УДК 519.71
ББК 32.817

# УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С БЛОКАМИ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА В ОБЪЕКТЕ УПРАВЛЕНИЯ

**Усков А. А.**[1]
(*Российский университет кооперации, Москва*)

*В статье предложен подход к анализу абсолютной устойчивости одного класса систем с блоками нечеткого логического вывода в объекте управления. Разработанные методы исследования систем доведены до уровня простых и удобных в инженерной практике методик.*

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, нечеткий логический вывод, система автоматического управления

## *1. Введение*

В настоящее время достаточно широкое распространение получили нечеткие системы управления. Применение нечеткой логики позволяет использовать субъективные знания (мнения) экспертов, что очень полезно при построении моделей сложных или плохо формализуемых объектов и процессов [3, 5].

В тоже время, блок нечеткого логического вывода с точки зрения теории автоматического управления представляет собой статическое звено с очень сложной нелинейной характеристикой, что значительно осложняет исследование систем с такими звеньями [5].

---

[1] *Усков Андрей Александрович, доктор технических наук, профессор* (*andrey@uskov.net, www.uskov.net*).

В статье предложен подход к анализу абсолютной устойчивости одного класса систем с блоками нечеткого логического вывода в объекте управления.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим замкнутую автономную нелинейную импульсную систему автоматического управления, приведенную на рис. 1.

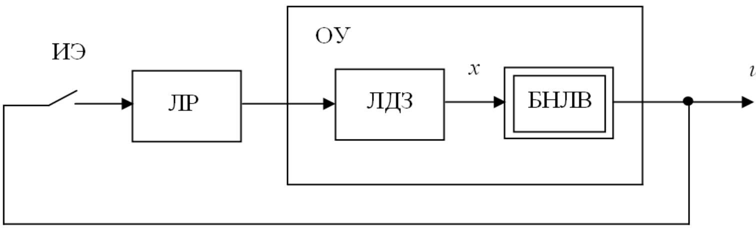


Рис.1. Система управления с односвязным объектом

Система состоит из импульсного элемента с амплитудно-импульсной модуляцией ИЭ, линейного регулятора ЛР и объекта управления ОУ. Структурно объект управления состоит из последовательного соединения линейного динамического звена ЛДЗ и статического нелинейного элемента – блок нечеткого логического вывода (БНЛВ).

Зависимость между выходным $u$ и входным $x$ сигналами нелинейного элемента задается набором нечетких продукционных правил:

$$\Pi_1\text{: если } x \text{ есть } A_1\text{, то } u=a_1,$$
$$\Pi_2\text{: если } x \text{ есть } A_2\text{, то } u=a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Pi_N\text{: если } x \text{ есть } A_N\text{, то } u=a_N,$$

где $A_1$, $A_2$, … $A_N$ – нечеткие множества, определенные на множестве действительных чисел R, $a_1$, $a_2$, … $a_N$ – действительные числа.

Выходной сигнал НЭ $u$ рассчитывается в соответствии алгоритмом нечеткого вывода Сугэно (Sugeno) нулевого порядка [3, 5]:

(1) $$u(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^{N} \mu_i(x)},$$

где $\mu_i(x)$ – функции принадлежности нечетких множеств $A_i$.

Необходимо получить достаточное условие асимптотической устойчивости системы с БНЛВ со структурой, приведенной на рис. 1

## *3. Характеристика блока нечеткого логического вывода*

Представим характеристику БНЛВ (1) в виде:

(2) $$u(x) = k\ (x) \cdot x,$$

где $k(x)$ – коэффициент передачи БНЛВ, зависящий от входного сигнала $x$.

В качестве характеристики нелинейной зависимости БНЛВ выберем коэффициент:

(3) $$K_H = \max_{\forall x \in R} |k(x)|,$$

Ввиду сложности определения численного значения $K_H$ для произвольного БНЛВ, воспользуемся его оценкой.

Решая совместно (1) – (3) полу

(4) $$K_H = \max_{x \in R} \frac{\left| \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \mu_i(x) \right|}{|x| \cdot \left| \sum_{i=1}^{N} \mu_i(x) \right|}.$$

Воспользовавшись свойством функции модуль [1], из предыдущего выражения получим:

(5) $$K_H \le \max_{x \in R} \frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i| \cdot \mu_i(x)}{|x| \cdot \sum_{i=1}^{N} \mu_i(x)}.$$

Отметим далее, что множитель

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} |a_i| \cdot \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^{m} \mu_i(x)} = X_c,$$

определяет, по сути, координаты центра масс $X_c$ невесомого стержня с расположенными на нем грузами с массами $\mu_i(x)$ в точках с координатами $|a_i|$, где $i = 1, 2, ..., N$ (один из возможных вариантов расположения грузов на стержне показан на рис. 2).

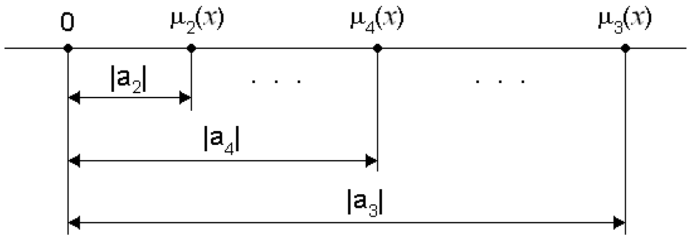


Рис. 2. Иллюстрация к выводу формулы

Очевидно, что координата точки центра масс $X_c$ не может превышать координаты крайнего справа груза, имеющего массу, отличную от 0.

На основании свойства центра масс [2], можно записать:
(6)

$$K_H \le \max_{x\in R}\frac{1}{|x|}\cdot\max[|a_1|\cdot 1_0(\mu_1(x)), |a_2|\cdot 1_0(\mu_2(x), \ldots |a_n|\cdot 1_0(\mu_N(x))],$$

где $1_0(t)=\begin{cases}1, \text{ при } & t>0,\\ 0, \text{ при } & t=0.\end{cases}$ – единичная функция.

Последнее выражение можно привести к виду:

(7) $$K_{H0}=\max(\max_{x\in B_1}\frac{|a_1|}{|x|}, \max_{x\in B_2}\frac{|a_2|}{|x|}, \ldots \max_{x\in B_N}\frac{|a_N|}{|x|}) \ge K_H,$$

где $B_1$, $B_2$, … $B_N$ – носители нечетких множеств $A_1$, $A_2$, … $A_N$ соответственно [3].

Методику использования соотношения (7) поясним на примере.

Пример 1

Рассмотрим БНЛВ, описываемый набором нечетких правил:

$П_1$: если *x* есть Z, то *u*=0,
$П_2$: если *x* есть PS, то *u*=1,
$П_3$: если *x* есть PM, то *u*=2,
$П_4$: если *x* есть NS, то *u*=-1,
$П_5$: если *x* есть NM, то *u*=-2.

На рис. 3 приведены функции принадлежности нечетких множеств Z, PS, PM, NS и NM.

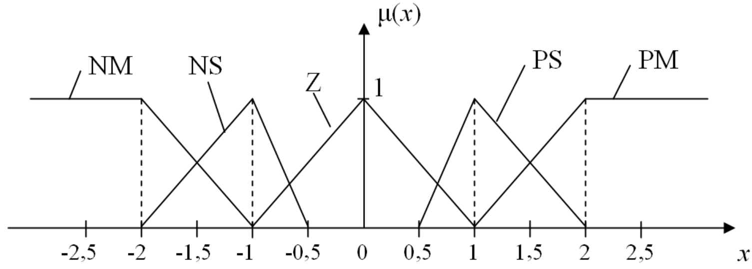


Рис. 3. Функции принадлежности нечетких множеств

Рассмотрим применение формулы (7) в данном случае.

Для правила 1) носитель нечеткого множества Z – $x \in [-1, 1]$, значение $a_1 = 0$, следовательно $\max\limits_{x\in[-1,1]} \frac{|0|}{|x|} = \lim\limits_{|x|\to 0} \frac{0}{|x|}$. Анализ приведенного предела показывает, что его значение не превышает 1.

Для правила 2) носитель нечеткого множества PS – $x \in [0.5, 2]$, значение $a_1 = 1$, следовательно $\max\limits_{x\in[0.5,\,2]} \frac{|1|}{|x|} = 2$.

Для правила 3) носитель нечеткого множества PM – $x \in [1, +\infty]$, значение $a_1 = 2$, следовательно $\max\limits_{x\in[1,\,+\infty]} \frac{|2|}{|x|} = 2$.

Для правила 4) носитель нечеткого множества NS – $x \in [-2, -0.5]$, значение $a_1 = -1$, следовательно $\max\limits_{x\in[-2,\,-0.5]} \frac{|-1|}{|x|} = 2$.

Для правила 5) носитель нечеткого множества NM – $x \in [-1, -\infty]$, значение $a_1 = -2$, следовательно $\max\limits_{x\in[-\infty,\,-1]} \frac{|-2|}{|x|} = 2$.

Подставляя данные частные результаты в выражение (7) получим $K_{H0} = \max(1, 2, 2, 2, 2, 2) = 2$.

## 4. Достаточное условие устойчивости

Используя описанную методику определения численного значения величины $K_{H0}$, можно получить достаточное условие асимптотической устойчивости системы на рис. 1.

Если характеристика БНЛВ находится в 1 и 3 квадрантах, а импульсная линейная часть системы устойчива, к рассматриваемой системе применим геометрический критерий абсолютной устойчивости Я.З. Цыпкина [2, 6]. Достаточное условие асимптотической устойчивости в целом положения равновесия в данном случае определяется неравенством:

(8) $\operatorname{Re} W^*(j\overline{w}) + \dfrac{1}{K_{H0}} > 0,$

где $W^*(j\overline{w})$ – комплексный коэффициент передачи последовательно соединенных импульсного элемента ИЭ, линейного регулятора ЛР и линейного динамического звена ЛДЗ.

Отметим, что области устойчивости, полученные с помощью критерия Я.З. Цыпкина не уже областей полученных с помощью второго метода А.М. Ляпунова с квадратичной функцией [2, 6].

<u>Пример 2</u>

Рассмотрим автономную систему, приведенную на рис.1.

Последовательно соединенные ЛР и ЛДЗ описывается передаточной функцией $W(p) = \dfrac{k}{1+p \cdot T}$. Импульсный элемент с фиксатором нулевого порядка имеет период квантования $T_0$. Используется БНЛВ из примера 1.

Для системы на рис.1 справедливо разностное уравнение $x_{m+1} = e^{-\frac{T_0}{T}} \cdot x_m + u_m \cdot k \cdot (1 - e^{-\frac{T_0}{T}})$ [1]. Комплексный коэффициент передачи импульсной линейной части системы $W^*(j\overline{w}) = \dfrac{(1-e^{-\frac{T_0}{T}}) \cdot k}{e^{j\overline{w}} - e^{-\frac{T_0}{T}}}$. В соответствии с неравенством (8) несложно получить достаточное условие асимптотической устойчивости в целом положения равновесия рассматриваемой системы:

$$k < \frac{1+e^{-\frac{T_0}{T}}}{(1-e^{-\frac{T_0}{T}})\cdot K_{H0}}.$$

Приняв $K_{H0}=2$ (из примера 1) и $T_0=0.1$, определим область устойчивости рассматриваемой системы рис. 3 (область ниже линии 1, показана заштриховкой). Для сравнения на данном рисунке показана также действительная область устойчивости системы (область ниже линии 4).

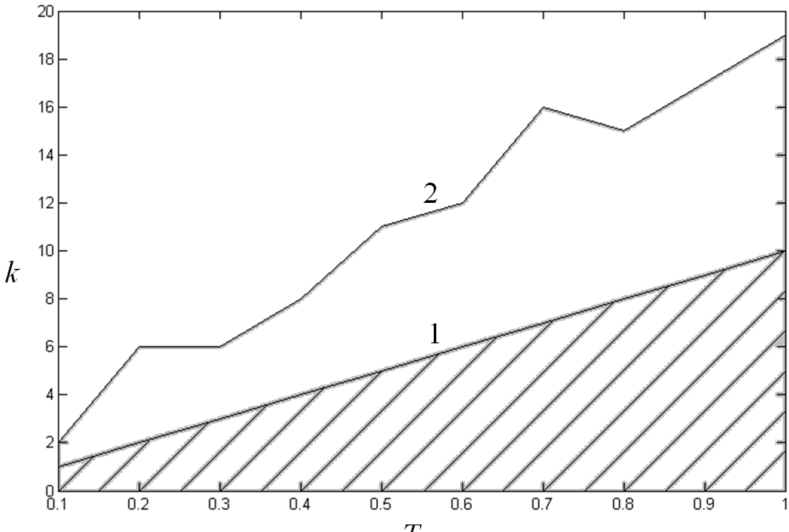


Рис. 4. Область устойчивости системы.

Согласно рис. 3 предлагаемое достаточное условие позволяет определить около 50% истинной области асимптотической устойчивости в пространстве параметров *k* и *T*.

## *5. Система с несколькими БНЛВ*

Обобщим приведенные выше результаты на случай системы с несколькими БНЛВ.

Рассмотрим автономную импульсную систему с многосвязным объектом управления рис. 5.

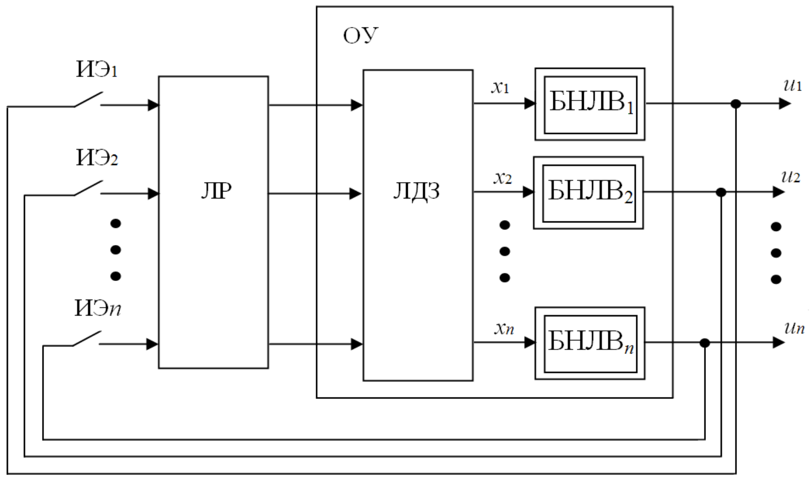


Рис.5. Система управления с многосвязным объектом

Система состоит из импульсных элементов с амплитудно-импульсной модуляцией ИЭ$_i$ ($i$=1, 2, … $n$), работающих синхронно, линейного регулятора ЛР и объекта управления ОУ. Структурно объект управления состоит из линейного динамического звена ЛДЗ и статических нелинейных элементов БНЛВ$_i$ ($i$=1, 2, … $n$).

Допустим, что характеристики БНЛВ описываются наборами нечетких продукционных правил и находятся в 1 и 3 квадрантах. Для каждого из БНЛВ по формуле (7) определены коэффициенты $K_{H0i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, которые представлены в виде матрицы

$$(9)\quad \mathbf{K}_{\mathbf{H0}} = \begin{bmatrix} K_{H01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{H02} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_{H0n} \end{bmatrix}.$$

Согласно критерию Я.З. Цыпкина для систем с несколькими нелинейностями [6], если импульсная линейная часть системы на рис. 4 устойчива и существует действительное число $p$ такое, что выполняется неравенство

$$(10)\quad \frac{1}{2}\left[\mathbf{K}_{\mathbf{H0}}{}^{p}\cdot \mathbf{W}^{*}(j\overline{w}) + \mathbf{W}^{*}(-j\overline{w})\cdot \mathbf{K}_{\mathbf{H0}}{}^{p}\right] + \mathbf{K}_{\mathbf{H0}}{}^{p-1} > 0\,,\ 0 \le \overline{w} \le \pi\,,$$

где $\mathbf{W}^{*}(j\overline{w})$ – матрица комплексных коэффициентов передачи импульсной линейной части системы,
то рассматриваемая система будет асимптотически устойчива в целом.

## *Выводы*

В статье предложено достаточное условие асимптотической устойчивости в целом систем управления с односвязными блоками нечеткого логического вывода Сугэно нулевого порядка, позволяющее определять область устойчивости в пространстве параметров системы.

Разработанный метод исследования может быть полезен при анализе и синтезе систем управления с нечеткой логикой.

## *Литература*


1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1981. - 723 с.
2. Видаль П. Нелинейные импульсные системы. М.: Энергия, 1974. -336 с.
3. Круглов В. В., Дли М. И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой

логики и нечеткого вывода. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. - 256 с.

4. Круглов В.В., Усков А.А. Достаточное условие устойчивости замкнутых систем управления с нечеткими логическими регуляторами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 4. С. 47-51.

5. Усков А.А., Кузьмин А.В. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика. М.: Горячая Линия – Телеком, 2004. - 143 с.

6. Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. - 416 с.

## STABILITY OF SYSTEMS WITH BLOCKS OF THE FUZZY INFERENCE IN PLANT OF CONTROL

**Andrey Uskov**, Russian University of Cooperation, Moscow, Doctor of Science, professor.

Abstract: In paper the approach to the analysis of a terrain clearance stability of one class of systems with blocks of the fuzzy inference in plant of control is offered. The designed research techniques of systems are lead up to a level prime and convenient in engineering practice of procedures.

Keywords: asymptotic stability, fuzzy logic conclusion, system of automatic control