

УДК 519.71
ББК 32.817

АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ГРУППОВЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

Усков А. А.¹

(Российский университет кооперации, Москва)

В статье предложены групповые алгебраические операции над нечеткими числами – операции, при применении которых нечеткие числа образуют абелевы группы по операциям сложения и умножения. Показано, что применение групповых алгебраических операций при нечетком моделировании, в ряде случаев, позволяет получить результаты лучше согласующиеся с практикой, чем те которые получены с применением традиционных нечетких чисел. В частности, позволяет преодолеть, так называемый, эффект завышения неопределенности, когда полученный при выполнении последовательности алгебраических операций результат является значительно более неопределенным, чем это может следовать из исходных данных.

Ключевые слова: абелева группа, арифметическая операция, нечеткое число, обратный элемент, противоположный элемент, система автоматического управления.

1. Введение

Математическое моделирование сложных систем с применением аппарата теории нечетких множеств и нечеткой логики, обычно, требует выполнения большого объема операций над нечеткими числами. В целях снижения объема вычислений при

¹ Усков Андрей Александрович, доктор технических наук, профессор (andrey@uskov.net, www.uskov.net).

применении теории нечетких множеств используются нечеткие LR -числа [1, 4].

Нечеткое LR -число A с модой a задается с помощью функции принадлежности следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & \text{при } x \leq a; \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & \text{при } x > a; \end{cases}$$

где a – мода, $\alpha, \beta > 0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости.

Функции $L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right)$ и $R\left(\frac{x-a}{\beta}\right)$ обладают следующими

свойствами:

1) не возрастают на множестве неотрицательных значений аргумента;

$$2) \quad L\left(-\frac{a-x}{\alpha}\right) = L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), \quad R\left(-\frac{x-a}{\beta}\right) = R\left(\frac{x-a}{\beta}\right);$$

$$3) \quad L(0) = R(0).$$

При заданных LR -функциях число A задается тройкой $A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$.

Для того чтобы обычные четкие числа могли участвовать в арифметике нечетких чисел LR -типа, при $\alpha=0$ и $\beta=0$ принимается

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(0) = R(0), & \text{при } x = a, \\ 0, & \text{при } x \neq a. \end{cases}$$

Такое определение соответствует числам с нулевыми коэффициентами нечеткости $A = (a, 0, 0)_{LR}$ – обычным четким числам.

Традиционно арифметические операции над нечеткими LR -числами при малых значениях коэффициентов нечеткости $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определяются следующим образом [1, 4]:

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} + (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR},$$

$$\begin{aligned}
 -(m, \alpha, \beta)_{LR} &= (-m, \beta, \alpha)_{LR} - \text{противоположный элемент,} \\
 (m, \alpha, \beta)_{LR} - (n, \gamma, \delta)_{LR} &= (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}, \\
 (m, \alpha, \beta)_{LR} \cdot (n, \gamma, \delta)_{LR} &= (mn, \alpha n + \gamma m, \beta n + \delta m)_{LR}, \quad m > 0, \quad n > 0, \\
 (m, \alpha, \beta)_{LR}^{-1} &= \left(\frac{1}{m}, \frac{\beta}{m^2}, \frac{\alpha}{m^2} \right)_{LR}, \quad m > 0 - \text{обратный элемент,} \\
 (m, \alpha, \beta)_{LR} : (n, \gamma, \delta)_{LR} &= \left(\frac{m}{n}, \frac{\alpha n + \delta m}{n^2}, \frac{\beta n + \gamma m}{n^2} \right)_{LR}, \quad m > 0, \quad n > 0.
 \end{aligned}$$

Нулевой элемент для нечетких чисел определяется как

$$\tilde{0} = (0, 0, 0)_{LR}.$$

Единичный элемент — $\tilde{1} = (1, 0, 0)_{LR}$.

Как легко убедиться, нечеткие числа, определяемые традиционным образом, не являются полем, в частности:

$\tilde{a} + (-\tilde{a}) \neq \tilde{0}$ — не являются абелевой группой по операции сложения;

$\tilde{a} \cdot \tilde{a}^{-1} \neq \tilde{1}$ — не являются абелевой группой по операции умножения [3].

В статье предложены групповые алгебраические операции над нечеткими числами — операции, при применении которых нечеткие числа образуют абелевы группы по операциям сложения и умножения. Показано, что применение групповых алгебраических операций при нечетком моделировании, в ряде случаев, позволяет получить результаты лучше согласующиеся с практикой, чем те которые получены с применением традиционных нечетких чисел. В частности, позволяет преодолеть, так называемый, эффект завышения неопределенности, когда полученный при выполнении последовательности алгебраических операций результат является значительно более неопределенным, чем это может следовать из исходных данных.

2. Групповые арифметические операции над нечеткими числами

Введем в рассмотрение так называемые групповые операции над нечеткими числами LR-типа, для чего определим противоположные и обратные элементы следующим образом:

$-(m, \alpha, \beta)_{LR} = (-m, -\alpha, -\beta)_{LR}$ – противоположный элемент,

$(m, \alpha, \beta)^{-1}_{LR} = \left(\frac{1}{m}, -\frac{\alpha}{m^2}, -\frac{\beta}{m^2} \right)_{LR}$, $m > 0$ – обратный элемент.

Очевидно, при таком определении противоположного и обратного элементов будут выполняться аксиомы поля:

$\tilde{a} + (-\tilde{a}) = \tilde{0}$ и $\tilde{a} \cdot \tilde{a}^{-1} = \tilde{1}$, т.е. нечеткие числа будут образовывать группы по операциям сложения и умножения.

В дальнейшем нечеткие числа LR-типа с введенными выше противоположным и обратным элементами будут называться групповыми, а описанные в литературе [1, 4] – традиционными.

Характерной особенностью групповых нечетких чисел является то обстоятельство, что противоположный и обратный элементы имеют отрицательную нечеткость, т.е. не имеют очевидного физического смысла.

Рассмотрим на примерах, в каком случае следует применять традиционные, а в каком групповые нечеткие числа.

Пример 1

Имеется четкий сигнал x_0 , определяемый числом $x_0 = (x_0, 0, 0)_{LR}$, к которому прибавляется сигнал z_1 , определяемый нечетким числом $\tilde{z}_1 = (m, \alpha, \beta)_{LR}$, затем из полученного сигнала вычитается сигнал z_2 , определяемый нечетким числом имеющее точно такое же центральное значение и степень отклонения, что и z_1 , т.е. $\tilde{z}_2 = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ (см. рисунок 1).

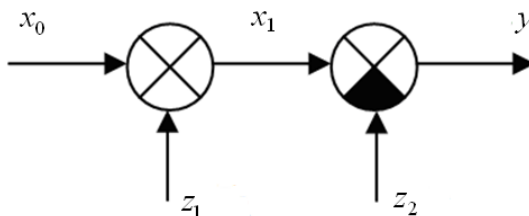


Рис. 1. Система из примера 1

При использовании традиционных нечетких чисел получим:

(1) $\tilde{y} = (x_0, \alpha + \beta, \alpha + \beta)_{LR}$.

Применение же групповых нечетких чисел дает:

(2) $\tilde{y} = (x_0, 0, 0)_{LR}$.

Очевидно, верной в данном случае является формула (1) и здесь нужно применять традиционные нечеткие числа.

Пример 2

Имеется четкий сигнал x_0 , определяемый числом $x_0 = (x_0, 0, 0)_{LR}$, к которому прибавляется сигнал z , определяемый нечетким числом $\tilde{z} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$, затем из полученной суммы сигнал z вычитается (см. рисунок 2).

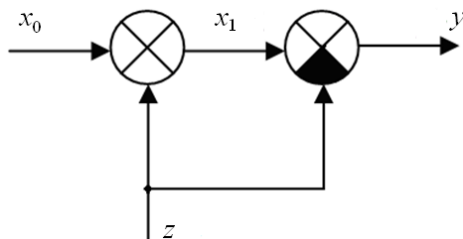


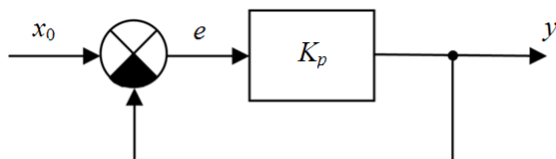
Рис. 2. Система из примера 2

При применении традиционных нечетких чисел получим формулу (1), применение же групповых нечетких чисел дает результат, определяемый формулой (2).

Очевидно, в данном случае справедлива формула (2), полученная на основе групповых нечетких чисел, а применение традиционных нечетких чисел (см. формулу (1)) приведет к завышению степени нечеткости результата.

3. Анализ замкнутой системы с нечетким параметром

Рассмотрим замкнутую статическую систему автоматического управления (САУ), структурная схема которой приведена на рисунке 3.



x_0 – входной сигнал системы,
 y – выходной сигнал системы,
 e – ошибка регулирования,
 K_p – коэффициент передачи разомкнутой системы

Рис. 3. Структурная схема замкнутой САУ

Предположим, что коэффициент передачи разомкнутой системы K_p – суть нечеткое число в LR -форме $\tilde{K}_p = (K_{p0}, \Delta_{K_p}, \Delta_{K_p})$, а входной сигнал системы x_0 – “четкое” число (представим его как нечеткое с нулевой нечеткостью $\tilde{x}_0 = (x_0, 0, 0)_{LR}$). При этом, очевидно, выходной сигнал системы – нечеткое число $\tilde{y} = (y_0, \Delta_y, \Delta_y)_{LR}$.

Введем в рассмотрение коэффициенты вариации нечеткости коэффициента передачи разомкнутой системы:

$$\xi_{K_p} = \frac{\Delta_{K_p}}{K_{p0}} \cdot 100\%,$$

и выходного сигнала

$$\xi_y = \frac{\Delta_y}{y_0} \cdot 100\%.$$

Необходимо найти зависимость коэффициента вариации нечеткости выходного сигнала ξ_y от величины коэффициента вариации нечеткости коэффициента передачи разомкнутой системы ξ_{K_p} .

Вычисления на основе групповых нечетких чисел.

Выходной сигнал замкнутой системы определяется формулой [4]:

$$(3) \quad \tilde{y} = \frac{\tilde{K}_p}{1 + \tilde{K}_p} \cdot \tilde{x}_0 = \frac{(K_{p0}, \Delta_{K_p}, \Delta_{K_p})_{LR}}{1 + (K_{p0}, \Delta_{K_p}, \Delta_{K_p})_{LR}} \cdot (x_0, 0, 0)_{LR}.$$

После проведения преобразований получим:

$$\tilde{y} = \left(\frac{K_{p0} \cdot x_0}{1 + K_{p0}}, \frac{\Delta_{K_p} \cdot x_0}{(1 + K_{p0})^2}, \frac{\Delta_{K_p} \cdot x_0}{(1 + K_{p0})^2} \right),$$

$$\xi_y = \frac{1}{1 + K_{p0}} \cdot \frac{\Delta_{K_p}}{K_{p0}} \cdot 100\% = \frac{\xi_{K_p}}{1 + K_{p0}}.$$

Полученный результат соответствует известным положениям теории автоматического управления о том, что отрицательная обратная связь уменьшает влияние относительных изменений параметров системы на выходной сигнал САУ в $K_p + 1$ раз [2].

Вычисления на основе традиционных нечетких чисел.

После проведения преобразований выражения (3) получим:

$$\tilde{y} = \left(\frac{K_{p0} \cdot x_0}{1 + K_{p0}}, \frac{\Delta_{K_p} \cdot (1 + 2K_{p0}) \cdot x_0}{(1 + K_{p0})^2}, \frac{\Delta_{K_p} \cdot (1 + 2K_{p0}) \cdot x_0}{(1 + K_{p0})^2} \right),$$

$$\xi_y = \frac{1 + 2K_{p0}}{1 + K_{p0}} \cdot \frac{\Delta_{K_p}}{K_{p0}} \cdot 100\%.$$

С учетом того, что $K_{p0} \gg 1$ можно записать:

$$\xi_y \approx 2 \cdot \frac{\Delta_{K_P}}{K_{P0}} \cdot 100\% = 2\xi_{K_P}.$$

Согласно данной формуле, отрицательная обратная связь не уменьшает степень неопределенности выходного сигнала, что неверно.

Таким образом, только применение для решения рассматриваемой задачи предложенного аппарата групповых нечетких чисел позволяет получить правильный результат.

Выводы

Рассмотрение приведенных, а также ряда других примеров позволяют сформулировать следующие выводы:

если в системе имеется единственный нечеткий параметр или сигнал, влияние которого может быть скомпенсировано за счет отрицательной обратной связи, то при анализе необходимо использовать групповые нечеткие числа, применение в этом случае традиционных нечетких чисел зачастую приводит к завышению степени нечеткости результата (чрезмерному размыванию результата);

если в системе имеются несколько независимых нечетких параметров или сигналов, которые физически не могут компенсировать друг друга, то необходимо использовать традиционные нечеткие числа.

Предложенный в статье аппарат групповых нечетких чисел может найти широкое применение при анализе и синтезе систем обработки информации и управления.

Литература

1. АЛТУНИН А.Е., СЕМУХИН М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с.

2. БЕСЕКЕРСКИЙ В.А., ПОПОВ Е.П. Теория систем автоматического управления. М.: Профессия, 2007. – 752 с.
3. КУРОШ А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. – 431 с.
4. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А.Поспелова. М.: Наука, 1986. – 312 с.

ANALYSIS OF THE SYSTEMS CONTROL BY MEANS GROUP FUZZY NUMBERS

Andrey Uskov, Russian University of Cooperation, Moscow, Doctor of Science, professor.

Abstract: Group algebraic operations over fuzzy numbers – operations at which application indistinct numbers derivate абелевы groups on addition and multiplication operations are offered. It is shown that application of group algebraic operations at fuzzy modeling, in some cases, allows receiving results better согласующиеся with practice, than those which are received with application of traditional fuzzy numbers.

Keywords: abelian group, arithmetic operations, fuzzy number, reverse element, opposite element, the system of automatic control