

УДК 681.5
ББК 32.817

СЦЕПЛЕНИЕ КООРДИНАТ И ИЕРАРХИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ФОРМАЦИЯМИ¹

Парсегов С.Э.²

*(Учреждение Российской академии наук Институт проблем
управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Предлагаются и изучаются новые стратегии равноудаленного расположения агентов на отрезке. Модификации стратегии включают в себя повышение порядка агентов, образующих систему, и сцепление координат агентов. Кроме того, рассматривается двухуровневая иерархическая схема, позволяющая управлять группами агентов.

Ключевые слова: управление формациями, сцепление координат, иерархические алгоритмы.

Введение

Теория управления мультиагентными системами является дальнейшим развитием классической теории управления. Особенностью мультиагентным систем является наличие не одного объекта управления, как в классической теории, а целой группы объектов, которые называют агентами. Теоретический аппарат этого нового направления базируется как на классических принципах и методах теории управления [7], [12], так и на положениях спектральной теории графов, необходимой для исследования структуры мультиагентных систем [8], [1], [14].

Особенностью мультиагентных систем является их децентрализованность — управление всей системой осуществляется

¹ Автор признателен П.С. Щербакову за ценные обсуждения содержания статьи.

² Сергей Эрнестович Парсегов, аспирант (s.e.parsegov@gmail.com).

без центрального регулятора, действующего на каждого агента. Достижение цели управления достигается за счет локального взаимодействия агентов. Платой за отсутствие централизованного управления является более высокая сложность задач управления мультиагентными системами. Однако, по ряду причин применение такого подхода является более оправданным и многообещающим. Прежде всего — это наличие реальных физических ограничений, действующих на агентов, таких как пропускная способность каналов связи, ограниченная зона видимости, большое число взаимодействующих подсистем. К преимуществам распределенного подхода можно отнести робастность к отказу отдельных подсистем, надежность и гибкость [20].

Адекватность моделей мультиагентных систем, а, соответственно, их сложность определяется многими факторами: сложностью моделей агентов, входящих в систему, структурой, связывающей агенты между собой, типами этих связей [23].

Насколько известно автору, на настоящий момент нет ни одной работы, где были бы структурированы и отражены все аспекты этого направления, литература по данному вопросу весьма обширна и разнородна, а терминология часто варьируется. Тем не менее, можно выделить основные направления/задачи в области мультиагентных систем: задачи достижения консенсуса, распределенной оптимизации, распределенного оценивания, управления формациями и многие другие.

Вопросы, связанные с управлением формациями, занимают особое место в этой тематике. Распределенное управление формациями подразумевает определенное поведение агентов, при котором они образуют некоторые геометрические конфигурации в пространстве посредством локального взаимодействия. Алгоритмы такого рода применяются для управления группами колесных роботов, беспилотных летательных/подводных аппаратов [2] и т.д. Управление системами, состоящими из большого числа мобильных объектов, является важной задачей из-за их коммерческого и военного применения. В сравнении с автономными устройствами, выполняющими одиночные миссии, применение

групп совместно работающих устройств открывает большие возможности. Можно привести лишь некоторые примеры потенциальных приложений таких групп автономных устройств: военное дело, системы наблюдения, системы метеослужб, погрузочно-разгрузочные операции опасных материалов, распределенные сети сенсоров и т.п. Управление формациями включает в себя такие задачи, как *получение формации* (formation producing) и *слежение за формацией* (formation tracking) [20]. В рамках задачи получения/образования формации группа агентов в пространстве образует некоторую геометрическую фигуру без какого-либо указания для группы (без лидера, виртуального или реального); в задаче слежения группа агентов достигает желаемого геометрического расположения и следит за задающим воздействием (следует за лидером).

Одной из типовых задач в этой области является задача равноудаленного расположения агентов на некотором фиксированном отрезке посредством локального взаимодействия [22], [6], [9]. Стратегия управления устроена следующим образом: каждому агенту в группе предписывается расположиться в середине отрезка, соединяющего его двух крайних по номерам соседей. Существующие алгоритмы равноудаленного расположения агентов на отрезке описываются дифференциальными уравнениями первого порядка, не учитывают возможную связь между пространственными координатами.

В работе предлагаются различные обобщения задачи равноудаленного расположения на отрезке: усложняются модели агентов, связи между ними, предлагается и изучается двухуровневый иерархический алгоритм.

1. Основные понятия и постановка задачи

1.1. Равноудаленное расположение на отрезке

Одномерный случай

Рассмотрим линейный алгоритм перемещения n подвижных агентов для их равномерного расположения на заданном отрезке $[x_0, x_{n+1}]$. Пусть положение каждого агента при $t \geq 0$ обозначает

ется через $x_i(t) \in \mathbb{R}$. Закон управления предполагает наличие информации о расстояниях между агентом и двумя его ближайшими по номерам соседями. Каждый агент движется в направлении середины отрезка, соединяющего его соседей. Векторно-матричное описание стратегии имеет вид [22]:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

Анализируя систему (1), можно сказать, что неподвижные агенты x_0 и x_{n+1} являются *лидерами* формации [13]. Целью этих лидеров является обеспечение правильного движения формации. Важно отметить, что крайние виртуальные агенты-лидеры не координируют движение формации централизованно, поскольку они не передают информацию о своем положении всем агентам. Подвижные агенты $x_i, i = 1, \dots, n$ получают информацию только о расстояниях до своих крайних по номерам соседей x_{i-1} и x_{i+1} . Такую схему обмена информацией можно представить в виде ориентированного графа рис. 1 [13].

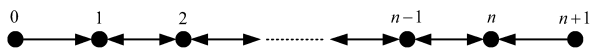


Рис. 1. Ориентированный граф алгоритма равноудаленного расположения на отрезке

Представим иной способ описания стратегии, отличный от (1). Очевидно, что матрица системы (1) является вырожденной, работать с такими матрицами не всегда удобно. Кроме того, часто необходимо иметь независимое описание модели агента и управляющего закона (протокола управления), обеспечивающего требуемое движение мультиагентной системы.

С этой целью представим модель каждого агента в виде интегратора:

$$(2) \quad \dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Тогда из (1) видим, что линейный протокол управления $u_i \in \mathbb{R}$ имеет вид:

$$(3) \quad u_i = \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} - x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$ — вектор состояния мультиагентной системы, тогда ее динамика может быть записана в компактной форме [6]

$$(4) \quad \dot{x} = Ax + b,$$

где матрица A и вектор b имеют вид

$$(5) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$(6) \quad b = [0.5x_0, 0, \dots, 0.5x_{n+1}]^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Матрица A является трехдиагональной, ее собственные значения имеют вид [3]

$$(7) \quad \lambda_k = -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поскольку $\lambda_k < 0, k = 1, \dots, n$, состояние $x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = -A^{-1}b$ является устойчивым положением равновесия системы (4). При $t \rightarrow \infty$ имеем: $x_i \rightarrow x_0 + \frac{i}{n+1}(x_{n+1} - x_0)$, $i = 1, \dots, n$. Это в точности означает, что вне зависимости от начальных условий агенты стремятся расположиться равноудаленно на отрезке с зафиксированными концами x_0 и x_{n+1} .

Легко показать, что для системы (4) справедлива оценка $\|x(t) - x^*\| \leq e^{\hat{\lambda}} \|x(0) - x^*\|$, где $x(0)$ — вектор начального положения агентов. Величина $\hat{\lambda}$ характеризует скорость сходимости траекторий системы и равна

$$(8) \quad \hat{\lambda} = \max_k \lambda_k = -2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Двумерный случай

Покажем как можно обобщить стратегию равномерного расположения на двумерный случай. Произведем следующую группировку координат для каждого агента. Пусть положение i -го агента в момент времени $t \geq 0$ определяется вектором $\xi_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]^T \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, n$, $\xi_0 = [x_0, y_0]^T$ и $\xi_{n+1} = [x_{n+1}, y_{n+1}]^T$ — координаты начала и конца отрезка соответственно. С учетом введенных обозначений выражение динамика всей системы может быть записана в виде

$$(9) \quad \dot{\xi} = (A \otimes I_2)\xi + \hat{b},$$

где I_2 — единичная матрица размера 2×2 , $\otimes$ — символ произведения Кронекера, $\xi = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_n^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ — сборный вектор координат агентов системы, $\hat{b} = [0.5\xi_0^T, 0, \dots, 0.5\xi_{n+1}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

Можно сделать следующие выводы:

— как видно из формул (2)–(3), управление движением агентов происходит путем мгновенного изменения скорости. Такой алгоритм интересен с точки зрения изучения кинематики агентов, но, к примеру, *не может быть реализован физически* для механических систем. В соответствии со Вторым законом Ньютона, прикладывая силу к объекту, можно менять его ускорение, а не непосредственно скорость;

— в двумерном случае рассматривается по сути движение двух независимых подсистем — для координат x и y . В реальности координаты могут быть связаны между собой. Такое *сцепление* координат приводит к изменению математической модели системы и траекторий ее движения;

В работе предлагаются новые стратегии равноудаленного расположения агентов на отрезке, развивающие и обобщающие изложенные выше положения. Прежде чем переходить к изучению новых модификаций, обсудим, как может меняться сложность моделей мультиагентных систем и от чего она зависит.

1.2. Сложность мультиагентных систем

Как известно, хорошая математическая модель — это модель, которая наиболее полно отражает свойства реального объекта. Обычно улучшение/уточнение модели, появление новых требо-

ваний к модели, приводит к ее усложнению. Поскольку мультиагентные системы состоят из подсистем-агентов, связанных некоторой структурой, сложность задач управления ими можно условно определить тремя факторами [23]

- 1) сложностью математической модели агента;
- 2) сложностью сетевой структуры, связывающей агентов;
- 3) сложностью типов связей между агентами.

Условно можно считать, что каждый из этих факторов характеризует некоторое измерение в пространстве сложности мультиагентных систем [23]. Схематическая иллюстрация этого понятия приведена на рис. 2.

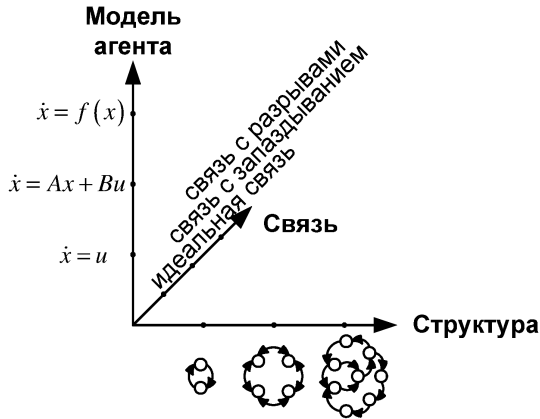


Рис. 2. Пространство сложности мультиагентной системы

Математические модели агентов могут быть как простыми линейными, так и сложными нелинейными, содержать запаздывания и нестационарные элементы. Наиболее простыми и, впрочем, наименее реалистичными моделями агентов являются интеграторы: в этом случае управление меняет непосредственно скорость агента. В этом случае решаются задачи кинематики. Самыми простыми динамическими моделями агентов являются двойные интеграторы.

Структура мультиагентной системы показывает, по каким направлениям распространяется информация в системе, т.е. какие выходы/состояния одних агентов доступны для измерения (поступают на входы) другим. Усложнение структуры может происходить по разным причинам, например, при введении дополнительных обратных связей, появлении уровней иерархии и т.д. Структура мультиагентной системы может быть представлена структурной схемой [7], графом [14] и т.п. Наиболее широкое применение теория графов получила для решения задач консенсуса/синхронизации. Важные характеристики алгоритмов консенсуса связаны со спектральными свойствами лапласовских матриц графов, определяющих структуру системы [14], [1], [20].

Связи между агентами могут быть как идеальными (простейший случай), так и неидеальными, например, содержать запаздывание, нелинейности. Разрыв связей может приводить к тому, что некоторые агенты "покидают" систему, меняя структуру системы и уменьшая ее порядок. Если движение системы происходит в некотором m -мерном пространстве (например, на плоскости $m = 2$), то изменение каждой из координат может происходить либо независимо — в этом случае мы имеем дело с m никак не связанными друг с другом подсистемами, — либо существуют связи между координатами. В линейном случае такая связь может определяться некоторой матрицей, например, матрицей поворота [18], [19]. В таких случаях говорят, что имеет место *сцепление координат* (coordinate coupling) [20].

Получение новых алгоритмов управления формациями предполагает как изменение модели агентов, так и изменение типов связей и структуры системы.

1.3. Цель работы

В соответствии со схемой, представленной на рис. 2, предлагаются следующие обобщения задачи равноудаленного расположения агентов на отрезке:

1) Усложнение модели агента: рассматриваются модели агентов в виде двойных интеграторов. Предлагается протокол управления, позволяющий управлять движением агентов посред-

ством изменения ускорения;

2) Усложнение структуры системы: предлагается двухуровневый иерархический алгоритм, позволяющий равноудаленно располагать на отрезке группы агентов;

3) Усложнение типа связи: рассматривается алгоритм первого порядка, учитывающий сцепление координат. Изучаются новые траектории движения агентов.

2. Равноудаленное расположения на отрезке со сцеплением координат

2.1. Модели агентов первого порядка

Для начала рассмотрим стратегию равноудаленного расположения на отрезке со сцеплением координат для случая, когда модели агентов имеют вид интеграторов. Сцепление координат можно получить введением в выражение (9) матрицы более общего вида, чем единичная. Рассмотрим ситуацию, когда вектор скорости каждого агента смещен на одинаковый для всех агентов угол $\alpha \in [-\pi, \pi]$, тогда соответствующая матрица имеет смысл матрицы поворота.

Наличие такой связи может быть обусловлено физическими ограничениями на действия агентов, к примеру необходимостью обходить препятствия мобильными роботами, либо наличием внешних возмущений, отклоняющих вектор скорости агента, и т.п. Для задач циклического преследования алгоритм, использующий матрицу поворота, был впервые предложен в [16], [17]. В рамках задач консенсуса с моделями агентов в виде интеграторов первого и второго порядка похожий подход рассматривался в [18], [19]. Введение матрицы поворота позволяет получить новые траектории системы. Воспользуемся этими идеями для задачи равномерного расположения точек на отрезке.

Итак, управление на входе i -го агента будет определяться следующей формулой

$$(10) \quad u_i = R(\alpha) \left(\frac{\xi_{i+1} + \xi_{i-1}}{2} - \xi_i \right), \quad i = 1, \dots, n$$

где $R(\alpha)$ — матрица поворота, определяемая следующим выражением

$$(11) \quad R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Система уравнений, описывающая динамику всей системы из n агентов имеет вид

$$(12) \quad \dot{\xi} = (A \otimes R(\alpha))\xi + b^*,$$

$$(13) \quad b^* = (I_n \otimes R(\alpha))\hat{b} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Теорема 1 [4]. *Собственные числа матрицы $A \otimes R(\alpha)$ имеют вид*

$$\begin{aligned} \lambda_k^+ &= \left(-2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) e^{+j\alpha}, \\ \lambda_k^- &= \left(-2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) e^{-j\alpha}, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и система (12) устойчива тогда и только тогда, когда $0 \leq |\alpha| < \frac{\pi}{2}$. При этом $\xi_k \rightarrow \xi_0 + \frac{k}{n+1}(\xi_{n+1} - \xi_0)$, $t \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, n$, т.е. все агенты из любого начального положения стремятся выстроиться на отрезке с фиксированными концами ξ_0 и ξ_{n+1} на равном расстоянии друг от друга. При $n \rightarrow \infty$ оценка скорости сходимости (12) определяется $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2 \cos \alpha}{2n^2}$. Для значений угла $\frac{\pi}{2} \leq |\alpha| < \pi$ цель управления не достигается.

Замечание 1. Результаты, приведенные выше, легко обобщаются на трехмерных случай с вращением агентов относительно оси $(0, 0, 1)^T$ [4].

Замечание 2. В общем случае в протоколе управления (10) может фигурировать не матрица поворота $R(\alpha)$, а матрица более общего вида. Введение в уравнение движения матрицы $R(\alpha)$ имеет определенный физический смысл — тем самым мы отклоняем вектор скорости. Кроме того, для $R(\alpha)$ известна аналитическая запись спектра, что облегчает анализ задачи и ее обобщение на многомерные случаи. Если для сцепления координат применяется матрица общего вида, то вопросы трактовки ее физического смысла и вычисления спектра остаются открытыми.

2.2. Модели агентов второго порядка

Усложним также и модели агентов, учитывая при этом сцепление координат при помощи матрицы поворота $R(\alpha)$. Пусть модель агента описывается двойным интегратором

$$(14) \quad \ddot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Выберем закон управления в следующем виде [15]:

$$(15) \quad u_i = R(\alpha) \left(\frac{\xi_{i+1} + \xi_{i-1}}{2} - \xi_i - a\dot{\xi}_i \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

где a — некоторый настраиваемый параметр.

В таком случае система уравнений, описывающая динамику n агентов будет иметь вид

$$(16) \quad \ddot{\xi} = (A \otimes R(\alpha))\xi - aR(\alpha)\dot{\xi} + b^*,$$

где матрицы A и $R(\alpha)$ имеют вид (5) и (11) соответственно, $b^* = (I_n \otimes R(\alpha)) [0.5\xi_0^\top, 0, \dots, 0.5\xi_{n+1}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2n}$.

Справедлив следующий критерий устойчивости.

Теорема 2 [4], [15]. Система (16) устойчива тогда и только тогда, когда

$$a^2 \cos \alpha > 2 \sin^2 \frac{\pi n}{2(n+1)} \sin^2 \alpha, \quad a > 0.$$

При этом $\xi_k \rightarrow \xi_0 + \frac{k}{n+1}(\xi_{n+1} - \xi_0)$, $t \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, n$, т.е. все агенты из любого начального положения стремятся выстроиться на отрезке с фиксированными концами ξ_0 и ξ_{n+1} на равном расстоянии друг от друга.

Замечание 3. Заметим, что протокол управления (15) отличается от (10) необходимостью знания скорости i -го агента. По сути, слагаемые $-a\dot{\xi}_i$, $a > 0$ имеют смысл отрицательных обратных связей, стабилизирующих систему.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим систему из 5 подвижных агентов для двумерного случая. На рисунках представлены устойчивые траектории движения агентов для разных значений угла поворота α и настраиваемого параметра a (в случае алгоритма второго порядка). Начальные координаты агентов имеют вид:

$$x(0) = [0.31, 0.5, -0.83, 0.83, 0.65]^\top,$$

$$y(0) = [0.38, -0.1, -0.54, -0.7, 0.08]^\top.$$

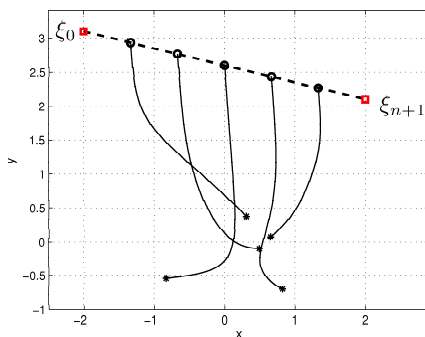


Рис. 3. Начальное положение и траектории агентов. Агенты первого порядка, угол $\alpha = 0$

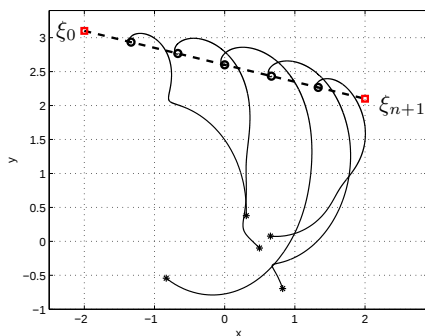


Рис. 4. Начальное положение и траектории агентов. Агенты первого порядка, угол $\alpha = \pi/4$

Проанализируем полученные результаты. Во-первых, сцепление координат меняет траектории движения системы, в нашем

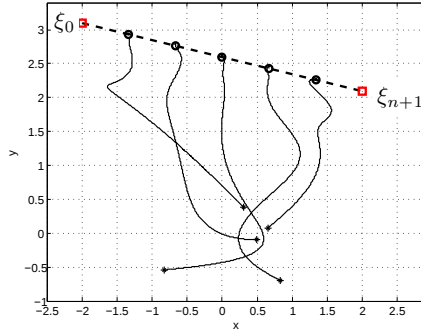


Рис. 5. Начальное положение и траектории агентов. Агенты второго порядка, $a = 0.6$, $\alpha = 0$

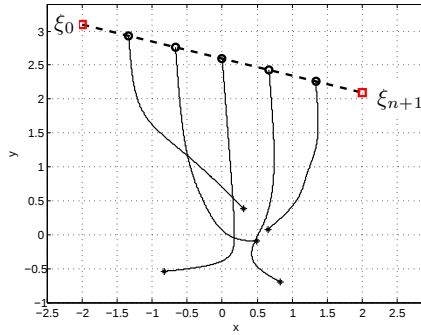


Рис. 6. Начальное положение и траектории агентов. Агенты второго порядка, $a = 2$, $\alpha = 0$

случае введение матрицы поворота с $\alpha > 0$ отклоняет траектории агентов вправо. С ростом угла смещения траектория искривляется сильнее. Во-вторых, скорость сходимости стратегий определяется выбором параметров α и a (в случае агентов второго порядка). Как и следовало ожидать, увеличение угла смещения α приводит к снижению скорости сходимости в обоих случаях. С другой стороны, системы (12) и (16) демонстрируют разную скорость сходимости при одинаковых углах α в зависимости от выбора параметра a . Например, при $\alpha = 0$ и $a = 0.6$ система (16)

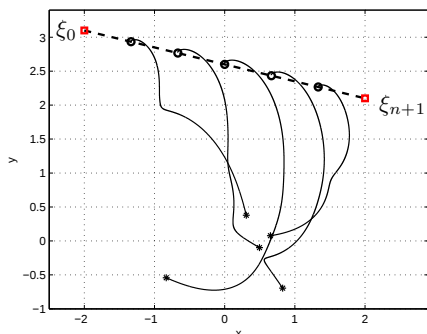


Рис. 7. Начальное положение и траектории агентов. Агенты второго порядка, $a = 2$, $\alpha = \pi/6$

показывает более высокую скорость сходимости, чем (12), а при $a = 2$ — более медленную. Уменьшение параметра a приводит к увеличению колебательности переходных процессов в системе (16).

•

3. Иерархический протокол управления

В данном разделе предлагается применение концепции иерархичности для алгоритма равноудаленного расположения групп агентов на отрезке. Рассмотрим следующую задачу: имеется n_g групп мобильных агентов, по n агентов в каждой (общее число агентов $N = n \times n_g$); необходимо получить такой закон управления, чтобы *центроиды* — центры масс каждой из групп — стремились равномерно расположиться на заданном отрезке $[x_0, x_{n_g}]$, а агенты каждой группы стягивались к ее центроиду.

Для решения поставленной задачи предлагается протокол управления в виде двухуровневой иерархической схемы. На втором (высоком) уровне иерархии рассматривается движение n_g групп агентов по закону равноудаленного расположения на отрезке, на первом (низком) — движение агентов внутри каждой из групп по алгоритму циклического преследования. Схема, иллю-

стрирующая идея алгоритма, представлена на рис. 8.

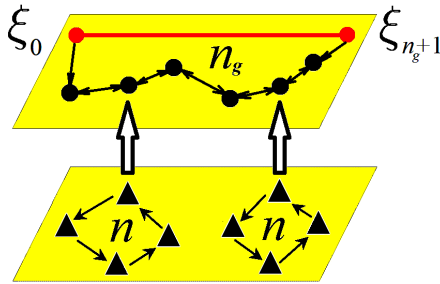


Рис. 8. Двухуровневый алгоритм равноудаленного расположения агентов на отрезке

Идея линейного циклического преследования заключается в том, что скорость i -го агента равна (либо пропорциональна) расстоянию до следующего $(i + 1)$ -го по модулю n агента, а вектор скорости направлен в его сторону. Такой закон был впервые описан в работе Ж. Г. Дарбу [10]. Простейший линейный протокол циклического преследования для моделей агентов в виде одиночных интеграторов (2) в непрерывном времени для системы из n агентов имеет следующий вид [21]:

$$(17) \quad u_i = x_{i+1} - x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Легко заметить, что при таком алгоритме центроид формации остается неподвижным и равен среднему начальных условий агентов.

Рассмотрим алгоритм циклического преследования $\mathbb{R}$, в соответствии с которым каждый агент преследует следующего по модулю n агента со смещением [21]:

$$(18) \quad \dot{x}_i = (x_{i+1} + c_i) - x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

где c_i , $i = 1, \dots, n$ — смещения.

Обозначим центроид группы агентов (18) через $\bar{x}$. Тогда справедливо следующее равенство [21]:

$$(19) \quad \dot{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$$

Отсюда следует, что выбирая должным образом величины смещений c_i , можно обеспечить желаемое движение центроидов и прийти к иерархической схеме.

Введем следующие обозначения для агентов: $x_{p,q}$, где $p = 1, \dots, n_g$ является индексом группы, а $q = 1, \dots, n$ индексом агента в группе. Тогда двухуровневая иерархическая схема может быть записана в виде [5]

$$\begin{aligned} \text{группа } 1 \quad & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{1,1} = x_{1,2} - x_{1,1} + d_{1,1} \\ \dot{x}_{1,2} = x_{1,3} - x_{1,2} + d_{1,2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{1,n} = x_{1,1} - x_{1,n} + d_{1,n} \end{array} \right\} \\ & \vdots \\ \text{группа } n_g \quad & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{n_g,1} = x_{n_g,2} - x_{n_g,1} + d_{n_g,1} \\ \dot{x}_{n_g,2} = x_{n_g,3} - x_{n_g,2} + d_{n_g,2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_g,n} = x_{n_g,1} - x_{n_g,n} + d_{n_g,n} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

где $d_{p,q}$ являются смещениями.

Потребуем, чтобы центроиды каждой группы двигались по закону равноудаленного расположения на отрезке:

$$(21) \quad \dot{\bar{x}}_p = \frac{\bar{x}_{p+1} + \bar{x}_{p-1}}{2} - \bar{x}_p, \quad p = 1, \dots, n_g$$

где $\bar{x}_p$ — центроид p -й группы.

По определению центроид p -й группы описывается выражением [21]

$$(22) \quad \bar{x}_p := \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n x_{p,q}.$$

Возникает вопрос: как выбрать смещения для обеспечения желаемого движения центроидов (21)? Из (19) следует, что динамика центроида p -й группы имеет вид

$$(23) \quad \dot{\bar{x}}_p = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n d_{p,q}.$$

В сочетании с (21) получаем

$$(24) \quad \sum_{q=1}^n d_{p,q} = n \left(\frac{\bar{x}_{p+1} + \bar{x}_{p-1}}{2} - \bar{x}_p \right),$$

или

$$\sum_{q=1}^n d_{p,q} = n \left(\frac{\sum_{q=1}^n x_{p+1,q} + \sum_{q=1}^n x_{p-1,q}}{2} - \sum_{q=1}^n x_{p,q} \right).$$

Выберем смещения $d_{p,q}$ следующим образом:

$$(25) \quad d_{p,q} = \frac{x_{p+1,q} + x_{p-1,q}}{2} - x_{p,q}, \quad p = 1, \dots, n_g$$

Последнее выражение означает, что q -й агент в p -й группе стремится расположиться в середине отрезка, соединяющего q -х агентов в $(p-1)$ -й и $(p+1)$ -й группах. Динамика всей системы из N агентов (20) с учетом (25) имеет следующий вид

$$(26) \quad \dot{x} = \bar{A}x + \bar{b},$$

где $x = [x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{n_g,1}, \dots, x_{n_g,n}]^\top$ — сборный вектор координат всех агентов, а матрица системы имеет вид

$$(27) \quad \bar{A} = I_{n_g} \otimes C + D \otimes I_n.$$

Матрица C является циркулянтной [11]:

$$(28) \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

Матрица $D \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ имеет вид

$$(29) \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g},$$

и используется для описания движения центров групп. Вектор $\bar{b} = b \otimes \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$, и $b \in \mathbb{R}^{n_g}$ определяется аналогично (6). Матрицы I_n, I_{n_g} — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Учитывая тот факт, что матрица $\bar{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ является кроневой суммой матриц C и D : $\bar{A} = C \oplus D$, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Система (26) устойчива и множество собственных значений матрицы $\bar{A}$ является прямой суммой множеств собственных значений матриц C и D . При этом $x_{p,q} \rightarrow x_0 + \frac{p}{n_g+1}(x_{n_g+1} - x_0)$, $t \rightarrow \infty$, $p = 1, \dots, n_g$, т.е. для любого начального положения каждый агент сходится к центроиду своей группы, а центроиды групп в свою очередь стремятся расположиться равномерно на отрезке с фиксированными концами x_0 and x_{n_g+1} . Скорость сходимости алгоритма при $n_g \rightarrow \infty$ определяется $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2}{2n_g^2}$.

Доказательство. Как было показано ранее, собственные числа матрицы D имеют вид $\lambda_p = -2 \sin^2 \frac{p\pi}{2(n_g+1)}$, $p = 1, \dots, n_g$, и собственные числа матрицы C также известны и имеют вид $\bar{\lambda}_q = e^{2\pi jq/n} - 1$, $q = 1, \dots, n$ [11]. Собственные числа матрицы $\bar{A} = I_{n_g} \otimes C + D \otimes I_n = C \oplus D$ легко определяются из свойств кронекеровой суммы. Матрица C имеет единственное нулевое собственное число, остальные расположены в левой полуплоскости; все собственные числа матрицы D отрицательны. Отсюда следует, что матрица $\bar{A}$ гурвицева, т.е. (26) устойчива. Очевидно, что скорость сходимости для системы (26) при $n_g \rightarrow \infty$ определяется $\hat{\lambda} \approx -\frac{\pi^2}{2n_g^2}$.

Замечание 4. Задача была рассмотрена в одномерном пространстве, но может быть легко обобщена на двумерный введением вектора координат агента ξ_i и выкладкам, аналогичным (9).

Пример 2. Рассмотрим систему на плоскости, состоящую из 3 групп, по 3 подвижных агентов в каждой. Начальные координаты агентов имеют вид:

$$x(0) = [0.31, 0.5, -0.83, 0.83, 0.65, 0.99, -0.11, 0.92, 0.55]^\top,$$

$$y(0) = [0.38, -0.1, -0.54, -0.7, 0.08, -0.84, -0.8, -0.99, 0.63]^\top.$$

На рис. 9 представлены траектории движения агентов.

Из полученных результатов видно, что агенты каждой группы быстро стягиваются к центроиду и, сильно сблизившись,

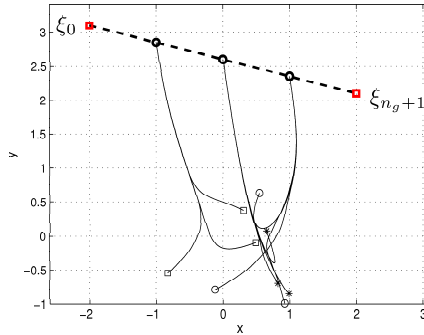


Рис. 9. Иерархический алгоритм. Начальные условия агентов каждой из трех групп отмечены разными символами

стремятся равномерно выстроиться на отрезке. Отметим также, что скорость сходимости системы (26) зависит от числа групп агентов и не зависит от числа агентов в каждой из групп.

•

4. Заключение

В работе предложены и изучены новые обобщения типовой задачи управления формациями — задачи равноудаленного расположения агентов на отрезке, обобщающие и дополняющие существующие результаты. В качестве первого шага предложен протокол управления со сцеплением координат для мультиагентной системы с моделями агентов в виде интеграторов. В качестве матрицы, связывающей координаты, рассмотрена матрица поворота. Синтезирован протокол управления для агентов второго порядка, также учитывающий связь между координатами. Для каждой из полученных систем уравнений проведен анализ устойчивости и сделаны выводы по характеру движения агентов и скорости сходимости. В качестве последнего шага рассмотрена двухуровневая иерархическая схема управления, позволяющая располагать на отрезке группы агентов, внутри которых агенты движутся по закону циклического преследования. Таким обра-

зом, в соответствии со схемой на рис. 2 по каждому из направлений в “пространстве сложности” было сделано некоторое обобщение/усложнение стратегии равномерного расположения на отрезке.

Литература

1. АГАЕВ Р. П., ЧЕБОТАРЕВ П. Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (Обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 “Сетевые модели в управлении”, 2010. С. 470–505.
2. АМЕЛИН К. С., ГРАНИЧИН О. Н. *Мультиагентное сетевое управление группой легких БПЛА* // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2011. № 6. С. 64–72.
3. ВОЕВОДИН В. В., КУЗНЕЦОВ Ю. А., Матрицы и вычисления, М.: Наука, 1984. — 320 с.
4. ПАРСЕГОВ С. Э. *Обобщенные линейные алгоритмы управления формациями* // Стохастическая оптимизация в информатике, Т.7 (Вып. 1), 2011. С. 186–203.
5. ПАРСЕГОВ С. Э. *Некоторые новые иерархические алгоритмы управления формациями* // Труды международной научно-практической конференции «Теория активных систем - 2011», Т.3, Москва, 2011. С. 238–241.
6. ПЕТРИКЕВИЧ Я. И. *Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе* // Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 “Сетевые модели в управлении”, Москва, 2010. С. 665–680.
7. ПОЛЯК Б. Т., ЦЫПКИН Я. З. *Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем* // Автоматика и Телемеханика, 1996, №11, С. 91–104.
8. ЧЕБОТАРЕВ П. Ю., АГАЕВ Р. П. *Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов* // Автоматика и Телемеханика, 2009, №3, С. 136–151.

9. ЦЕРБАКОВ П. С. *Управление формациями: схема Ван Лоуна и другие алгоритмы* // Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 “Сетевые модели в управлении”, Москва, 2010. С. 681–696.
10. DARBOUX J. G. *Sur un problème de géométrie élémentaire* // Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 2(1): 298–304, 1878.
11. GRAY R. M. *Toeplitz and Circulant Matrices: A review* // Foundations and Trends in Communications and Information Theory, 2(3) 2006, pp. 155–239.
12. HARA S., HAYAKAWA T. AND SUGATA H. *Stability Analysis of Linear Systems with Generalized Frequency Variables and Its Applications to Formation Control* // Proc. IEEE CDC, 2007, pp. 1459–1466.
13. LIN Z. *Coupled Dynamic Systems: From Structure Towards Stability And Stabilizability*, PhD thesis, University of Toronto, 2006.
14. OLFATI-SABER R., FAX J. A. AND MURRAY R. M. *Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems* // Proceedings of the IEEE, 95(1): 215–233, 2007.
15. PARSEGOV S. E. *Allocation of agents on a line: simple algorithm and generalizations* // Proc. 14th Baltic olympiad on automatic control, Saint-Petersburg, Russia, Sep. 21–23, 2011, pp. 119–125.
16. PAVONE M. AND FRAZZOLI E. *Decentralized policies for geometric pattern formation and path coverage* // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 129(5): 633–643, 2007.
17. RAMIREZ J. L., PAVONE M., FRAZZOLI E. AND MILLER D. W. *Distributed Control of Spacecraft Formations via Cyclic Pursuit: Theory and Experiments* // AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 33(5): 1655–1669, 2010.
18. REN W. *Collective motion from consensus with Cartesian coordinate coupling - Part I: Single-integrator kinematics* //

- Proc. IEEE CDC, 2008, pp. 1006–1011.
19. REN W. *Collective motion from consensus with Cartesian coordinate coupling - Part II: Double-integrator dynamics* // Proc. IEEE CDC, 2008, pp. 1012–1017.
 20. REN W., CAO Y. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues*, London: Springer-Verlag, 2011.
 21. SMITH S. L., BROUCKE M. E. AND FRANCIS B. A. *A Hierarchical Cyclic Pursuit Scheme for Vehicle Networks* // Automatica, 41(6): 1045–1053, 2005.
 22. WAGNER I. A., BRUCKSTEIN A. M. *Row straightening via local interactions* // Circuits, Systems, and Signal Processing, 16(3): 287–305, 1997.
 23. WIELAND P. *From static to dynamic couplings in consensus and synchronization among identical and non-identical systems*, PhD thesis, Berlin: Logos Verlag, 2010

COORDINATE COUPLING AND HIERARCHICAL ALGORITHMS IN FORMATION CONTROL

Sergey Parsegov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Phd student (s.e.parsegov@gmail.com).

Abstract: The new control strategies of uniform allocation of agents on a segment are proposed. Different modifications of this typical formation control problem include double-integrator models of agents and coordinate coupling. Moreover, a new two layer hierarchical scheme to provide equidistant allocation of groups of agents on a segment is designed.

Keywords: formation control, coordinate coupling, hierarchical algorithms.