УДК 519.71
ББК 32.817

КОМПЛЕКСНЫЙ И МАТРИЧНЫЙ МЕТОДЫ ВЫПОЛНЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ

Усков А. А.[1], Киселев И. А.[2]

(*Российский университет кооперации, Москва*)

Предложены теоремы, позволяющие сводить арифметические операции над нечеткими числами LR-типа к арифметическим операциям над комплексными числами или матрицами, что дает возможность упростить выполнение указанных арифметических операций (в частности с применением систем компьютерной математики) и использовать наглядное графическое их представление на комплексной плоскости (в виде векторных диаграмм и годографов).

Ключевые слова: арифметические операции, комплексные числа, матрицы, нечеткие числа.

1. Введение

Аппарат нечеткой логики широко используется при математическом описании сложных систем в условиях неопределенности, позволяя формализовать знания, представленные в качественной форме и не требуя выполнения предпосылок применимости теории вероятностей [1, 6, 7].

---

[1] *Усков Андрей Александрович, доктор технических наук, профессор* (*andrey@uskov.net, www.uskov.net*).
[2] *Киселев Игорь Александрович, аспирант.*

Нечеткие числа – нечеткие переменные, определенные на числовой оси. Нечеткое число определяется, как нечеткое множество A на множестве действительных чисел R с функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0,1]$, где x – действительное число, т.е. $x \in \mathrm{R}$ [1, 6].

Нечеткие числа LR-типа – это разновидность нечетких чисел специального вида, задаваемых по определенным правилам с целью снижения объема вычислений при операциях над ними [1, 6]. Функции принадлежности нечетких чисел LR-типа задаются с помощью невозрастающих четных неотрицательных действительных функций действительного аргумента $L(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих свойствам: а) $L(-x)=L(x)$, $R(-x)=R(x)$; б) $L(0)=R(0)$.

Пусть $L(x)$ и $R(x)$ - функции LR-типа. Унимодальное нечеткое число A с модой a (т.е. $\mu_A(a)=1$) с помощью $L(x)$ и $R(x)$ задается следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a - x}{\alpha}\right) & \text{при} \quad x \le a, \\ R\left(\dfrac{x - a}{\beta}\right) & \text{при} \, x > a. \end{cases}$$

где a - мода; $\alpha > 0$, $\beta > 0$ - левый и правый коэффициенты нечеткости.

Таким образом, при заданных $L(x)$ и $R(x)$ нечеткое число LR-типа задается тройкой (a, α, β).

Нечеткое число LR-типа будем называть симметричными, если левый и правый коэффициенты нечеткости равны, т.е. $\alpha = \beta$.

Предположим, имеются нечеткие числа LR-типа: $\tilde{\boldsymbol{a}} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ и $\tilde{\boldsymbol{b}} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$.

Арифметические операции над нечеткими LR-числами определяются следующим образом [1, 6]:

сложение

$(m, \alpha, \beta)_{LR} + (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}$;

умножение

$(m, \alpha, \beta)_{LR} \cdot (n, \gamma, \delta)_{LR} = (mn, \alpha n + \gamma m, \beta n + \delta m)_{LR}$,
$m > 0, n > 0$;

противоположный элемент
$-(m,\alpha,\beta)_{LR}=(-m,\beta,\alpha)_{LR}$;
обратный элемент
$(m,\alpha,\beta)_{LR}^{-1}=\left(\frac{1}{m},\frac{\beta}{m^2},\frac{\alpha}{m^2}\right)_{LR}, m>0.$

В статье показано, что приведенные арифметические операции можно выполнить, переходя от нечетких чисел к соответствующим им комплексным числам или матрицам, что позволяет упростить выполнение указанных арифметических операций (в частности с применением систем компьютерной математики) и использовать наглядные графические их представления на комплексной плоскости.

2. Комплексный метод выполнения арифметических операций над нечеткими числами

Приведем теорему, определяющую связь между арифметическими операциями над симметричными нечеткими числами *LR*-типа и комплексными числами.

Теорема 1. Введем в рассмотрение преобразование, ставящее в однозначное соответствие произвольное симметричное число *LR*-типа $\tilde{\boldsymbol{x}}=(y,z,z)_{LR}$ и комплексное число $\boldsymbol{x}=y+jz$, где $j=\sqrt{-1}$ т.е. $\tilde{\boldsymbol{x}}\leftrightarrow\boldsymbol{x}$. Пусть далее, имеются симметричные нечеткие числа *LR*-типа: $\tilde{\boldsymbol{a}}=(m,\alpha,\alpha)_{LR}$, и $\tilde{\boldsymbol{b}}=(n,\gamma,\gamma)_{LR}$. Сопоставим им комплексные числа: $\tilde{\boldsymbol{a}}\leftrightarrow\boldsymbol{a}=m+j\alpha$ и $\tilde{\boldsymbol{b}}\leftrightarrow\mathbf{b}=n+j\gamma$.

Тогда при $m\cdot n\gg\alpha\cdot\gamma$, $m>0$ и $m\gg\alpha$ арифметические операции над нечеткими числами $\tilde{\boldsymbol{a}}$ и $\tilde{\boldsymbol{b}}$ соответствуют операциям над комплексными числами:

$$\tilde{\boldsymbol{a}}+\tilde{\boldsymbol{b}}\leftrightarrow\boldsymbol{a}+\mathbf{b},$$
$$\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}\leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b},$$
$$-\tilde{\boldsymbol{a}}\leftrightarrow-\bar{\boldsymbol{a}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{-1}\leftrightarrow\bar{\boldsymbol{a}}^{-1},$$

где $\bar{\mathbf{a}}=m-j\alpha$ – комплексное сопряженное по отношению к $\boldsymbol{a}$.

Доказательство

Сравним результаты арифметических операций над нечеткими числами $\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}}$ и их комплексными изображениями $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ [1, 3, 6]:

$\widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} = (m + n, \alpha + \gamma, \alpha + \gamma)_{LR}$,

$\boldsymbol{a} + \mathbf{b} = (m + n) + j(\alpha + \gamma)$.

Таким образом:

$\widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} \leftrightarrow \boldsymbol{a} + \mathbf{b}$**;**

$\widetilde{\boldsymbol{a}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{b}} = (m \cdot n, m \cdot \gamma + n \cdot \alpha,\ m \cdot \gamma + n \cdot \alpha)_{LR}$,

$\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{b} = (m + j\alpha) \cdot (n + j\gamma) = m \cdot n + j(m \cdot \gamma + n \cdot \alpha) -$
$-\alpha \cdot \gamma$.

С учетом того, что для нечетких чисел $m \cdot n \gg \alpha \cdot \gamma$ имеем:

$\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{b} \approx m \cdot n + j(m \cdot \gamma + n \cdot \alpha)$.

Таким образом:

$\widetilde{\boldsymbol{a}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{b}} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{b}$.

$-\widetilde{\boldsymbol{a}} = (-m, \alpha, \alpha)_{LR}$,

$-\overline{\boldsymbol{a}} = -m + j \cdot \alpha$.

Таким образом:

$-\widetilde{\boldsymbol{a}} \leftrightarrow -\overline{\boldsymbol{a}}$.

$\widetilde{\boldsymbol{a}}^{-1} = \left(\frac{1}{m}, \frac{\alpha}{m^2}, \frac{\alpha}{m^2}\right)_{LR}, m > 0$,

$$\overline{\boldsymbol{a}}^{-1} = \frac{m + j\alpha}{m^2 + \alpha^2}.$$

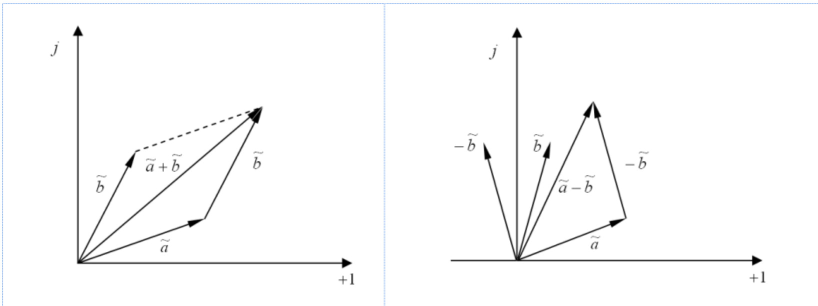
С учетом того, что для нечетких чисел $m \gg \alpha$ имеем:

$\overline{\boldsymbol{a}}^{-1} \approx \frac{1}{m} + j\frac{\alpha}{m^2}$,

$\widetilde{\boldsymbol{a}}^{-1} \leftrightarrow \overline{\boldsymbol{a}}^{-1}$. Теорема доказана. ■

Из приведенной теоремы, в частности, следует, что симметричные нечеткие числа *LR*-типа можно изображать на комплексной плоскости в виде векторов: проекция вектора на действительную ось – “четкая” часть нечеткого числа, проекция на мнимую – степень нечеткости.

На рисунке 1 представлена графическая иллюстрация выполнения арифметических операций сложения и вычитания над нечеткими числами на комплексной плоскости.



а) Сложение двух нечетких чисел | б) Вычитание двух нечетких чисел

Рисунок 1 – Графическая иллюстрация арифметических операций над нечеткими числами на комплексной плоскости

3. Матричный метод выполнения арифметических операций над нечеткими числами

Приведем теорему, определяющую связь между арифметическими операциями над симметричными нечеткими числами *LR*-типа и матрицами.

Теорема 2. Введем в рассмотрение преобразование ставящее в однозначное соответствие произвольное симметричное число *LR*-типа $\widetilde{\boldsymbol{x}} = (y, z, z)_{LR}$ и матрицу $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} y & -z \\ z & y \end{bmatrix}$ т.е. $\widetilde{\boldsymbol{x}} \leftrightarrow \boldsymbol{x}$. Пусть далее имеются симметричные нечеткие числа *LR*-типа: $\widetilde{\boldsymbol{a}} = (m, \alpha, \alpha)_{LR}$, и $\widetilde{\boldsymbol{b}} = (n, \gamma, \gamma)_{LR}$. Сопоставим им матрицы: $\widetilde{\boldsymbol{a}} \leftrightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} m & -\alpha \\ \alpha & m \end{bmatrix}$ и $\widetilde{\boldsymbol{b}} \leftrightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} n & -\gamma \\ \gamma & n \end{bmatrix}$.

Тогда при $m \cdot n \gg \alpha \cdot \gamma$, $m > 0$ и $m \gg \alpha$ арифметические операции над симметричными нечеткими числами *LR*-типа $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ соответствуют операциям над матрицами:

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{b}} \leftrightarrow \boldsymbol{A} + \mathbf{B},$$

$$-\widetilde{\boldsymbol{a}} \leftrightarrow -\mathbf{A}^T,$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}} \cdot \tilde{\boldsymbol{b}} \leftrightarrow \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{B},$$
$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{-1} \leftrightarrow \left[\mathbf{A}^{T}\right]^{-1}.$$

Доказательство теоремы основано на изоморфизме комплексных чисел $\boldsymbol{x} = y + jz$ и матриц вида $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} y & -z \\ z & y \end{bmatrix}$ [6, 7] , а также эквивалентности арифметических операций над нечеткими и комплексными числами (см. теорему 1).

4. Численный пример

В качестве примера рассмотрим расчет чистого приведенного дохода (ЧПД) в условиях неопределенности [4]. Все расчеты будем проводить с использованием системы компьютерной математики MathCAD.

Предположим, что месячный индекс инфляции, поступления и отток денежных средств в m-м месяце заданы симметричными нечеткими числами LR-типа: $\tilde{\boldsymbol{i}} = (0{,}01; 0{,}002; 0{,}002)$, $\tilde{\boldsymbol{p}}_m = (P_m, p_m, p_m)$ и $\tilde{\boldsymbol{o}}_m = (O_m, o_m, o_m)$ соответственно.

Сведем значения поступления и оттока денежных средств в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения поступления и оттока денежных средств

Номер месяца m	P_m	p_m	O_m	o_m
1	100	10	20	4
2	120	10	20	4
3	130	10	20	4
4	100	10	15	3
5	110	10	15	3
6	160	20	15	3
7	170	20	10	2
8	180	20	10	2
9	150	20	10	2
10	150	20	5	1

Руководствуясь теоремой 1, рассчитаем ЧПД с применением комплексных чисел. Для этого осуществим переход от нечетких симметричных чисел *LR*-типа к комплексным числам:

(1) $\tilde{\boldsymbol{i}} \leftrightarrow \boldsymbol{i} = 0{,}01 + 0{,}002\,j$,

(2) $\tilde{\boldsymbol{p}}_m \leftrightarrow \boldsymbol{p}_m = P_m + p_m\,j$,

(3) $\tilde{\boldsymbol{o}}_m \leftrightarrow \boldsymbol{o}_m = O_m + o_m\,j$.

Используя формулу расчета ЧПД [4]:

(4) $\widetilde{\boldsymbol{npv}} = \sum_{m=1}^{N} \left(\tilde{\boldsymbol{p}}_m - \tilde{\boldsymbol{o}}_m\right) \cdot \frac{1}{\left(1+\tilde{\boldsymbol{i}}\right)^m}$,

где N – общее количество месяцев,

и теорему 1 получим формулу для расчета ЧПД с применением комплексных чисел:

(5) $\boldsymbol{npv} = \sum_{m=1}^{N} \left[(\boldsymbol{p}_m - \boldsymbol{o}_m) \cdot \left[\overline{(1+\boldsymbol{i})^m}\right]^{-1} \right]$

Реализовав в MathCAD расчет ЧПД с применением формулы (5), получим: $\boldsymbol{npv} = 1156{,}55 + 127{,}88j$.

Осуществив обратный переход от комплексных к нечетким числам получим значение ЧПД:

$\widetilde{\boldsymbol{npv}}$ =(1156,55; 127,88; 127,88).

На рисунке 2 изображена векторная диаграмма определения суммарного ЧПД.

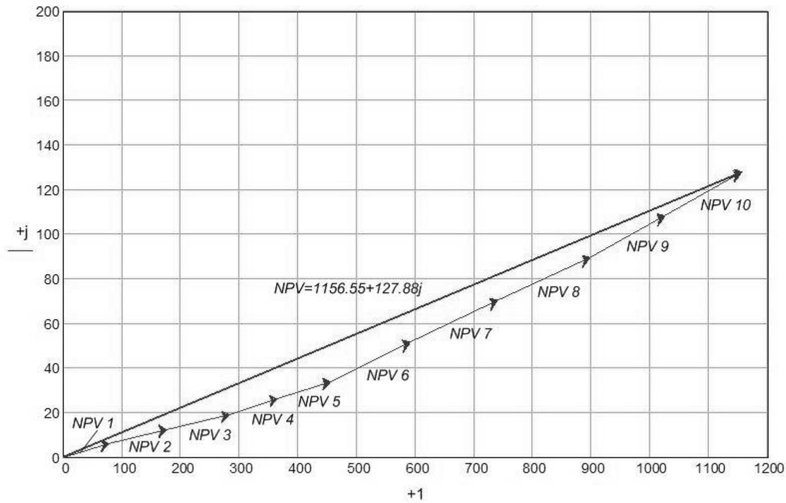


Рисунок 2 – Векторная диаграмма определения суммарного ЧПД

Аналогичным образом согласно теореме 2 заменим нечеткие числа их матричными изображениями:

$$(6)\quad \tilde{\boldsymbol{p}}_m \leftrightarrow \mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} P_m & -p_m \\ p_m & P_m \end{bmatrix},$$

$$(7)\quad \tilde{\boldsymbol{o}}_m \leftrightarrow \mathbf{O}_m = \begin{bmatrix} O_m & -o_m \\ o_m & O_m \end{bmatrix},$$

$$(8)\quad \tilde{\boldsymbol{\imath}} \leftrightarrow \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0{,}01 & -0{,}002 \\ 0{,}002 & 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

Адаптируя формулу (4) для операций с матрицами на основе теоремы 2 получим:

$$(9)\qquad \mathbf{NPV} = \sum_{m=1}^{N} [(\mathbf{P}_m - \mathbf{O}_m) \cdot ([(\mathbf{E} + \mathbf{I})^m]^T)^{-1}],$$

где $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Реализовав в MathCAD расчет ЧПД с применением формулы (9), получим:

$$\mathbf{NPV} = \begin{bmatrix} 1156{,}55 & -127{,}88 \\ 127{,}88 & 1156{,}55 \end{bmatrix}.$$

Переходя от матриц к нечетким числам, получим значение $\widetilde{\boldsymbol{npv}}$ = (1156,55; 127,88; 127,88) – такое же, как и при использовании комплексного метода.

Заключение

Как известно, широко распространенные системы компьютерной математики (MATLAB, MathCAD, Maple и др.) содержат средства, позволяющие выполнять арифметические операции над комплексными числами и матрицами, причем, как в численном, так и в символьном виде. В тоже время, указанные системы компьютерной математики в своей стандартной комплектации не содержат средств выполнения арифметических операций над нечеткими числами. Вышеприведенные теоремы, позволяют сводить арифметические операции над симметричными нечеткими числами *LR*-типа к арифметическим операциям над комплексными числами и матрицами, что дает возможность упростить выполнение указанных арифметических операций (в частности с применением систем компьютерной математики) и использовать наглядное графическое их представление на комплексной плоскости (в виде векторных диаграмм и годографов).

Разработанные методы могут быть полезны при анализе и синтезе систем управления с нечеткой логикой.

Литература

1. Алтунин А. Е., Семухин М. В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000.

2. Балк М.Б., Балк Г.Д. Реальные применения мнимых чисел. Киев: Радянська школа, 1988.

3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.

4. Кучарина Е.А. Инвестиционный анализ. СПб.: Питер, 2006.
5. Ларин С. В. Числовые системы. М.: Академия, 2001.
6. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А.Поспелова. М.: Наука, 1986.
7. Усков А. А., Кузьмин А. В. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика. – М.: Горячая Линия – Телеком, 2004.

COMPLEX AND MATRIX METHODS PERFORM ARITHMETIC OPERATIONS ON FUZZY NUMBERS

Andrey Uskov, Russian University of Cooperation, Moscow, Doctor of Science, professor.
Igor Kiselev, Russian University of Cooperation, Moscow, Postgraduate student.

Abstract*:* Proposed theorems, allowing to reduce the arithmetic operations on fuzzy numbers in *LR*-type arithmetic operations on complex numbers and matrices, which makes it possible to simplify the execution of arithmetic operations (in particular with the use of computer math) and use the intuitive graphical representation of the complex plane (in form of vector diagrams and hodographs).

Keywords: arithmetic, complex numbers, matrices, fuzzy numbers