

## **БИФУРКАЦИИ ДВИЖЕНИЙ НАГРУЖЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ДЕМПФИРОВАННОГО МАЯТНИКА (СИНХРОНИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ С СЕТЬЮ).**

**Скубов Д.Ю.<sup>1</sup>**

*(Санкт-Петербургский политехнический университет)*

*Аннотация. В предлагаемой статье исследуются вопросы синхронизации электрической машины с сетью. Математическое моделирование проводится численно-аналитическими методами на основе асимптотически упрощенных уравнений динамики синхронной электрической машины. Доказывается возможность более грубой (чем это принято на сегодня) синхронизации машины с сетью. А именно, большего начального рассогласования частот вращения ротора турбогенератора и частоты сети.*

Ключевые слова: синхронные электрические машины, нелинейная динамика, электромеханика, устойчивость периодических движений.

Проблема стабильного сохранения синхронного режима электрической машины с общей электрической цепью возникла в середине XX века и сохраняет свою актуальность и сегодня. Возможность выхода машины из синхронизма при изменении сетевой нагрузки и, наоборот, не выхода ее на синхронный режим при подключении к общей сети, вызывает необходимость аккуратного моделирования переходных процессов такой электромеханической системы. В основе исследования таких переходных процессов лежат уравнения Парка-Горева (см., например, [1]). Вместе с тем при их непосредственном использовании, неоднократно возникали противоречащие физике (реальным «экспериментам»), математические выводы. А именно, неправильное механическое моделирование приводило к неадекватным выводам об устойчивости работы машины с сетью. Последнее нередко приводило к катастрофическим ситуациям (разгону ротора), наступавшим, например, при «сильном регулировании» напряжением возбуждения - его пропорционально-линейном увеличении при «набросе» нагрузки. Более подробно об этом написано в монографии Ф.Ф. Родюкова [4].

Пожалуй, первой работой, дающей математическое объяснение указанного явления, можно считать небольшую книгу А.А. Янко-Триницкого [5]. Ее основным выводом является то, что при изменении нагрузки происходит изменение особой точки (угла нагрузки в синхронном режиме), и если в результате изменения нагрузки исходная особая точка выходит из зоны притяжения новой, это и ведет к нарушению синхронизма (аварийному режиму). Конечно, за счет управления напряжением обмотки возбуждения возможно сохранение устойчивости, но для этого требуется не режим прямого регулирования, а регулирование с обратной связью, что, в свою очередь, достаточно трудоемко и, как будет показано ниже, не является необходимым.

1. Одной из первых и наиболее простых математических моделей синхронного генератора (двигателя) является маятниковая модель, приведенная в книге Дж. Стокера [7], описываемая уравнением Трикоми:

$$(1.1) \quad \ddot{\vartheta} + \beta \dot{\vartheta} + u \sin \vartheta = m .$$

<sup>1</sup>Скубов Дмитрий Юльевич, д. ф-м. н., проф., (Санкт-Петербург, ул.Бассейная, д.71, кв.32, (тел.(812) 387-81-52), skubov.dsk@yandex.ru

Здесь  $\vartheta$  - угол рассогласования магнитных осей ротора и вращающегося магнитного поля статора,  $u$  – параметр управления, определяемый напряжением возбуждения синхронной машины,  $m$  – момент двигателя, вращающего ротор генератора (турбины для турбогенератора) или тормозящий вращение - момент нагрузки (при работе машины в режиме двигателя). Слагаемое  $\beta\dot{\vartheta}$ , формально описывает демпфирование эквивалентного маятника. Для синхронной машины оно возникает вследствие линеаризации момента нагрузки как функции угловой скорости относительно синхронного режима  $\dot{\vartheta} = 0$ ,  $\vartheta_* = \arcsin m/u$ .

Основная цель исследования уравнения (1.1) применительно к динамике синхронной машины состоит в определении условий, обеспечивающих стремление любого из его решений к положению равновесия при стремлении независимой переменной (времени) к бесконечности. Такое поведение решений характеризует процесс втягивания машины в синхронизм независимо от начальных условий (на самом деле, при достаточно небольших начальных скольжениях – рассогласованиях скоростей вращения ротора и электромагнитного поля статора). Идеализированная модель динамики синхронной машины, в «первом приближении» описываемая уравнением Трикоми, совсем недавно была модифицирована группой петербургских ученых – механиков под руководством профессора Камилла Шамсутдиновича Ходжаева (см. далее).

Более сложной, но не менее важной для практики, является задача определения вращательных движений уравнения (1.1), так называемых предельных циклов второго рода (замкнутых траекторий вокруг фазового цилиндра), которые для синхронной машины отвечают асинхронному ходу с постоянным средним скольжением.

Отыскание условий абсолютной устойчивости синхронного режима (устойчивого положения равновесия «эквивалентного маятника») сводится к нахождению соотношения параметров  $m$  и  $\beta$ , которое соответствует гетероклинической фазовой траектории (сепаратрисе, идущей из седла в седло). Т.е. необходимо найти сепаратрису, соединяющую точки  $-\pi - \alpha$  и  $\pi - \alpha$  ( $\alpha = \arcsin(m/u)$ ,  $|m/u| < 1$ ) - эквивалентные на фазовом цилиндре.

Основные типы движений, описываемые уравнением Трикоми, в случае  $m > 0, u > 0$  и  $\beta > 0$  приведены на Рис.1. Так на Рис.1(а) показан случай абсолютной устойчивости синхронного режима. На Рис.1(б) – «граничный» случай гетероклинической сепаратрисы, идущей из седла в седло. На Рис.1(в) – случай разделения областей движений на сходящиеся или к устойчивому фокусу (синхронному режиму) или к устойчивой ротации (асинхронному режиму с постоянной средней угловой скоростью – скольжению машины).

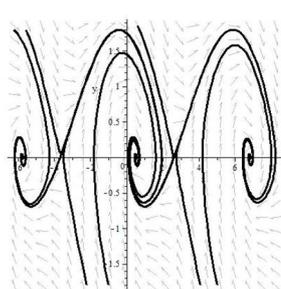


Рис.1(а)

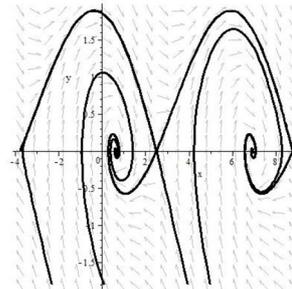


Рис.1(б)

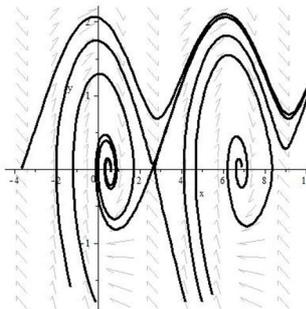


Рис.1(в)

Имеет смысл приведение фазового портрета уравнения Трикоми в случае наличия ротации – предельного цикла второго рода на цилиндрическом фазовом пространстве (Рис.2). Здесь предполагается наличие устойчивой ротации и устойчивого фокуса (для случая  $m > 0, \beta > 0, m/u < 1$ ). Фокус имеет место при  $\beta^2 < 4\sqrt{u^2 - m^2}$ .

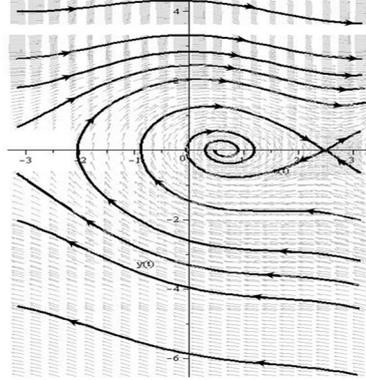


Рис.2

Для отыскания движения, отвечающего гетероклинической сепаратрисе (Рис.1(б)), в работе используется полиномиальная аппроксимация гладкой кривой, заданной на отрезке некоторой аналитической функцией по значениям ее самой и ее производных (только их) на концах этого отрезка.

Иными словами, пусть  $y(x)$  - некая аналитическая функция, заданная на отрезке  $[a, b]$ , и известны значения  $y(a), y'(a), \dots, y(b), y'(b), \dots$ . Функция  $y(x)$  может удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению, из которого можно найти  $y'(a), y'(b)$  и остальные производные на концах отрезка. Функция  $y(x)$  далее разыскивается в виде степенного ряда, вид которого был предложен петербургским профессором Робертом Фаритовичем Нагаевым:

$$(1.2) \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} \xi + v_k^{(0)} \eta) (\xi \eta)^k$$

где  $\xi(x) = \frac{x-a}{b-a}; \eta(x) = \frac{b-x}{b-a}$ . Такое представление функции  $y(x)$ , как будет показано ниже, сохраняет форму разложения для всех производных, заменяя коэффициенты  $u_k^{(0)}, v_k^{(0)}, k = 0, 1, \dots$  для самой функции  $y(x)$  на  $u_k^{(n)}, v_k^{(n)}$  для ее производной  $y^{(n)}(x)$ , умноженной на  $(b-a)^n$ . Эти коэффициенты находятся рекуррентно, что удобно для их расчета.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений могут быть получены следующим образом. Продифференцируем  $y(x)$ , используя выражение (1.2)

$$(1.3) \quad \begin{aligned} (b-a)y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi \eta)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} \xi + v_k^{(0)} \eta) (\xi \eta)^{k-1} k(\eta - \xi) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi \eta)^k + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(0)} (\xi \eta - \xi(1-\eta)) + v_k^{(0)} (\eta(1-\xi) - \xi \eta) (\xi \eta)^{(k-1)} k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi \eta)^k + \sum_{k=1}^{\infty} (-u_k^{(0)} \xi + v_k^{(0)} \eta) k (\xi \eta)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 2k (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi \eta)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) (u_k^{(0)} (\xi + \eta) - v_k^{(0)} (\xi + \eta)) (\xi \eta)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (-u_{k+1}^{(0)} \xi + v_{k+1}^{(0)} \eta) (\xi \eta)^k = \end{aligned}$$

Сравнивая (1.3) с выражением  $y'(x)(b-a) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(1)}\xi + v_k^{(1)}\eta)(\xi\eta)^k$ , получаем

$$(1.4) \quad \begin{aligned} u_k^{(1)} &= (2k+1)(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) - (k+1)u_{k+1}^{(0)}, \\ v_k^{(1)} &= (2k+1)(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) + (k+1)v_{k+1}^{(0)}. \end{aligned}$$

Действуя по индукции, найдем связь между остальными коэффициентами

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u_{k+1}^{(n)} &= \frac{2k+1}{k+1}(u_k^{(n)} - v_k^{(n)}) - \frac{1}{k+1}u_k^{(n+1)}, \\ v_{k+1}^{(n)} &= -\frac{2k+1}{k+1}(u_k^{(n)} - v_k^{(n)}) + \frac{1}{k+1}v_k^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Перейдя к новой независимой переменной  $\vartheta$ , перепишем уравнение (1.1) в виде:

$$(1.6) \quad \frac{d\omega}{d\vartheta}\omega + \beta\omega + u \sin \vartheta = m,$$

принимая за независимую переменную угол  $\vartheta$ ,  $\omega = \dot{\vartheta}$ . Значения производных в седловых точках могут быть найдены последовательным дифференцированием (1.6) с подстановкой значений функций в крайних точках:  $\vartheta_1 = \pi - \alpha$  и  $\vartheta_2 = -\pi - \alpha$ .

Для первых производных  $\omega'(\vartheta_1)$  и  $\omega'(\vartheta_2)$  получаем квадратное уравнение:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \omega'^2 + \beta\omega' - u \cos \alpha &= 0, \\ \omega_{1,2}' &= -\frac{\beta}{2} \pm \left(\frac{\beta^2}{4} + u \cos \alpha\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В результате, находим направляющие - касательные сепаратрисы в седловых точках с положительным и отрицательным наклоном. Для старших производных имеем выражения:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \omega_{1,2}'' &= \frac{u \sin \alpha}{3\omega_{1,2}' + \beta}, \\ \omega_{1,2}''' &= -\frac{3\omega_{1,2}'' - u \cos \alpha}{4\omega_{1,2}' + \beta}, \\ \omega_{1,2}^{IV} &= -\frac{10\omega_{1,2}''' \omega_{1,2}'' + u \sin \alpha}{5\omega_{1,2}' + \beta}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Интегрируя (1.6) на отрезке между седловыми точками, получим

$$(1.9) \quad \frac{1}{2\pi} \beta \int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} \omega(\vartheta) d\vartheta = m$$

После подстановки в (1.9) найденного разложения  $\omega(\vartheta)$ , используя соотношение (1.2), в котором роль функции  $y(x)$  играет  $\omega(\vartheta)$  и, соответственно,  $a$  и  $b - \vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , получаем алгебраическое уравнение  $f(m, \beta) = 0$ , определяющее критическое значение  $m_{cr}(\beta, u)$ , которое

отвечает сепаратрисе, идущей из седла в седло, при заданном значении параметра управления  $u$ . При  $m(u) < m_{cr}(\beta, u)$  имеем абсолютную устойчивость положения равновесия (синхронного движения). Если же  $m(u) > m_{cr}(\beta, u)$ , то фазовое пространство разделяется на два потока траекторий, стремящихся, либо к положению равновесия, либо к стационарному вращению с периодической по углу угловой скоростью (дихотомия). Кривая  $m_{cr}(\beta, u)$  при значении параметра управления  $u = 1$  приведена на Рис.3

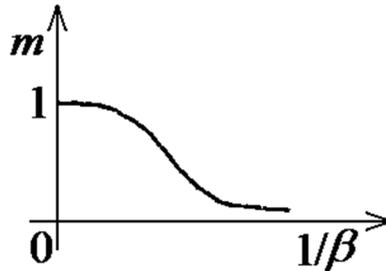


Рис.3

Семейство кривых, отвечающих гетероклинической сепаратрисе при различных значениях параметра управления  $u$ , можно перестроить как совокупность кривых  $m_{cr}(u)$  для заданных значений  $\beta$ . Можно показать, что при некотором фиксированном  $\beta$ , в определенном диапазоне  $u \in [u_1, u_2]$ ,  $m(t) < m_{cr}(\beta)$  для  $\forall t \in [0, T]$ , то движение ротора синхронной машины сходится к равномерному синхронному вращению (фокусу для «эквивалентного маятника»), отвечающему  $m = m(T)$ , при заданном значении  $u$  (см. Леонов Г.А., Смирнова В.Б. [3]). Среднее значение угловой скорости ротора синхронной машины (в наших обозначениях - скольжение) в случае асинхронного хода (предельного цикла второго рода «эквивалентного маятника») легко определяется усреднением уравнения (1.6)

$$(1.10) \quad \bar{\omega} = \langle \omega_{\bullet} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_{\bullet}(\vartheta) d\vartheta = m / \beta.$$

Отметим, что предельные циклы второго рода (ротационные движения маятника) могут быть расположены как в верхней, так и в нижней части цилиндрического фазового пространства (в зависимости от знаков  $m$  и  $\beta$ ). Изменение знака момента соответствует изменению характера работы синхронной машины (для введенных обозначений  $m > 0$  - генератор,  $m < 0$  - двигатель). Изменение знака  $\beta$  (эквивалентного «демпфирования») определяется характером зависимости момента от угловой скорости. Для генератора (в случае  $m > 0$ ) наиболее естественным является уменьшение момента двигателя (для турбогенератора – паровой турбины), вращающего ротор, при увеличении его угловой скорости. В случае  $m < 0$  (работы синхронной машины в режиме двигателя) возможен как первый, так и второй вид зависимости момента нагрузки  $m$  от угловой скорости, например, при работе синхронной машины в качестве привода плунжерного насоса возможны как падающие, так и возрастающие участки стационарной зависимости вращающего момента от угловой скорости.

Устойчивость предельных циклов второго рода определяется абсолютной величиной мультипликатора уравнения в вариациях, записанного относительно периодического стационарного ротационного режима  $\omega_{\bullet}(\vartheta)$ :

$$(1.11) \quad \omega_{\bullet}(\vartheta) \cdot \zeta' + (\omega'_{\bullet} + \beta)\zeta = 0.$$

Для уравнения первого порядка (1.6) мультипликатор определяется формулой

$$(1.12) \quad \rho = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{\omega'_*(\tau) + \beta}{\omega_*(\tau)} d\tau\right) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{\beta}{\omega_*(\tau)} d\tau\right).$$

Вопрос устойчивости решается знаком интеграла под экспонентой. Из невозможности для уравнения Трикоми (при  $m, \beta > 0$ ) движений с переменной по знаку (направлению) стационарной ротацией, следует вывод о том, что устойчивость ротационного движения достаточным образом определяется соотношением знаков коэффициента  $\beta$  и средней угловой скорости  $m/\beta$ . Для положительных  $m$  и  $\beta$  подынтегральное выражение положительное, и, следовательно, стационарная ротация устойчива (мультипликатор – вещественный меньший 1).

Пример неустойчивого предельного цикла второго рода для уравнения Трикоми ( $m < 0, \beta < 0, u > 0$  - работа в режиме синхронного двигателя с возможным уменьшением «демпфирования» по мере роста угловой скорости) приведен на Рис.4 - фазовый портрет в случае неустойчивой ротации, с сепаратрисой, убегающей из неустойчивого фокуса, при  $m = -0.6, u = 1, \beta = -0.3$ . В этом случае (при тех же знаках параметров) фокус, который также как и в предыдущем случае, имеет место при  $\beta^2 < 4\sqrt{u^2 - m^2}$ , становится неустойчив. Обратное неравенство соответствует также неустойчивому, но узловому положению равновесия.

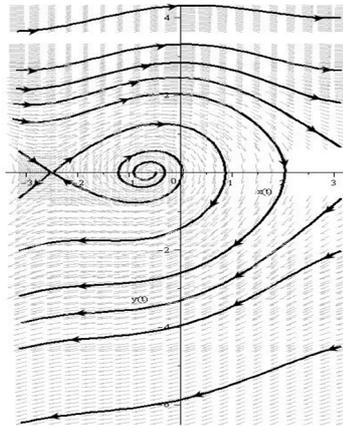


Рис.4

Ротационное решение (асинхронный ход синхронной машины) может быть найдено и методом гармонического баланса для уравнения (1.6). В первом приближении (с учетом только первой гармоники по углу  $\vartheta$ ) ротационный режим (предельный цикл второго рода «эквивалентного маятника») может быть найден в виде:

$$(1.13) \quad \omega_*(\vartheta) = \omega_0 + \omega_s \sin \vartheta + \omega_c \cos \vartheta,$$

удерживая только первую гармонику при балансировании, имеем

$$(1.14) \quad \omega_0 = \langle \omega_*(\vartheta) \rangle_{2\pi} = m/\beta, \quad \omega_s = u\beta / (\omega_0^2 + \beta^2), \quad \omega_c = -u\omega_0 / (\omega_0^2 + \beta^2).$$

Полученная аппроксимация ротационного движения легко уточняется удержанием двух гармоник

$$(1.15) \quad \omega(\vartheta) = \omega_0 + \omega_s \sin \vartheta + \omega_c \cos \vartheta + \omega_{2s} \sin 2\vartheta + \omega_{2c} \cos 2\vartheta.$$

Коэффициенты второго приближения (в смысле гармонического баланса), а именно, измененные коэффициенты  $\omega_s, \omega_c$  определяются решением системы алгебраических уравнений (после пренебрежения коэффициентами второй гармоники)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 4\omega_0(u\omega_c + 2\beta\omega_s\omega_c + \omega_0(\omega_s^2 - \omega_c^2))/(\omega_s^2 + \omega_c^2) + \\
& + 2\beta(u\omega_s + \beta(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 2\omega_0\omega_c\omega_s)/(\omega_s^2 + \omega_c^2) = 0, \\
& \frac{1}{2}\omega_s\omega_c + 4\omega_0(u\omega_s + \beta(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 2\omega_0\omega_c\omega_s)/(\omega_s^2 + \omega_c^2) + \\
& + 2\beta(u\omega_c + 2\beta\omega_s\omega_c + \omega_0(\omega_s^2 - \omega_c^2))/(\omega_s^2 + \omega_c^2) = 0.
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

Решение данной системы нелинейных алгебраических уравнений может быть получено, например, методом Ньютона, принимая за исходное приближение, – решение, полученное с удержанием только первой гармоники (1.13). Отметим еще раз, что среднее значение угловой скорости стационарной ротации  $\omega_0 = m / \beta$  сохраняется независимо от числа удерживаемых гармоник.

Устойчивость стационарного решения может быть исследована на основе решения вариационного уравнения относительно приближенного описания стационарной ротации с учетом только ее среднего значения и первой гармоники по  $\mathcal{G}$ , найденных первым приближением метода гармонического баланса значений коэффициентов  $\omega_s, \omega_c$ . Значения параметров  $m, u, \beta$ , отвечающие границе устойчивости найденного периодического движения, если оно есть, могут быть найдены в результате отыскания периодического решения уравнения в вариациях (1.11). Т.е. необходимо найти те значения параметров, при которых решение уравнения в вариациях, может быть представлено в виде ряда Фурье:

$$\xi(\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} (b_{kc} \cos k\delta + b_{ks} \sin k\delta).
\tag{1.17}$$

После подстановки решения (1.17) в уравнение (1.11) и балансирования по гармоникам получаем систему алгебраических уравнений, первоначальная часть которых имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \beta b_{0c} = 0, \\
& \omega_0 b_{1s} - \omega_s b_{2c} + \omega_c b_{2s} + \frac{1}{2}\omega_s b_{2c} + \omega_s b_{0c} + \beta b_{1c} - \frac{1}{2}\omega_c b_{2s} + \frac{1}{2}\omega_s b_{2c} = 0, \\
& -\omega_0 b_{1c} - \omega_s b_{2s} - \omega_c b_{2c} + \frac{1}{2}\omega_s b_{2s} + \frac{1}{2}\omega_c b_{2c} - \omega_c b_{0c} + \beta b_{1s} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.18}$$

Эта система не полна в том смысле, что не выписаны уравнения баланса по второй и высшим гармоникам. Для существования ненулевого периодического решения уравнения в вариациях необходимо обращение в нуль определителя получаемой таким образом однородной системы с учетом соответствующего числа гармоник.

2. Как показали исследования группы механиков Санкт-Петербургского политехнического университета, организованной профессором Камиллом Шамсутдиновичем Ходжаевым, существенно более точное описание процесса синхронизации электрической машины с сетью дают асимптотически преобразованные уравнения Парка-Горева (см. D.Yu.Skubov, K.Sh.Khodzhaev [6]). Основным результатом является полученная методом усреднения математическая модель синхронной машины как математического маятника, жестко связанного с магнитоэлектрическими контурами (проводящими рамками в постоянном магнитном поле), поворачивающегося под действием постоянного момента двигателя (для турбогенератора - турбины) (Рис.5).

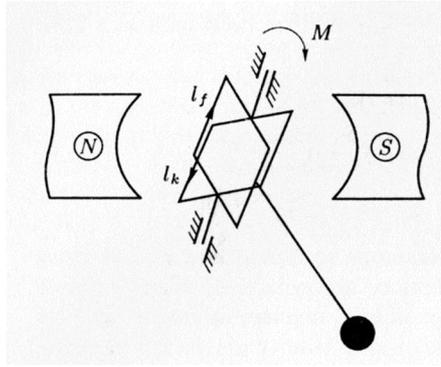


Рис.5

Такая модель описывается системой уравнений, имеющей структуру уравнений Лагранжа:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} l\dot{I}_f - \gamma\dot{\delta} \sin \delta + r_f I_f &= 0, \\ l\dot{I}_k - \gamma\dot{\delta} \cos \delta + r_k I_k &= 0, \\ J\ddot{\delta} + \gamma(I_f \sin \delta + I_k \cos \delta) + e_f \sin \delta &= m - \beta\dot{\delta}, \end{aligned}$$

где  $\delta$  - угол поворота маятника (для синхронной машины - угол рассогласования вращающегося с переменной частотой ротора (генератора или двигателя, в зависимости от способа приложения мощности) и электромагнитного поля статора, волна которого с учетом только первой гармоники как по времени, так и по распределению по окружности сердечника статора вращается по окружности в виде синусоиды с частотой 50 Гц), в простейшем случае трехфазной обмотки со сдвигом фаз на  $2\pi/3$  как по углу, так и по времени. Такого типа движение поля статора обеспечивается способом укладывания трехфазной обмотки. Подробное описание задач проектирования электрических машин переменного поля как синхронных, так и асинхронных, можно найти во вставшей для инженеров-электриков классической книге В.В.Домбровского, Г.М.Хуторецкого [2]. В зависимости от числа фаз обмотки возбуждения ротора -  $p$ , частота его вращения может быть в  $p$  раз ниже частоты вращения поля статора.

Раскроем введенные в системе (2.1) обозначения:  $I_f, I_k$  - токи, наводимые в демпферных контурах с сопротивлениями  $r_f, r_k$  и индуктивностью  $l$  (эквивалентные в простейшей математической идеализации демпферным контурам синхронной машины, в том числе твердотельной бочке ротора);  $J$  - момент инерции ротора (для нашей аппроксимирующей модели - маятника с магнитоэлектрическим демпфированием при его плоских колебаниях относительно оси поворота);  $\gamma$  - коэффициент, характеризующий напряжение индуцируемого напряжения (для маятника с контурами в постоянном магнитном поле - величины магнитного потока, создаваемого полем пары постоянных магнитов, обращенных друг к другу противоположными полюсами);  $m - \beta\dot{\delta}$  - зависящий от частоты вращения ротора момент турбины (линейно падающий при увеличении угловой скорости (в первом приближении) вблизи стационарного режима);  $e_f$  - напряжение обмотки возбуждения, для введенной системы оно эквивалентно силе тяжести, действующей на груз маятника.

Система (2.1) результат асимптотического упрощения системы уравнений Парка-Горева. В ней введены масштабированные переменные:

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{d\tau} = S - \text{масштабированное скольжение} \approx O(1), \quad \tau = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_\omega}{\sigma_d}} \mathcal{G}_0 = 0.039 \cdot \mathcal{G}_0,$$

$$\mathcal{G}_0 = 2\pi \cdot 50 \text{Гц} \cdot t(c) = 314 t$$

Подробное объяснение вывода асимптотических уравнений (2.1) и способа введения малых параметров можно найти в упомянутой книге Д.Ю.Скубова, К.Ш.Ходжаева [6].

Обратный переход к уравнению Трикоми осуществляется пренебрежением сопротивлениями демпферных контуров  $r_f = r_k = 0$ . Если же, наоборот, пренебречь инерционностью (индуктивностью демпферных контуров), т.е. положить  $l = 0$ , то система (2.1) преобразуется к виду

$$(2.2) \quad \kappa \ddot{\delta} + \gamma^2 \left( \frac{\sin^2 \delta}{r_f} + \frac{\cos^2 \delta}{r_k} \right) \dot{\delta} + e_f \sin \delta = m - \beta \dot{\delta},$$

который в случае равенства сопротивлений демпферных контуров снова преобразуется к уравнению Трикоми, но с измененным (увеличенным) коэффициентом при  $\dot{\delta}$ .

После имеющей физический смысл замены - повороту потоковых переменных на угол  $\delta$ :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x_1 &= I_f \sin \delta + I_k \cos \delta, \\ x_2 &= I_f \cos \delta - I_k \sin \delta \end{aligned}$$

получаем следующую динамическую систему (далее, для простоты, не снижая общности, предполагается равенство демпферных сопротивлений  $r_f = r_k = r$ )

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 - \dot{\delta} x_2 - \gamma \dot{\delta} + r x_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 + \dot{\delta} x_1 + r x_2 &= 0, \\ \ddot{\delta} + \gamma x_1 + e_f \sin \delta &= m - \beta \dot{\delta}. \end{aligned}$$

Реальные значения параметров  $\gamma = 1.7, r = 1, e_f = 1, m = 0.5, \beta = 0.02$ , наиболее приближенные к действительности  $r_f = 0.09214, r_k = 1.3208, \gamma = 1.6906$ . Подробнее о выводе системы уравнений (2.4) и о способе введения ее параметров можно познакомиться по упомянутой книге [6].

Меняем  $S(0)$ - начальное масштабированное скольжение (разность скоростей вращающегося поля ротора и бегущей волны электромагнитного поля статора в момент включения в сеть). В результате окончания переходного процесса приходим либо к фокусу – равновесию маятника (синхронный ход турбогенератора), либо к его ротации (асинхронный ход генератора с переменной, но периодически меняющейся, как по углу, так и по времени, угловой скоростью). Задача состоит в отыскании самих ротаций и соотношения параметров, определяющих тот или иной тип движения и его устойчивость. Вернее, границы перехода от одних к другим. Их рождения и устойчивости (ветвления).

Для отыскания ротационного движения переходим к новой (ранее введенной) независимой переменной  $\delta$ . Обозначая  $\dot{\delta} = \omega$ , от уравнений (2.8.20) переходим к уравнениям:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \omega x_1' - \omega x_2 - \gamma \omega + r x_1 &= 0, \\ \omega x_2' + \omega x_1 + r x_2 &= 0, \\ \omega \omega' + \gamma x_1 + e_f \sin \delta + \beta \omega &= m \end{aligned} \quad ( )' = \frac{d}{d\delta}$$

В указанном выше случае  $r = 0$  - система (2.5) (или, что математически эквивалентно  $\gamma = 0$  для уравнений (2.4)) сводится к хорошо изученному уравнению Трикоми. Наша задача - выявить отличия, а как показывают численные эксперименты, они есть и не только количественные, но и качественные.

Для отыскания ротационных движений воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, принимая за исходные однородные уравнения:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} x_1' + \frac{r}{\omega(\delta)} x_1 &= 0, \\ x_2' + \frac{r}{\omega(\delta)} x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_i(\delta) = C_i(\delta) \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right), i = 1, 2.$$

В результате приходим к системе:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} C_1' - C_2 &= \gamma \exp\left(\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right), \\ C_2' + C_1 &= 0, \\ \omega\omega' + \gamma C_1 \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right) + e_f \sin \delta + \beta\omega &= m. \end{aligned}$$

Общее решение дифференциального уравнения относительно  $C_1(\delta)$

$$(2.8) \quad C_1'' + C_1 = \gamma \frac{r}{\omega(\delta)} \exp\left(\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right)$$

при нулевых начальных условиях (а это при отыскании стационарного решения не имеет значения) имеет вид

$$(2.9) \quad C_1(\delta) = \gamma r \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{1}{\omega(\sigma)} \exp\left(\int_{\delta_0}^{\sigma} \frac{r}{\omega(\xi)} d\xi\right) \sin(\delta - \sigma) d\sigma.$$

После подстановки  $C_1(\delta)$  в третье уравнение системы (2.7) получим интегродифференциальное уравнение

$$(2.10) \quad \omega\omega' + \gamma^2 r \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{\sin(\delta - \sigma)}{\omega(\sigma)} \exp\left(-r \int_{\sigma}^{\delta} \frac{d\xi}{\omega(\xi)}\right) d\sigma + e_f \sin \delta + \beta\omega = m.$$

Только теперь можно начать считать движения, начальная система в трехмерном фазовом пространстве не дает ответа на поиск всех возможных ротаций. Интегралы в случае периодических движений при удержании только первой гармоники могут быть найдены аналитически.

Для приближенного расчета стационарных ротаций воспользуемся методом гармонического баланса, применяя его для системы уравнений (2.5)

$$(2.11) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_{10} + x_{1s} \sin \delta + x_{1c} \cos \delta, \\ x_2 &= x_{20} + x_{2s} \cos \delta - x_{2c} \sin \delta, \\ \omega &= \omega_0 + \omega_s \sin \delta + \omega_c \cos \delta, \end{aligned}$$

где  $\omega = \dot{\delta}$ . Оставив только постоянные составляющие и первые гармоники по  $\delta$ , приходим к кубическому уравнению, дающему ответ о значениях средних угловых скоростей возможных стационарных ротаций

$$(2.12) \quad \beta \omega_0^3 - m \omega_0^2 + (r^2 \beta + \gamma^2 r) \omega_0 - m r^2 = 0$$

и средних составляющих потоков:

$$(2.13) \quad x_{10} = \frac{\gamma r \omega_0}{\omega_0^2 + r^2}, \quad x_{20} = -\frac{\gamma \omega_0^2}{\omega_0^2 + r^2}.$$

Исходя из правила Декарта, для определенных выше параметров кубическое уравнение (2.12) имеет три положительных действительных корня. Для указанных выше параметров график кубического уравнения (2.12) приведен на Рис.6.

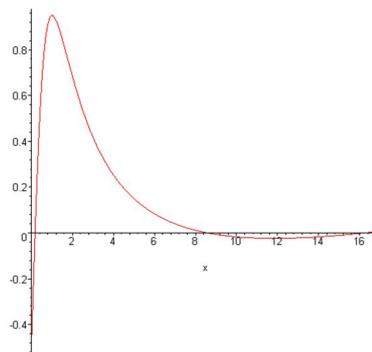


Рис.6

Два последних корня полностью совпадают со средними значениями угловых скоростей стационарных ротаций, соответственно неустойчивой (меньшей) и устойчивой (большей), полученных численным расчетом переходных процессов – задачи Коши для системы (2.4). Вопрос отыскания областей притяжения первой ротации находится в стадии разработки. По корням уравнения (2.12) «легко» определяются сами режимы, но не их устойчивость (пространство трехмерное). Вопрос отыскания границ существования и устойчивости ротационных режимов в пространстве параметров  $m, \beta, \gamma, r$  весьма сложен, и до конца еще не изучен. Интересно сравнить границы существования полученных ротационных решений в зависимости только от двух параметров  $m, \beta$  с границей существования ротационного решения уравнения Трикоми, приведенной на Рис.3.

Графики движений синхронной машины, описываемые системой (2.4), при различных начальных скольжениях  $S(0)$  приведены на Рис.7, 8, 9. Начальные потоки определяются из условия включения машины в сеть «бесконечной» мощности с заданным начальным углом рассогласования полей ротора и статора  $\delta_0 = \pi/3$ . В приведенных графиках  $x_4(t) = \dot{\delta}$ , а  $x_1(t), x_2(t)$  соответствуют тем же обозначениям, что и в (2.4).

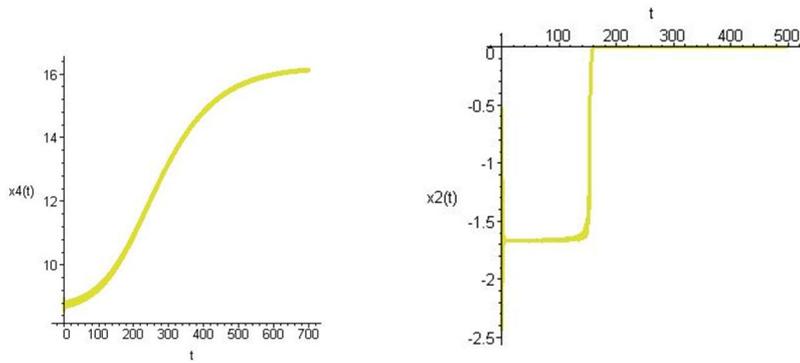


Рис.7

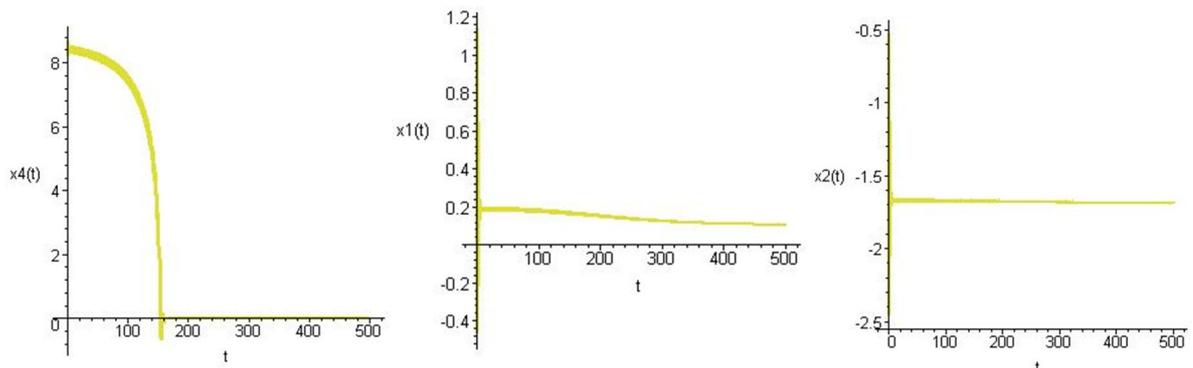


Рис.8

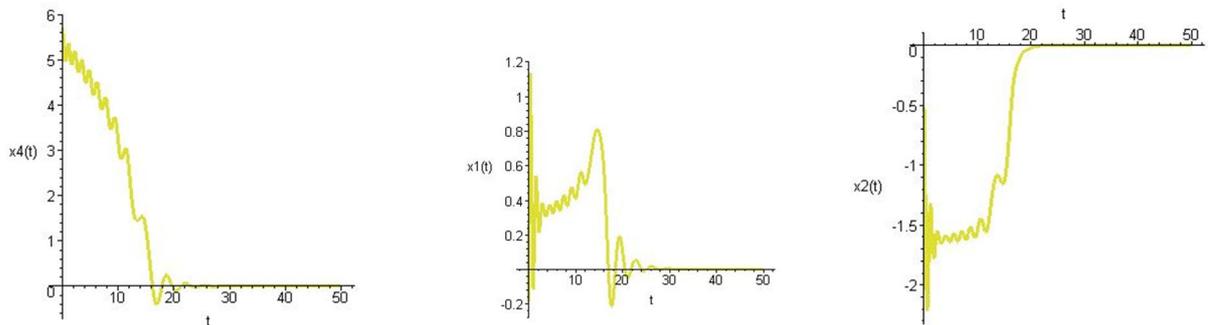


Рис. 9

На последнем рисунке синхронизация машины с сетью наблюдается при начальном скольжении  $S(0) = 5.7$ , что физически эквивалентно  $s(0) \approx 2.8\Gamma\psi$ . Несомненно, такое значение начального скольжения, сохраняющее переход к синхронному режиму, достаточно велико. Но и после расчета переходного процесса при включении в сеть с более реальными параметрами, приведенными после формулы (2.4), синхронизация оказывается возможной также для сравнительно больших значений начального скольжения  $s(0) = 2 \div 3\Gamma\psi$ .

Интересно отметить, что резисторное демпфирование (слагаемые с коэффициентами  $r_f, r_k$  в первых двух уравнениях для токов в демпферных контурах маятника) связано с уравнением вращения гироскопическим образом, что приводит, в частности, к их недостаточности для ликвидации неограниченных движений по  $\delta$ , которые физически невозможны. Ограничение последних вытекает из наличия в уравнении вращения (третьего уравнения системы (2.4)) эквивалентного «демпфирования» - слагаемого  $\beta\dot{\delta}$ , отвечающего в первом приближении (при малых скольжениях) падению момента двигателя (турбины) при увеличении угловой скорости ротора.

В зависимости от величины момента  $m$  возможно различное значение числа периодических движений (ротаций маятника). Вопрос устойчивости найденных ротационных движений может быть решен путем вычисления «приближенных» мультипликаторов путем построения матрицы монодромии системы уравнений в вариациях относительно приближенного решения (2.11). Система уравнений в вариациях имеет вид:

$$\begin{aligned}\omega_* z_1' + (x_{1*}' - x_{2*})\zeta - \omega_* z_2 + r z_1 &= 0, \\ \omega_* z_2' + (x_{2*}' + x_{1*})\zeta + \omega_* z_1 + r z_2 &= 0, \\ \omega_* \zeta' + (\omega_*' + \beta)\zeta + \gamma z_1 &= 0\end{aligned}\tag{2.14}$$

Коэффициенты системы (2.14) являются периодическими функциями угла  $\delta$ , и в матричной форме она может быть записана

$$\omega_* \eta'' + A(\delta)\eta + R\eta = 0,\tag{2.15}$$

где  $\omega_*(\delta)$  - исследуемое периодическое решение (ротация),  $A(\delta)$  - матрица периодических функций с периодом  $2\pi$ ,  $R$  - постоянная матрица сопротивлений. Решение системы (2.15) в общем случае может быть представлено в виде суммы произведений экспоненциальных и периодических функций. Граница устойчивости найденного ротационного решения в области параметров  $m, \beta, r, \gamma$  может быть найдена в результате отыскания периодических решений уравнения в вариациях (2.15).

Следует сказать, что исследование синхронизации электрической машины с сетью с помощью асимптотических и, далее, численных и качественных методов, еще не завершено и находится в стадии постоянной разработки. Как представляется, достаточно важной с точки зрения более простого (более грубого) перехода к синхронному режиму электрической машины с сетью.

### ***Литература.***

1. ВАЖНОВ А.И. Переходные процессы в машинах переменного тока. Л.: Энергия, 1980. – 256 с.
2. ДОМБРОВСКИЙ В.В., ХУТОРЕЦКИЙ Г.М. Основы проектирования электрических машин переменного тока. Л., «Энергия», 1974.
3. ЛЕОНОВ Г.А., СМИРНОВА В.Б. Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000.
4. РОДЮКОВ Ф.Ф. Математическая модель большой электроэнергетической системы. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. – 122 с.
5. ЯНКО-ТРИНИЦКИЙ А.А. Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1958. -104 с.
6. D.Yu.SKUBOV, K.Sh.KHODZHAEV . Non-Linear Electromechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008, P.395.
7. J.J.STOKER. Nonlinear vibrations. Interscience. New York, 1950. (СТОКЕР Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: ИЛ, 1953, 256 с.)

## **BIFURCATION OF THE MOTIONS OF LOADING ELECTRICALLY DAMPING PENDULUM (SYNCHRONIZATION OF THE ELECTRICAL MACHINE WITH NETWORK)**

***Dmitry Skubov, St.Petersburg Polytechnical University***

Abstract: In this article the questions of synchronization of the electrical machine with power networks are investigated. The mathematical model realize by numeric-analytical methods for

asymptotically simplifying equations of the synchronous electrical machine dynamic. The possibility of more reliable synchronization with network (what it take on today) is proofed.

Keywords: synchronous electrical machine, nonlinear dynamic, electromechanic, stability of periodic motions.