

УДК 519.6+004.94
ББК 22.193

НЕЯВНЫЕ СИЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СДУ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Черных Н. В.¹

(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического универ-
ситета им Р.Е. Алексеева)

Рассматриваются неявные сильные схемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями диффузионной составляющей. Теоретические исследования подтверждаются примерами численного моделирования в среде Scilab.

Ключевые слова: стохастические системы, марковские переключения, состояние-зависимая модель переключений, неявные сильные численные схемы, сходимость.

Введение

G. George Yin, Chao Zhu в своей книге «Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications» [9] подробно рассматривает сложные смешанные переключаемые диффузионные процессы (hybrid switching diffusion processes) и их применения. Слово «hybrid» означает сосуществование непрерывной динамики и дискретных событий. Изучение таких процессов необходимо, так как они применяются в радиосвязи, при обработке сигнала, в организации сетей, процессах производственного планирования, биологических системах, экосистемах, финансовом проектировании, а также для модели-

¹ Надежда Валентиновна Черных, аспирантка (nadezdacher@mail.ru).

рования, анализа, контроля и оптимизации больших систем под воздействием волнений окружающей среды.

Один из важных классов гибридных систем - стохастические дифференциальные уравнения с марковскими переключениями (SDEwMSs). Методы численного решения стохастической дифференциальных уравнений с марковскими переключениями и пуассоновскими скачками интенсивно изучались в последние годы. Многие исследователи теоретически и экспериментально рассматривают метод Эйлера (Euler–Maruyama method), в их числе [5], [6], [8], [9], [10], [11]. В [3] для решения SDEwMSs применяются методы, основанные на стохастическом разложении Тейлора (Платена). Среди последних работ в этой сфере можно также отметить [4], [12], [13], [15], [16].

В численном моделировании стремление конструировать большое количество методов, как явных, так и неявных, вызвано тем, что различные методы обладают разными возможностями в отношении точности, устойчивости, трудоемкости и т.д.

Неявные строгие схемы обычно имеют широкий диапазон размеров шага, подходящий для приближения стохастических динамических систем, в особенности тех, которые вовлекают весьма различные временные шкалы, без чрезмерного накопления неизбежных ошибок округления. Таким образом, неявные схемы хорошо подходят, чтобы моделировать решения жестких стохастических дифференциальных уравнений. [2]

Неявные схемы для решения SDEwMSs и SDE с пуассоновскими скачками рассматривались, например, в [8], [5], [6]. В [6] авторы рассматривают полунеявные методы (semi-implicit Euler–Maruyama methods) и отмечают, что явные численные схемы являются намного менее точными в приближении чем их неявные или полунеявные аналоги.

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, F_t , $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ – неубывающее семейство σ – подалгебр F , $\omega_r(\cdot)$, r

$= 1, \dots, d$ – независимые винеровские процессы. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ – конечное множество.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с марковскими переключениями в форме

$$(1) \quad dX(t) = a(\beta(t), X(t))dt + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta(t), X(t))d\omega_r(t),$$

где $\beta(t)$ – однородный марковский процесс со счетным множеством состояний M , $\beta(0) = u_0, X(0) = x_0$.

$$(2) \quad P(\beta(t+h) = l | \beta(t) = u, x(s), \beta(s), s \leq t) = q_{ul}(x(t))h + o(h), \quad u \neq l,$$

где $x(t) \in \mathfrak{R}^n, a(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^n$ и $\sigma(\cdot, \cdot): \mathfrak{R}^n \times M \mapsto \mathfrak{R}^{n \times n}$.

$Q(x) = (q_{ul}(x(t))) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ – матрица интенсивности переходов,

где для каждого t $q_{ul}(x) \geq 0$ при $u \neq l, q_{uu} = -q_u, \sum_{l=1}^m q_{ul}(x) = 0$ для каждого $u \in M$.

Предполагается, что функции $f(\beta(t), x(t))$ и $\eta_r(\beta(t), x(t))$ определены при $t \in [t_0, t_0 + T], x \in \mathfrak{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

условию Липшица при всех при всех $t \in [t_0, t_0 + T], x \in \mathfrak{R}^n, y \in \mathfrak{R}^n, u \in M$:

$$(3) \quad |a(u, x) - a(u, y)| + |\sigma(u, x) - \sigma(u, y)| \leq K|x - y|, \text{ а также}$$

$$(4) \quad |a(u, x)| + |\sigma(u, x)| \leq K(1 + |x|),$$

(5) функция $a(\beta(t), x(t))$ и все ее производные непрерывны; первые производные по x равномерно ограничены (чтобы выполнялось условие Липшица), $a(\beta(t), x(t))$ имеет ограниченные третьи производные по x (таким образом La удовлетворяет равномерному условию Липшица), а остальные производные растут по x при $|x| \rightarrow \infty$ не быстрее линейной функции от $|x|$;

функции $\sigma_r(\beta(t), x(t))$ непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы;

Здесь и далее используем следующие обозначения:

$|x|$ означает евклидову норму вектора x , $xу$ – скалярное произведение векторов x и y ; K – положительная константа.

$X_{u,x}(t)$ или просто $X(t)$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным $X_{u,x}(0) = x$. Разобьем промежуток $[t_0, t_0 + T]$ точками деления t_k на N равных частей, так что $t_{k+1} - t_k = h$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $t_0 + T = t_N$, $h = T/N$. Приближение к $X(t_k)$ будем обозначать $\bar{X}(t_k)$, где $\bar{X}_0 = X(t_0)$. Далее пусть $X - F_{t_k}$ -измеримая случайная величина и $E|X|^2 < \infty$; $X_{t_k,x}(t)$ означает решение уравнения (1) для $t_k \leq t \leq t_0 + T$, удовлетворяющее начальным данным при $t = t_k$.

Будем использовать разложение Платена, подробно рассмотренное в [2], [3], для конструирования неявных методов численного решения уравнения (1). При построении численной схемы будем использовать функцию $f(\beta(t), x(t))$ с переключаемой компонентой.

Пусть $X_{u,x}(s) = X(s)$ - решение уравнения (1), $f(\beta, x)$, где $\beta = \beta(t)$, $X = X(t)$ – достаточно гладкая функция (скалярная или векторная). Согласно формуле Ито имеем для $t_0 \leq t \leq \mathcal{G} \leq t_0 + T$

$$(6) \quad f(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) = f(\beta, x) + \sum_{r=1}^d \int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}_1) + \int_t^{\mathcal{G}} Lf(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1,$$

где операторы Λ_r , $r = 1, \dots, d$ и L определены как:

$$(7) \quad \Lambda_r = \left(\sigma_r, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$(8) \quad L = \left(a, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_r^i \sigma_r^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Применим формулу (6) к функциям $\Lambda_r f$ и Lf , а затем полученные выражения для $\Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G}))$ и $Lf(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G}))$ подставим в (6). Поступая так дальше можно получить разложения для $f(\beta(t+h), X(t+h))$, где роль степеней выполняют повторные

интегралы Ито. (см. [3]) Путем ряда непосредственных подстановок далее получаем следующую формулу

$$\begin{aligned}
 (9) \quad f(\beta(t+h), X(t+h)) &= f + \sum_{r=1}^d \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_i(\mathcal{G}_1) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_i(\mathcal{G}_1) \int_t^{\mathcal{G}_1} d\omega_s(\mathcal{G}_2) + \\
 &+ \sum_{r=1}^q \Lambda_r Lf \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\omega_r(\mathcal{G}_1) + \sum_{r=1}^q L\Lambda f \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + \\
 &+ L^2 f \int_t^{t+h} d\mathcal{G} \int_t^{\mathcal{G}} d\mathcal{G}_1 + R_1,
 \end{aligned}$$

где $f \equiv f(\beta(t), X(t))$.

$$\begin{aligned}
 (10) \quad R_1 &= \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \sum_{j=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} \Lambda_j \Lambda_s \Lambda_i \Lambda_r f \times \right. \right. \right. \\
 &\times (\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\omega_j(\mathcal{G}_3)) d\omega_i(\mathcal{G}_3)) d\omega_s(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_i \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \right. \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i L\Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \right. \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_i \Lambda_r Lf(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2)) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \right. \\
 &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \left(\int_t^{\mathcal{G}_2} L\Lambda_s L_i \Lambda_r f(X(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\mathcal{G}_3) d\omega_s(\mathcal{G}_2) \right) \times \right. \right. \\
 &\times d\omega_i(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 &+ \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} L^2 \Lambda_r f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 \Big) d\omega_r(\mathcal{G}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \int_t^{\mathcal{G}_1} L \Lambda_r L f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_r(\mathcal{G}_1) d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_r L^2 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_r(\mathcal{G}_2) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \int_t^{\mathcal{G}_1} L^3 f(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\mathcal{G}_1 d\mathcal{G}.
 \end{aligned}$$

В [2] рассмотрены общие принципы построения неявных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Г.Н. Мильштейном показано, что введение неявности за счет выражений, входящих в стохастические интегралы, может привести к заведомо неприемлемому методу. Напротив, путем введения неявности лишь за счет выражений, входящих в нестохастические интегралы, пытаются добиться устойчивости методов, для чего, собственно, и конструируются неявные методы. [2]

Далее построим конструктивный неявный метод, подходящий для практических моделирований решений уравнений вида (1). За основу берем неявную строгую схему порядка 1.5, используемую в [14, схема (3.9), стр. 162]. Для доказательства сходимости конструируемой численной схемы к решению уравнения (1) будем использовать метод Г.Н. Мильштейна, который автор применял для доказательства сходимости другой численной схемы к решению СДУ с аддитивными шумами. ([2], стр. 59) Также будем опираться на теорему о порядке точности метода, основанного на одношаговой аппроксимации Г.Н. Мильштейна (см. [2], стр. 17 или [3], стр. 5). Приведем здесь теорему без пояснений для удобства ссылок.

Теорема 1. Пусть одношаговая аппроксимация $\bar{X}_{t,x}(t+h)$ имеет порядок точности η_1 для математического ожидания отклонения и порядок точности η_2 для среднеквадратичного отклонения, т.е., при любых $t_0 \leq t \leq t_0 + T - h$, $x \in \mathfrak{R}^n$ выполняются неравенства

$$\left| E(X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)) \right| \leq K(1 + |x|^2)^{1/2} h^{\eta_1}$$

$$\left[E|X_{t,x}(t+h) - \bar{X}_{t,x}(t+h)|^2 \right]^{1/2} \leq K(1+|x|^2)^{1/2} h^{\eta_2}$$

и пусть

$$\eta_2 \geq 1/2, \quad \eta_1 \geq \eta_2 + \frac{1}{2}.$$

Тогда при любых N и $k = 0, 1, \dots, N$ выполняется неравенство

$$\left[E|X_{t_0, X_0}(t_k) - \bar{X}_{t_0, X_0}(t_k)|^2 \right]^{1/2} \leq K \left(1 + E|X_0|^2 \right)^{1/2} h^{\eta_2 - \frac{1}{2}},$$

т.е. порядок точности метода, построенного с использованием одношаговой аппроксимации $\bar{X}_{t,x}(t+h)$, равен $\eta = \eta_2 - \frac{1}{2}$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую формулу, которая получается из (9) заменой $f(\beta, x)$ вектором x . В этом случае $\Lambda_r f = \sigma_r, Lf = a$.

$$\begin{aligned} (11) \quad X_{u,x}(t+h) &= x + \sum_{r=1}^d \sigma_r \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + ah + \\ &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ &+ \sum_{r=1}^d L\sigma_r \int_t^{t+h} (\mathcal{G}-t) d\omega_r(\mathcal{G}) + \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\mathcal{G}) - \omega_r(t)) d\mathcal{G} + \\ &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega_s(\mathcal{G}_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + La \frac{h^2}{2} + R_3. \end{aligned}$$

(см. [3], стр. 12)

В формуле (11) все коэффициенты $\sigma_r, a, \Lambda_i \sigma_r, L\sigma_r, \Lambda_r a, \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r, La$ вычисляются в точке (β, x) , а остаток R_3 равен

$$\begin{aligned} (12) \quad R_3 &= \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \sum_{j=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_j \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) \times \right. \right. \\ &\times d\omega_j(\mathcal{G}_3) d\omega_s(\mathcal{G}_2) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \Big) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\ &+ \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} L\Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 \right) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_i L \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_i \Lambda_r a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_i(\mathcal{G}_2) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \left(\int_t^{\mathcal{G}_1} \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_3), X(\mathcal{G}_3)) d\mathcal{G}_3 \right) d\omega_s(\mathcal{G}_2) \right) \times \\
 & \times d\omega_i(\mathcal{G}_1) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} L^2 \sigma_r(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_r a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_r L a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\omega_r(\mathcal{G}_2) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G} + \\
 & + \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} L^2 a(\beta(\mathcal{G}_2), X(\mathcal{G}_2)) d\mathcal{G}_2 d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G}.
 \end{aligned}$$

Слагаемое a представим в виде суммы $\mu a + (1 - \mu)a$. В первом слагаемом этой суммы функцию a заменим выражением

$$\begin{aligned}
 (13) \quad a(\beta, x) & = a(\beta(t+h), X(t+h)) - \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \Lambda_r a(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) d\omega_r(\mathcal{G}) - \\
 & - \int_t^{t+h} L a(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) = \\
 & = a(\beta(t+h), X(t+h)) - \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) - Lah + R_4
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 (14) \quad R_4 & = - \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_i \Lambda_r a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) d\omega_r(\mathcal{G}) - \right. \\
 & \left. - Lah - \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_r a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1 \right) d\omega_r(\mathcal{G}) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} \Lambda_r La(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\omega_r(\mathcal{G}_1) \right) d\mathcal{G} - \\
 & - \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} L^2 a(\beta(\mathcal{G}_1), X(\mathcal{G}_1)) d\mathcal{G}_1 \right) d\mathcal{G}.
 \end{aligned}$$

Подставим (13) в (11).

$$\begin{aligned}
 (15) \quad X_{u,x}(t+h) &= x + \sum_{r=1}^d \sigma_r \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + \mu a(\beta(t+h), X(t+h))h - \\
 & - \mu h \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + (1-2\mu)La \frac{h^2}{2} + (1-\mu)ah + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d L \sigma_r \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t) d\omega_r(\mathcal{G}) + \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\mathcal{G}) - \omega_r(t)) d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega_s(\mathcal{G}_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \mu h R_4 + R_3.
 \end{aligned}$$

В слагаемом $(1-2\mu)La \frac{h^2}{2}$ снова представим La в виде суммы $\gamma La + (1-\gamma)La$ и в первом слагаемом функцию La заменим выражением

$$(16) \quad La(\beta, x) = La(\beta(t+h), X(t+h)) + R_5,$$

где

$$(17) \quad R_5 = - \int_t^{t+h} L^2 a(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) d\mathcal{G} - \sum_{r=1}^d \int_t^{t+h} \Lambda_r La(\beta(\mathcal{G}), X(\mathcal{G})) d\omega_r(\mathcal{G}).$$

Собирая все выкладки вместе, получим

$$\begin{aligned}
 (18) \quad X(t+h) &= x + \sum_{r=1}^d \sigma_r \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + \mu a(\beta(t+h), X(t+h))h + \\
 & + (1-\mu)ah - \mu h \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} (\omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t)) d\omega_r(\mathcal{G}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^d L \sigma_r \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t) d\omega_r(\mathcal{G}) + \sum_{r=1}^d \Lambda_r a \int_t^{t+h} (\omega_r(\mathcal{G}) - \omega_r(t)) d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega_s(\mathcal{G}_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + (1 - \gamma)(1 - 2\mu) La \frac{h^2}{2} + \gamma(1 - 2\mu) La(\beta(t+h), X(t+h)) \frac{h^2}{2} + R_3 + \\
 & + \mu R_4 h + \beta(1 - 2\mu) R_5 \frac{h^2}{2}.
 \end{aligned}$$

На основании лемм 1 и 2, доказанных Г.Н. Мильштейном (см. [2], стр.37-40 или [3], стр. 11) и при соответствующих условиях (3), (4), (5), наложенных на функции $a(\beta(t), x(t))$ и $\sigma_r(\beta(t), x(t))$ $\Phi = R_3 + \mu R_4 h + \gamma(1 - 2\mu) R_5 \frac{h^2}{2}$ удовлетворяет условиям

$$(19) \quad |E\Phi| \leq K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} h^3, \quad (E\Phi^2)^{\frac{1}{2}} \leq K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} h^2.$$

Если в формуле (19) отбросить Φ , то получим неявную одношаговую аппроксимацию

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \bar{X}(t+h) & = x + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta, x) (\omega_r(t+h) - \omega_r(t)) + \\
 & + \mu a(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)) h + (1 - \mu) a(\beta, x) h - \\
 & - \mu h \sum_{r=1}^d \Lambda_r a(\beta, x) (\omega_r(t+h) - \omega_r(t)) + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r(\beta, x) \int_t^{t+h} (\omega_i(\mathcal{G}) - \omega_i(t)) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + \sum_{r=1}^d L \sigma_r(\beta, x) \int_t^{t+h} (\mathcal{G} - t) d\omega_r(\mathcal{G}) + \sum_{r=1}^d \Lambda_r a(\beta, x) \int_t^{t+h} (\omega_r(\mathcal{G}) - \omega_r(t)) d\mathcal{G} + \\
 & + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r \int_t^{t+h} \left(\int_t^{\mathcal{G}} (\omega_s(\mathcal{G}_1) - \omega_s(t)) d\omega_i(\mathcal{G}_1) \right) d\omega_r(\mathcal{G}) + \\
 & + (1 - \gamma)(1 - 2\mu) La(\beta, x) \frac{h^2}{2} + \gamma(1 - 2\mu) La(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)) \frac{h^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Одношаговой аппроксимации (20) отвечает двухпараметрический неявный метод (обозначим далее $\bar{X}_{t_k} = Y_k$, $\bar{\beta}_{t_k} = \beta_k$, $h = \Delta_k$)

$$(21) \quad Y_{k+1} = Y_k + \{ \mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \mu) a(\beta_k, Y_k) \} \Delta_k + \\ + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \{ \gamma La(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \gamma) La(\beta_k, Y_k) \} \Delta_k^2 + \\ \sum_{r=1}^d \left(\sigma_r(\beta_k, X_k) \Delta \omega_r + L \sigma_r(\beta_k, X_k) I_{(0,1)} \right) + \\ + \Lambda_r a(\beta_k, X_k) \left\{ I_{(1,0)} - \mu \Delta \omega_r \Delta_k \right\} + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r(\beta_k, X_k) I_{(1,1)} + \\ + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{s=1}^d \Lambda_s \Lambda_i \sigma_r I_{(1,1,1)}, \text{ где}$$

$I_{(0,1)}$, $I_{(1,0)}$, $I_{(1,1)}$, $I_{(1,1,1)}$ – повторные интегралы Ито (см. [3], стр. 9)

Рассмотрим, как осуществляется с помощью данной численной схемы состояние - зависимая модель переключений. Будем считать, что $\beta(t)$ – стохастически непрерывный процесс, для которого $\beta(t+h) \rightarrow \beta(t)$ при $h \rightarrow 0$. Временной интервал разбивается на подынтервалы $[0, t_1), [t_1, t_1 + t_2), \dots$, на которых $\beta(t)$ постоянно, t_k – случайные моменты переключения марковской цепи. Далее будем рассматривать последовательность $\beta(t_k)$ как дискретно - временной стохастический процесс, аппроксимирующий $\beta(t)$ в соответствующем значении.

Будем рассматривать пару процессов $\beta(t)$ и $x(t)$ совместно как марковскую цепь следующим образом. Значения Y_{k+1} генерируются рекурсивно согласно (21), используя предыдущие значение Y_k , и одновременно генерируются значения β_{k+1} , также используя значение Y_k ($x = Y_k$ в матрице переходных вероятностей $P = I + \Delta Q(x)$). [3]

Сформулируем и докажем теорему сходимости метода (21) с среднеквадратичным порядком точности 3/2 к решению уравнений вида (1).

Теорема 2. Пусть коэффициенты $a(\beta, x)$ и $\sigma_r(\beta, x)$ уравнения (1) удовлетворяют условиям (3), (4), (5). Тогда порядок точности метода (21), построенного с использованием одношаговой аппроксимации (20) равен $\frac{3}{2}$.

Доказательство.

Подсчитаем разность

$$(22) \quad X(t+h) - \bar{X}(t+h) = \\ = \mu(a(\beta(t+h), X(t+h)) - a(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)))h + \\ + (1 - 2\mu)\gamma(La(\beta(t+h), X(t+h)) - La(\beta(t+h), \bar{X}(t+h)))\frac{h^2}{2} + \Phi.$$

Так как функции a и La удовлетворяют условиям Липшица, то

$$(23) \quad |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq |\mu| \cdot hK \cdot |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + \\ + |1 - 2\mu| \cdot |\gamma| \cdot K \frac{h^2}{2} \cdot |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + |\Phi|.$$

Тогда при достаточно малых h

$$(24) \quad |X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq 2\Phi.$$

Поэтому, используя (19)

$$(25) \quad E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)|^2 \leq K|1 + |x|^2|h^4.$$

Из (24) следует

$$(26) \quad |E(X(t+h) - \bar{X}(t+h))| \leq |\mu| \cdot hK \cdot E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + \\ + |1 - 2\mu| \cdot |\gamma| \cdot K \frac{h^2}{2} \cdot E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| + |E\Phi|.$$

Отсюда, благодаря (25),

$$(27) \quad E|X(t+h) - \bar{X}(t+h)| \leq K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}h^2, \text{ и далее}$$

$$(28) \quad |E(X(t+h) - \bar{X}(t+h))| \leq K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}h^3.$$

Неравенства (25), (28) и теорема 1 доказывают, что метод (21) имеет порядок точности $3/2$ и может обеспечивать приближение решения уравнений вида (1). Теорема доказана.

Аналогично можно рассмотреть более простые методы (частные случаи рассмотренной схемы (21)), основанные на явных сильных схемах Эйлера (Euler–Maruyama) и Мильштейна, подобным образом доказывая их сходимость к решению уравнения (1).

3. Пример

Рассмотрим следующее линейное стохастическое уравнение (29) $dX_t = FX_t dt + GX_t d\omega_t$,

на временном интервале $[0, T]$, $X_0 = 1$.

Определим матрицы

$$F = \begin{pmatrix} -f(\beta, x) & f(\beta, x) \\ f(\beta, x) & -f(\beta, x) \end{pmatrix}; G = g(\beta, x)I = \begin{pmatrix} g(\beta, x) & 0 \\ 0 & g(\beta, x) \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица, $\beta = \beta(t)$, $x = x(t)$.

$$(30) X_t = X_0 \exp\left(\left(F - \frac{1}{2}G^2\right)t + G\omega_t\right) -$$

есть решение уравнения для $t \in [0, T]$ и данного винеровского процесса $\omega = \{\omega_t, t \geq 0\}$.

$M = \{1, 2, \dots, m\}$ – число состояний марковской цепи.

Зададим начальные значения $Y_0 = X_0$, $\beta_0 = u_0$ и будем рекурсивно генерировать 100 значений Y_k с равным значением шага Δ согласно (21), где Δ_k – есть длина временного интервала дискретизации $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots < \tau_N = T$ на временном интервале $[t_0, T]$;

Для сравнения будем использовать (30), чтобы определить соответствующие значения точного решения, используя ту же примерную траекторию винеровского процесса ω_t на подынтервалах $\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$.

Рассмотрим результаты численного решения уравнения (29), выбирая различные варианты задания матрицы переходов P , шага дискретизации Δ , значений функций $f(\beta_t, x_t)$, $g(\beta_t, x_t)$.

Пусть $f(\beta_b, x_t)$ принимает два значения - $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, соответствующие первому и второму состоянию марковской цепи. $g(\beta_b, x_t)$ принимает два значения - $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

$$\mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.5, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1.$$

$$1. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos x & -10 \cos x \end{pmatrix}; P = I + Q\Delta;$$

$$\alpha_1 = \sin(x) + \cos(x); \quad \alpha_2 = 2 - \sin(2x);$$

$$\lambda_1 = 0.2; \quad \lambda_2 = 0.005;$$

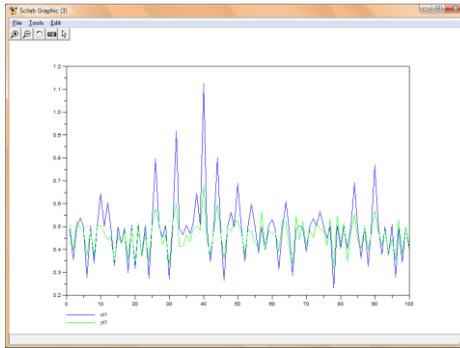


Рис. 1. Аппроксимация u_t (зеленая кривая) и первая компонента точного решения x_t (синяя кривая) $\Delta=0.5$ ($T=5$)

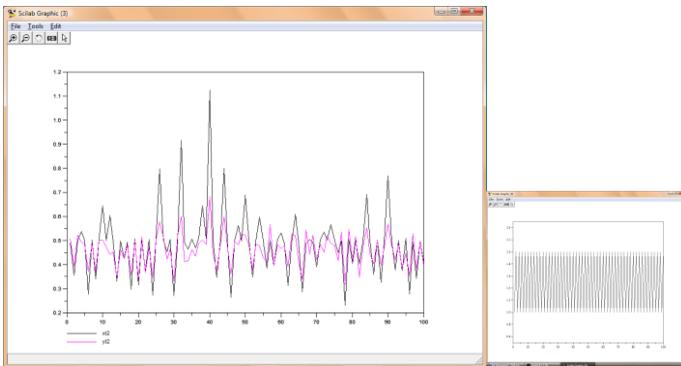


Рис. 2. Аппроксимация u_t (лиловая линия) и вторая компонента решения x_t (черная); марковская цепь

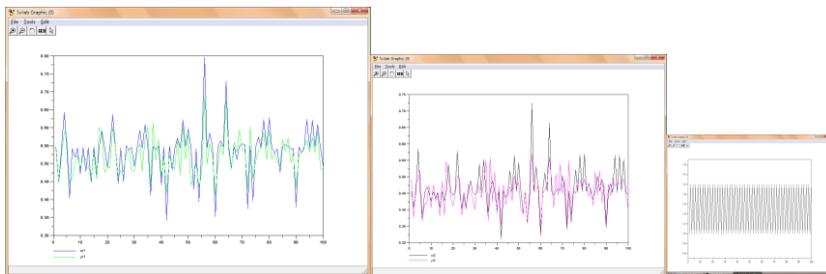


Рис. 3. $\Delta=0.1$ ($T=1$)

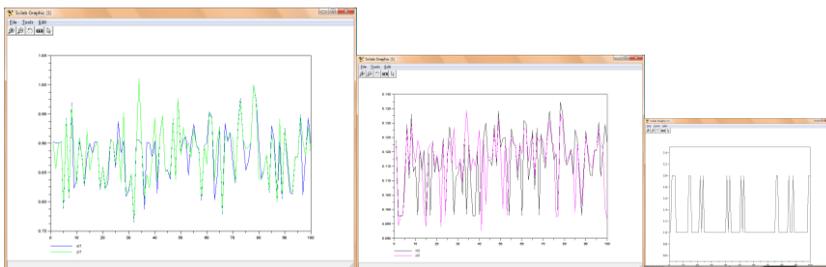


Рис. 4. $\Delta=0.05$ ($T=0.1$)

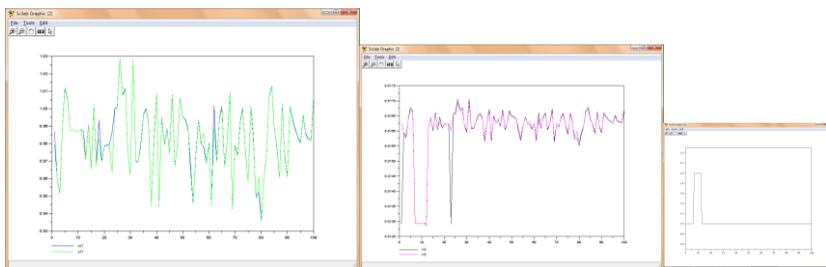


Рис. 5. $\Delta=0.002$ ($T=0.02$)

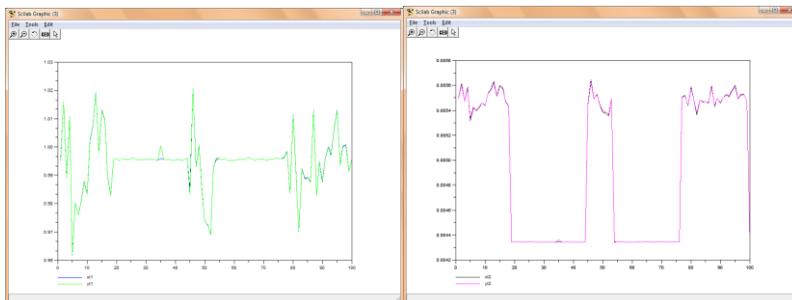


Рис. 6. $\Delta=0.0008$ ($T=0.004$)

$$2. \quad Q = \begin{pmatrix} -\cos^2 x & \cos^2 x \\ -3\sin x & 3\sin x \end{pmatrix}; P = I + Q\Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin(x); \quad \alpha_2 = 1 + \sin(x)\cos(x); \quad \lambda_1 = 0.2; \quad \lambda_2 = 0.8;$$

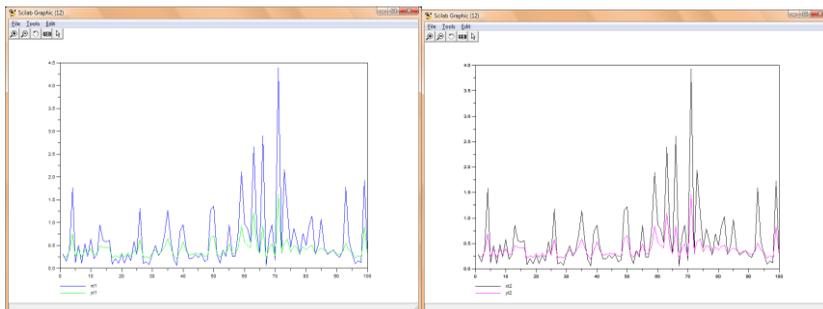


Рис. 7. $\Delta=0.6$ ($T=3$)

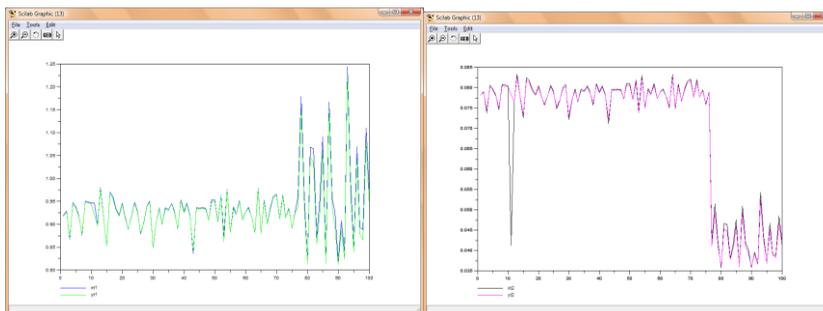


Рис. 8. $\Delta=0.006$ ($T=0.3$)

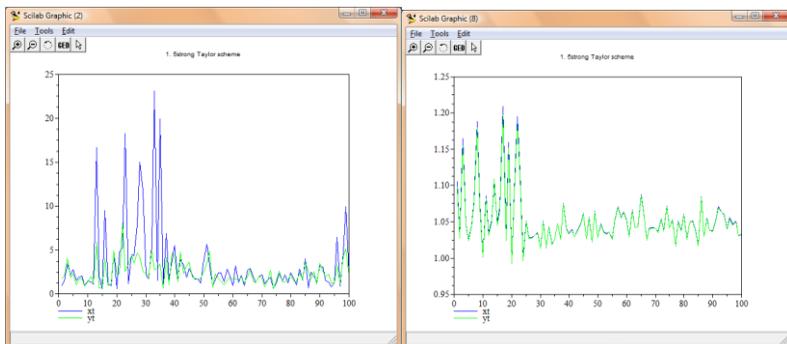


Рис. 9. Аппроксимация Тейлора 1.5(явная схема) ут при $\Delta=0.15$ ($T=1$); $\Delta=0.002$ ($T=0.03$); на отрезке $[0;3]$ ошибка явной численной схемы уже превышает допустимые значения; (для сравнения)

$$3. \quad Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix}; \quad P = I + Q\Delta;$$

$$\alpha_1 = \sin(x) + \cos(x); \quad \alpha_2 = 1 + \cos(x); \quad \lambda_1 = 0.02; \quad \lambda_2 = 0.3;$$

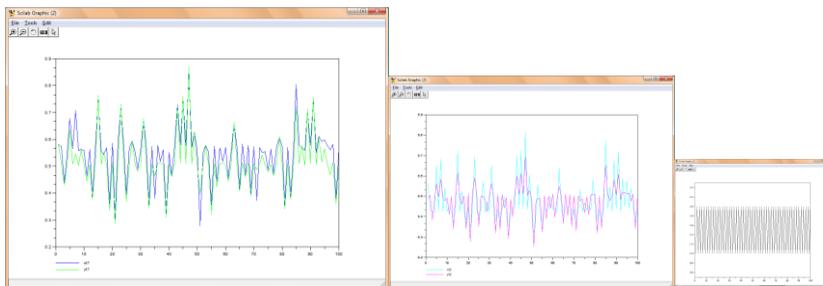


Рис. 10. $\Delta=0.5$ ($T=1$); марковская цепь

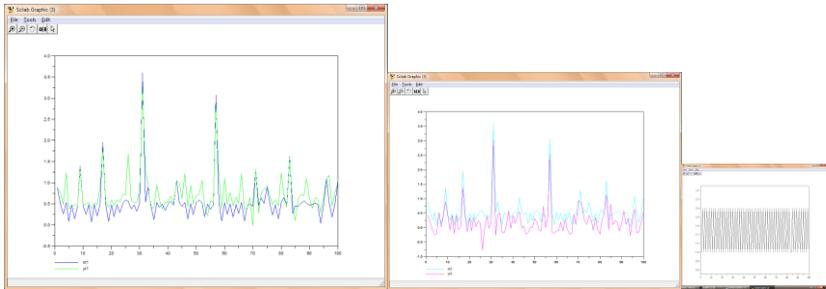


Рис. 11. $\Delta=5$ ($T=10$); марковская цепь

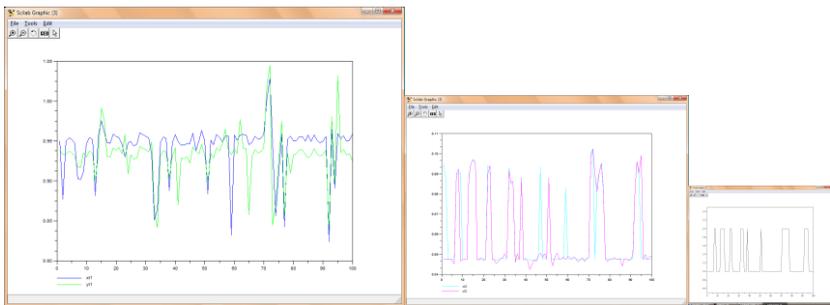


Рис. 12. $\Delta=0.01$ ($T=0.05$); марковская цепь

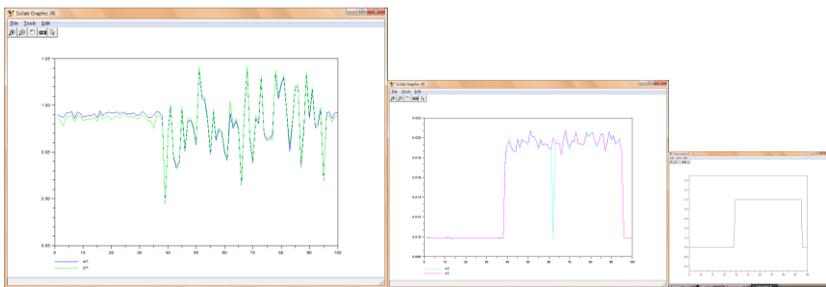


Рис. 13. $\Delta=0.001$ ($T=0.01$); марковская цепь

Далее приведем пример использования неявной схемы Эйлера

$$Y_{k+1} = Y_k + \{\mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \mu)a(\beta_k, Y_k)\} \Delta_k + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta_k, X_k) \Delta \omega_r,$$

$$Q = \begin{pmatrix} -5 \cos^2 x & 5 \cos^2 x \\ 10 \cos^2 x & -10 \cos^2 x \end{pmatrix}; P = I + Q \Delta;$$

$$\alpha_1 = 2 + \sin(x); \quad \alpha_2 = 1 + \sin(x)\cos(x); \quad \lambda_1 = 0.2; \quad \lambda_2 = 0.01;$$

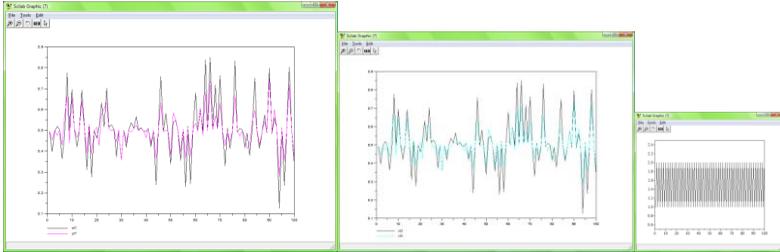


Рис. 14. $\Delta=0.5$ ($T=5$); марковская цепь

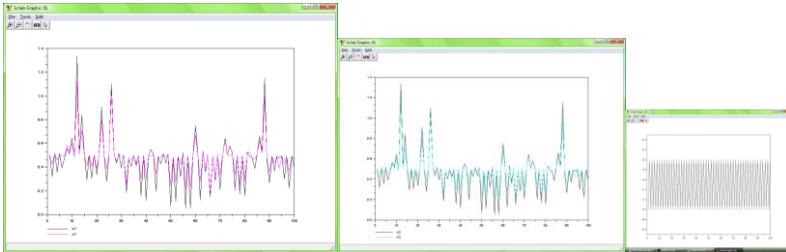


Рис. 15. $\Delta=0.8$ ($T=10$); марковская цепь

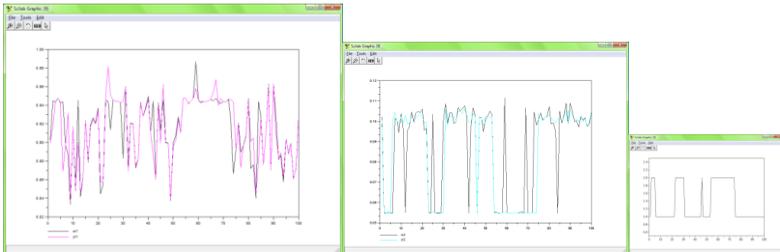


Рис. 16. $\Delta=0.008$ ($T=0.04$); марковская цепь

Пример применения неявной схемы Мильштейна

$$Y_{k+1} = Y_k + \{\mu a(\beta_{k+1}, Y_{k+1}) + (1 - \mu)a(\beta_k, Y_k)\} \Delta_k + \sum_{r=1}^d \sigma_r(\beta_k, X_k) \Delta \omega_r + \sum_{r=1}^d \sum_{i=1}^d \Lambda_i \sigma_r(\beta_k, X_k) I_{(1,1)},$$

где $I_{(0,1)}, I_{(1,0)}, I_{(1,1)}, I_{(1,1,1)}$ – повторные интегралы Ито (см. [3], стр. 9)

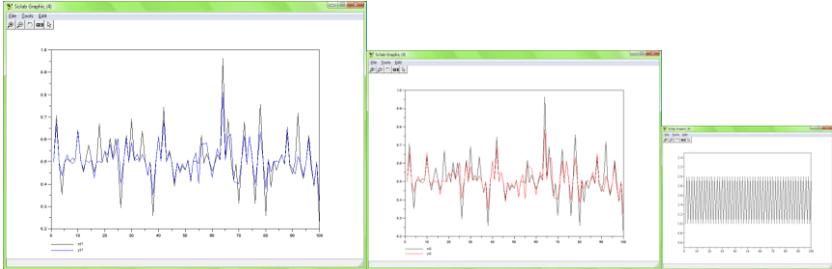


Рис. 17. $\Delta=0.6$ ($T=3$); марковская цепь

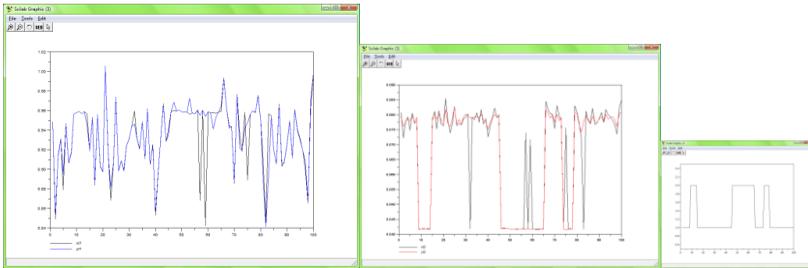


Рис. 18. $\Delta=0.008$ ($T=0.04$); марковская цепь

Литература

1. КУЗНЕЦОВ Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. Спб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 800 с.
2. МИЛЬШТЕЙН Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений*. Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1988. 224 с.
3. ЧЕРНЫХ Н. В., ПАКШИН П. В. *Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с пере-*

- ключаемой диффузией // Управление большими системами / Сборник трудов. Выпуск 36: М.: ИПУ РАН, 2012. - 315 с.*
4. A. RATHINASAMY. *Split-step θ -methods for stochastic age-dependent population equations with Markovian switching// Nonlinear Analysis: Real World Applications, Volume 13, Issue 3, June 2012, Pages 1334–1345.*
 5. A. RATHINASAMY, BAOJIAN YIN, B. YASODHA. *Numerical analysis for stochastic age-dependent population equations with Poisson jump and phase semi-Markovian switching// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 16, Issue 1, January 2011, Pages 350–362.*
 6. BAOJIAN YIN, ZHONGHUA MA. *Convergence of the semi-implicit Euler method for neutral stochastic delay differential equations with phase semi-Markovian switching// Applied Mathematical Modelling, Volume 35, Issue 5, May 2011, Pages 2094–2109.*
 7. CHENGGUI YUAN, XUERONG MAO. *Convergence of the Euler–Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching// Mathematics and Computers in Simulation Volume 64, Issue 2, 27 January 2004, Pages 223–235.*
 8. DESMOND J. HIGHAM. *Convergence and stability of implicit methods for jump-diffusion systems// Int. J. Numer. Anal. Mod., 3 (2006), pp. 125-140.*
 9. G. GERORGE YIN, CHAO ZHU. *Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications.* Springer Science + Business Media, LLC 2010.
 10. G. YIN, XUERONG MAO, CHENGGUI YUAN, AND DINGZHOU CAO. *Approximation methods for hybrid diffusion systems with state-dependent switching processes: numerical algorithms and existence and uniqueness of solutions// SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 41, №6, pp. 2335-2352, 2010.*
 11. HAIBO LI, LILI XIAO, JUN YE. *Strong predictor-corrector Euler–Maruyama methods for stochastic differential equations with Markovian switching// Journal of Computational and Applied Mathematics, Available online 5 July 2012.*

12. LI RONGHUA, PANG WAN-KAI, LEUNG PING-KEI. *Convergence of numerical solutions to stochastic age-structured population equations with diffusions and Markovian switching* // Applied Mathematics and Computation, Volume 216, Issue 3, 1 April 2010, Pages 744–752.
13. MARIJA MILOŠEVIĆ, MILJANA JOVANOVIĆ. *A Taylor polynomial approach in approximations of solution to pantograph stochastic differential equations with Markovian switching* // Mathematical and Computer Modelling, Volume 53, Issues 1–2, January 2011, Pages 280–293.
14. PETER E. KLOEDEN, ECKHARD PLATEN, HENRI SCHURZ. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. Berlin: Springer – Verlag, 1994.
15. SHU JIN WU AND BIN ZHOU. *Existence and uniqueness of stochastic differential equations with random impulses and Markovian switching under non-lipschitz conditions* // Acta Mathematica Sinica, Volume 27, Number 3 (2011), 519–536.
16. XUERONG MAO, CHENGGUI YUAN, G. YIN. *Approximations of Euler–Maruyama type for stochastic differential equations with Markovian switching, under non-Lipschitz conditions* // Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 205, Issue 2, 15 August 2007, Pages 936–948.

ARTICLE TITLE

Nadezda Chernykh, post-graduate student (nadezdacher@mail.ru).

Abstract:

The subject of this paper are implicit strong approximate methods for stochastic differential equations with Markovian switching (SDEwMSs). This chapter is devoted to numerical approximation methods for switching diffusions whose switching component is x -dependent. This work shows the strong convergence of the numerical solution to the exact solution. Numerical examples show the performance of the proposed approximations.

Keywords: stochastic systems, Markovian switchings, implicit strong numerical schemes, convergence.