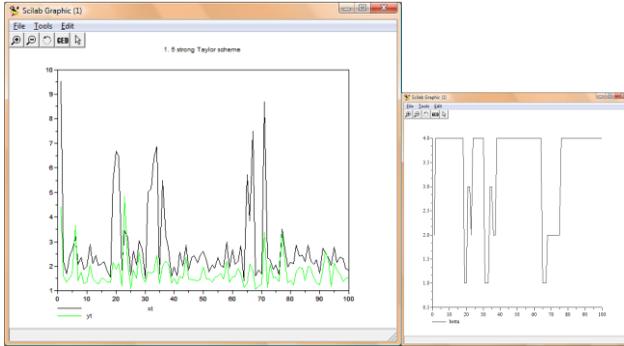


Рис. 23. Аппроксимация Тейлора и точное решение $\Delta = 2^{-5}$ ($T=1$)

$$\alpha_1 = \sin(2x); \quad \alpha_2 = 1 + \cos(x); \quad \alpha_3 = 2 + \sin(2x); \quad \alpha_4 = 0.9x;$$

$$\lambda_1 = 0.2x; \quad \lambda_2 = 0.7x; \quad \lambda_3 = 0.1x; \quad \lambda_4 = 0.05x;$$

Euler eps1 =	Milstein eps2 =	Taylor eps =
1.2664739	1.2544326	1.6941194
0.0342097	0.0316207	0.0302901
0.0011113	0.0008559	0.0007320
differ1 =	differ2 =	differ =
0.1565358	0.1623041	0.1483647
0.0024249	0.0025341	0.0024368
0.0002278	0.0002116	0.0001959

Рис. 24. $\Delta = 0.1; 0.01; 0.001$ ($T = 1; 0.1; 0.01$)

Euler eps1 =	Milstein eps2 =	Taylor eps =
0.9480301	0.9697426	1.4831336
0.0348773	0.0331483	0.0311581
0.0013038	0.0008188	0.0008366
differ1 =	differ2 =	differ =
0.1779285	0.1856515	0.1687814
0.0016588	0.0021984	0.0019593
0.0002400	0.0001877	0.0002052

Рис. 25. $\Delta = 0.2; 0.02; 0.002$ ($T = 1; 0.1; 0.01$)

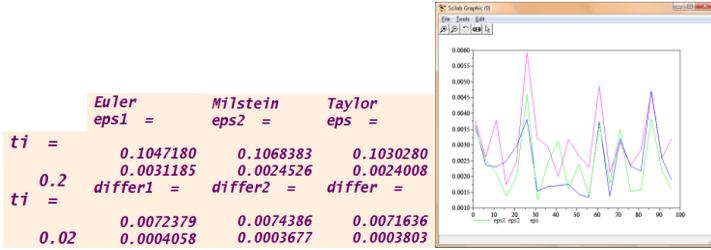


Рис. 26. $\Delta = 0.02; 0.002$; среднее значение абсолютной ошибки партии трех методов $\Delta = 0.002$

Многочисленные эксперименты показали, что оптимальным является следующий выбор шага дискретизации:

Таблица 1. Выбор шага дискретизации для оптимального результата моделирования решения

T	1	0.1	0.2	0.3	0.01	и т. д.
Δ	0.1	0.01	0.02	0.03	0.001	

т. е. 10 шагов на интервале

$$2. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \sin x & 0 & 5 \sin x & 0 \\ \cos^2 x & -\cos^2 x & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2x & \cos 2x & 0 \\ 0 & 0 & 7 \cos x & -7 \cos x \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin(x); \quad \alpha_2 = 1 + \cos(x); \quad \alpha_3 = 3 \cos^2(2x); \quad \alpha_4 = \sin(4x);$$

$$\lambda_1 = 0.5; \quad \lambda_2 = 0.3; \quad \lambda_3 = 0.2; \quad \lambda_4 = 0.7;$$

	eps1 =	eps2 =	eps =
tf =	5.8742111	5.8839459	7.0965028
1.2	3.5322191	3.5595667	3.9506403
ti =	4.7138099	4.7280787	4.8737709
1.	3.3405863	3.3332535	3.3913282
ti =	differ1 =	differ2 =	differ =
1.1	0.3056496	0.3143690	0.3963371
ti =	0.2195943	0.2218115	0.2283504
1.	0.3306397	0.3297325	0.3273001
1.	0.2288286	0.2256586	0.2305319

Рис. 27. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала при $\Delta = 0.4; 0.2; 0.1; 0.05$ (T = ti)

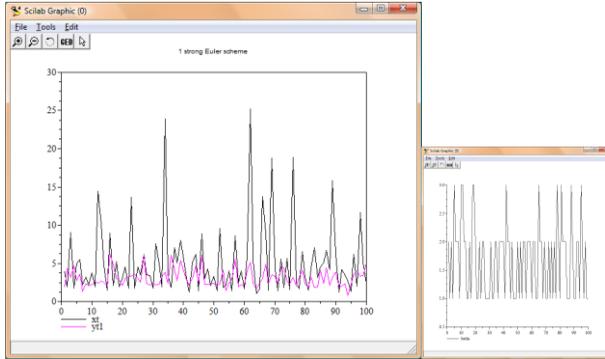


Рис. 28. Аппроксимация Эйлера $y1$ ($\Delta = 0.05; T = 1$)

Изменим значения: $\lambda_1 = 0.5$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 0.2$; $\lambda_4 = 0.007$;

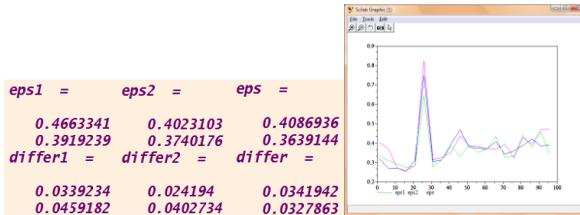


Рис. 29. $\Delta = 0.02; 0.01$ ($T = 0.2$)

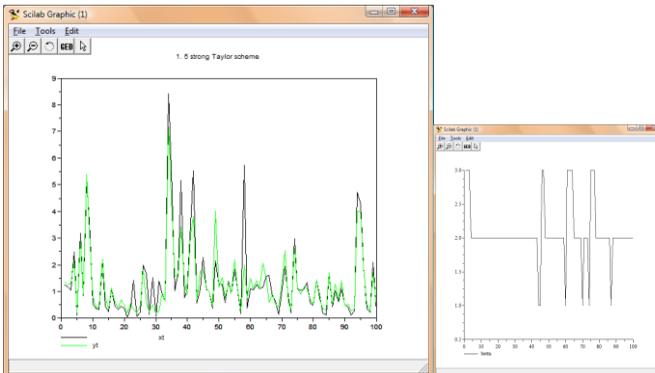


Рис. 30. Аппроксимация Тейлора ($\Delta = 0.01; T = 0.2$)

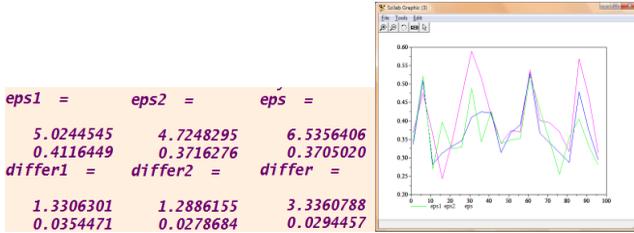


Рис. 31. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала при $\Delta = 0.1; 0.02$ ($T = 1; 0.2$)

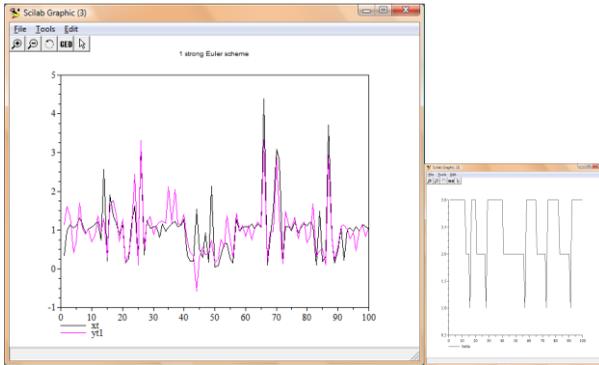


Рис. 32. Аппроксимация Эйлера ($\Delta = 0.02; T = 0.2$)

$\lambda_1 = 0.05; \lambda_2 = 8; \lambda_3 = 0.2; \lambda_4 = 0.007;$

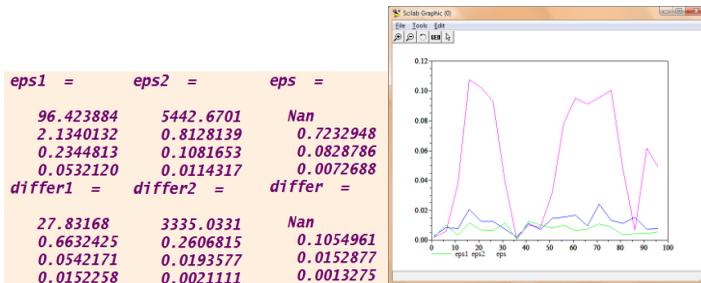


Рис. 33. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала при $\Delta = 0.1; 0.02; 0.004; 0.0008$ ($T = 1; 0.2; 0.04; 0.008$); средняя погрешность в партии при $\Delta=0.0008$

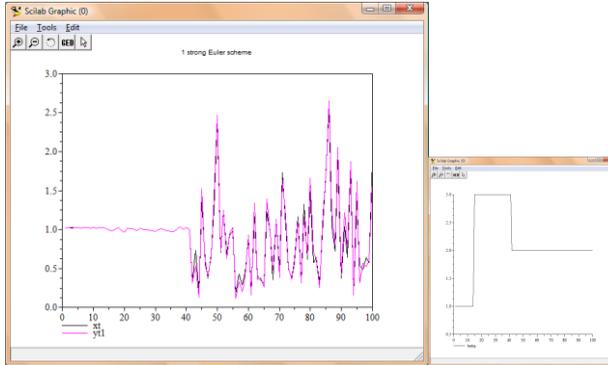


Рис. 34. Аппроксимация Эйлера ($\Delta = 0.0008$; $T = 0.008$)

$$\lambda_1 = 0.01; \quad \lambda_2 = 0.09; \quad \lambda_3 = 0.7; \quad \lambda_4 = 0.8;$$

$eps1 =$	$eps2 =$	$eps =$
0.0063241	0.0062016	0.0064315
0.0056131	0.0050101	0.0054280
0.0059970	0.0058715	0.0056385
0.0083881	0.0062108	0.0057881
$differ1 =$	$differ2 =$	$differ =$
0.0010784	0.0011093	0.0011645
0.0010405	0.0009418	0.0010358
0.0013694	0.0014616	0.0015184
0.0013398	0.0010816	0.0009181

Рис. 35. $\Delta = 0.001; 0.002; 0.004; 0.008$ ($T = 0.02$)

$$\alpha_1 = \sin(x); \quad \alpha_2 = -4\cos(x); \quad \alpha_3 = 3\cos^2(x); \quad \alpha_4 = \cos(2x);$$

$$\lambda_1 = 0.2; \quad \lambda_2 = (3+0.1x); \quad \lambda_3 = 0.7; \quad \lambda_4 = 0.8;$$

	$eps1 =$	$eps2 =$	$eps =$
$tj =$	0.2184561	0.1792578	0.1719160
0.11	0.2083285	0.1612028	0.1610206
	$differ1 =$	$differ2 =$	$differ =$
$tj =$	0.0209476	0.0133727	0.0136489
0.1	0.0190861	0.0133734	0.0179922

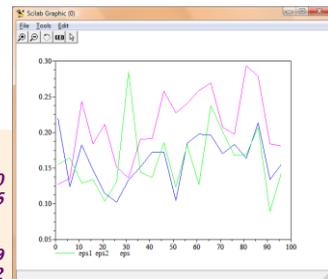


Рис. 36. $\Delta = 0.01; 0.02$; величина средней погрешности в партии $\Delta=0.02$

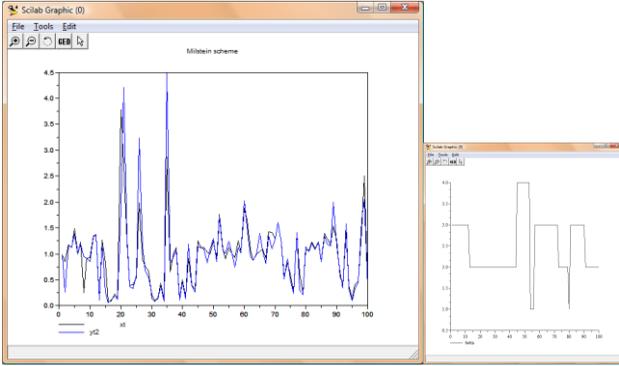


Рис. 37. Аппроксимация Мильштейна при $\Delta=0.02$

$$\alpha_1 = \sin(x); \quad \alpha_2 = -4\cos(x); \quad \alpha_3 = 3\sin^2(x); \quad \alpha_4 = \cos(2x);$$

$$\lambda_1 = 0.2; \quad \lambda_2 = (3+0.1x); \quad \lambda_3 = 0.7x; \quad \lambda_4 = 0.8;$$

	eps1 =	eps2 =	eps =
ti =	1.1136485	575.25896	1.00+15 °
	1.3806205	1.6557438	3.876D+13
0.5 differ1 =		differ2 =	7.378D-13
ti =			1.00+15 °
	0.1055721	981.70137	6.706D+13
0.6	0.0604396	0.1407781	1.117D-12

Рис. 38. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала при $\Delta = 0.1; 0.2$

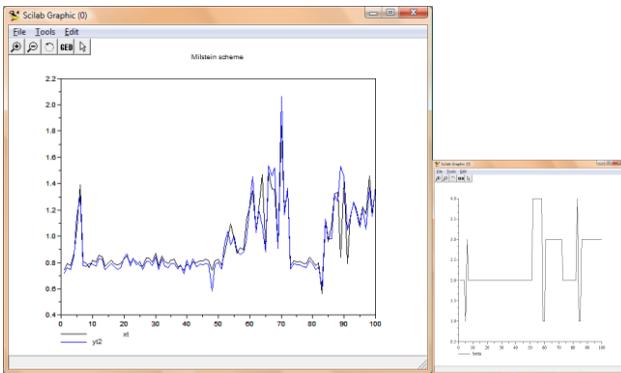


Рис. 39. Аппроксимация Мильштейна при $\Delta=0.02$ ($T=0.1$)

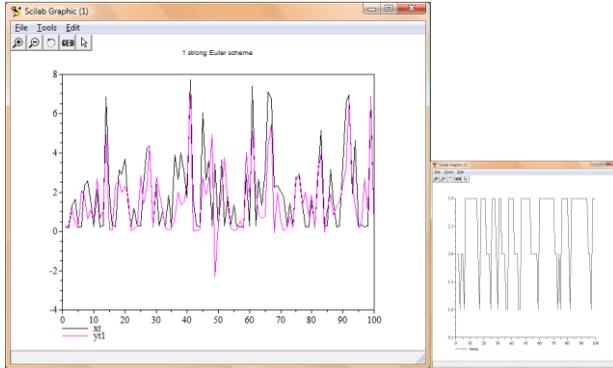


Рис. 40. Аппроксимация Эйлера при $\Delta=0.2$ ($T=0.6$)

Очень хорошие результаты при моделировании решений СДУ с марковскими переключениями показало использование схемы Мильштейна. Она более устойчива, чем схема Тейлора, но дает во многих случаях намного лучшую точность вычислений, чем схема Эйлера. Кроме того, схема (18) намного более проста, чем схема Тейлора порядка 1.5, при ее использовании требуется вычисление только одной производной. Схему Тейлора целесообразно применять для повышенной точности вычислений на малых временных интервалах. Схема Эйлера является более устойчивой при увеличении интервала.

Пример 2.

Рассмотрим процесс Ито $X = \{X_t, t \geq 0\}$, удовлетворяющий линейному стохастическому уравнению

$$(31) \quad dX_t = f(\beta_t, X_t)dt + g(\beta_t, X_t)d\omega_t^1 + \eta(\beta_t, X_t)d\omega_t^2$$

на временном интервале $[0, T]$, $X_0 = 1$.

$$(32) \quad X_t = X_0 \exp\left(ht + g(\beta_t, X_t)\omega_t^1 + \eta(\beta_t, X_t)\omega_t^2\right),$$

где $h = f(\beta_t, X_t) - 0.5(g^2(\beta_t, X_t) + \eta^2(\beta_t, X_t))$

есть решение уравнения для $t \in [0, T]$; ω^1 и ω^2 - два независимых стандартных винеровских процесса.

Для решения данной задачи будем использовать аппроксимации Эйлера и Мильштейна в виде (16), (18). Схема Тейлора в этом случае становится очень сложной для разложения.

Пусть $f(\beta_v, x_t)$ принимает 2 значения. Положим $\alpha_1 = -0.5$, значение α_2 , будет изменяться в ходе эксперимента.

$g(\beta_v, x_t)$ принимает значения - $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Положим $\lambda_1 = 1$, значение λ_2 , будет изменяться в ходе эксперимента.

$\eta(\beta_v, x_t)$ принимает значения - $\{v_1, v_2\}$. Положим $v_1 = 1$, значение v_2 , будет изменяться в ходе эксперимента.

Будем полагать, что начальному моменту времени соответствуют значения α_1 и λ_1, v_1 .

$$1. \quad \alpha_2 = 60\alpha_1; \quad \lambda_2 = 40\lambda_1; \quad v_2 = 8v_1; \quad P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

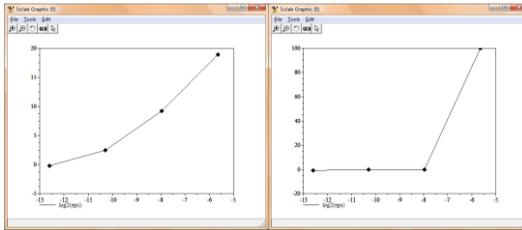


Рис. 41. Зависимость погрешности от размера шага дискретизации $\Delta = 0.1; 0.05; 0.025; 0.0125$ ($T = 0.5; 0.25; 0.125; 0.0625$)

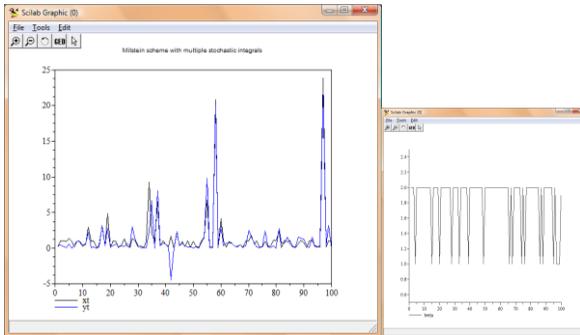


Рис. 42. Аппроксимация Мильштейна и точное решение ($\Delta = 0.0125$)

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \alpha_1 = 3\cos^2(x); & \lambda_1 = 1; & & v_1 = 1; \\
 & \alpha_2 = 2 + 5\sin(x); & \lambda_2 = 4\lambda_1; & & v_2 = 0.08v_1; \\
 & Q = \begin{pmatrix} -5\cos^2 x & 5\cos^2 x \\ 10\cos^2 x & -10\cos^2 x \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

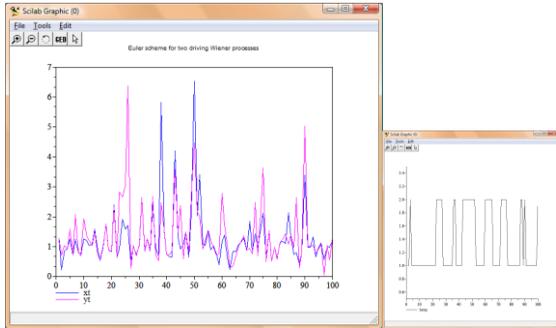


Рис. 43. Аппроксимация Эйлера и точное решение ($\Delta = 0.0125$)

eps =	eps =
9.9000068	7.0784787
2.8697423	2.1933545
0.8760517	0.6450769
0.2680284	0.207548
differ =	differ =
3.5685559	3.0205181
1.4146398	0.7308713
0.1572142	0.0768244
0.0284089	0.0193339

Рис. 47. Среднее значение абсолютной ошибки и половина длины конфиденциального интервала при $\Delta = 0.1; 0.05; 0.025; 0.0125$ ($T = 0.5; 0.25; 0.125; 0.0625$)

5. Заключение

Известные численные схемы Эйлера, Мильштейна, Тейлора для стохастических систем можно использовать для моделирования диффузионных процессов с марковскими переключениями, если представить их в виде (16), (18), (20). Причем данные схемы позволяют моделировать как переключаемые процессы, в которых переключаемая функция зависит от времени, так и состояние – зависимый механизм переключений.

Эксперименты подтвердили сходимость численных схем (16), (18), (20) к решению СДУ с марковскими переключениями при выполнении некоторых условий ограничения, накладываемых на функции, являющиеся коэффициентами в уравнении, содержащими переключаемую компоненту, и сам процесс переключений.

Все три схемы хорошо работают, если коэффициенты $a(\beta(x), x(t))$ и $\sigma(\beta(x), x(t))$ меняются в пределах некоторого значения.

Точность метода Тейлора выше при решении многих задач, но методы Эйлера и Мильштейна также могут иметь применение, особенно метод Мильштейна, схема которого проста, но эффективность высока.

Как показали эксперименты, с уменьшением размера шага дискретизации приходится уменьшать длину временного интервала $[0, T]$, иначе накапливаемая ошибка численной схемы превышает допустимые значения, и устойчивость схем сразу нарушается. Накопление ошибки происходит из-за того, что на каждом шаге винеровский процесс получает некоторое приращение, и соответственно, при малом размере шага и относительно большой длине временного интервала приращение $\Delta\omega$ становится настолько большим, что не компенсируется малым размером шага Δ , как предполагалось в теоретических исследованиях.

Еще раз отметим, что при численном решении в модели с переключением, которое зависит от фазового состояния, моменты переключения и состояния после него, тоже определяются приближенно. При этом возникает ряд вопросов по поводу определения того, как приближенное решение отличается от точного и что считать точным решением. В данной статье получены лишь приближенные статистические оценки на основе экспериментальных данных.

Что касается устойчивости при увеличении временных интервалов, значительно лучшие результаты показали неявные методы со встроенными в них переключаемыми компонентами, о чем невозможно рассказать в рамках одной статьи.

Отметим, что для решения практических задач, в частности уравнений математической физики, часто усиленных трудностями решения краевой задачи, решения стохастических дифференциальных уравнений выступают в качестве характеристик. Поэтому исторически строились методы разного порядка точности, вовлекающие информацию о винеровских процессах. Если моделирование решений системы СДУ предназначено для применения методов Монте-Карло, то совсем не обязательно решать весьма сложную задачу отыскания среднеквадратичных приближений. Как отмечает Мильштейн Г.Н., для многих задач математической физики нужно лишь, чтобы математическое ожидание $Ef(\bar{X}(t))$ было близко $Ef(X(t))$ для достаточно широкого класса функций f , т. е. чтобы приближение $\bar{X}(t)$ было близко к $X(t)$ в слабом смысле. В связи с этим слабые аппроксимации также представляют интерес в возможности их использования для решений СДУ с марковскими переключениями.

Литература

1. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 800 с.
2. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. (3 издание)*. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2009. 800 с.
3. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*// Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. - 2008. - №1.
4. МИЛЬШТЕЙН Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений*. Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1988. 224 с.
5. ЧЕРНЫХ Н. В., ПАКШИН П. В. Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с пере-

ключаемой диффузией // Управление большими системами / Сборник трудов. Выпуск 36: М.: ИПУ РАН, 2012. - 315 с.

6. G. GERORGE YIN, CHAO ZHU. *Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications.* Springer Science + Business Media, LLC 2010.
7. G. YIN, XUERONG MAO, CHENGGUI YUAN, AND DINGZHOU CAO. *Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions*// SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 41, №6, pp. 2335-2352, 2010.
8. PETER E. KLOEDEN, ECKHARD PLATEN, HENRI SCHURZ. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments.* Berlin: Springer – Verlag, 1994.

ARTICLE TITLE

Nadezda Chernykh, post-graduate student (nadezdacher@mail.ru).

Abstract: The paper considers mathematical models of hybrid systems in the form of stochastic differential equations with Markovian switchings of the diffusion component. An extension of Euler, Milsh-stein, Taylor schemes for numerical approximation of their solutions is proposed. Their stability is experimentally compared. Results of numerical modelling in SCILAB environment are presented.

Keywords: stochastic systems, Markovian switchings, Euler schemes, Milstein, Taylor for stochastic systems, convergence, stability, an error, a confidential interval.