УДК 519.865.2
ББК 22.18 + 65.42

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА КОНКУРЕНТНЫХ РЫНКАХ

Алгазин Г.И.[1], Алгазина Д.Г.[2]
(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

Представлена теоретико-игровая модель многоагентной сети, ориентированной на продвижение на конкурентном рынке однородного товара (услуги). Для базовых прикладных моделей «франчайзер–франчайзи–рынок» и «производитель–посредник–рынок» при обычных для моделей олигополии предположениях о линейности функций затрат и обратной функции спроса, допускающих аналитическое представление решения, проведены разносторонние исследования эффективности сетей в условиях равновесия Курно и Штакельберга. Новым аспектом модельных исследований является введение в теоретико-игровую модель сети активного субъекта – центра, на которого возложено решение системных задач по регулированию конфликтов и обеспечению стабильности сети, управлению сетевым взаимодействием и повышению эффективности стабильной сети.

Ключевые слова: типология сети, теоретико-игровая модель, равновесие и стабильность сети, Курно, Штакельберг, управление сетевым взаимодействием, эффективность сети, франчайзинг, торговое посредничество.

---

[1] *Геннадий Иванович Алгазин, зав. кафедрой, доктор физико-математических наук, профессор* (algazin@socio.asu.ru).
[2] *Дарья Геннадьевна Алгазина, старший преподаватель,* (darya.algazina@mail.ru).

1. Введение

В последнее время во многих областях растет интерес к проблеме формирования устойчивых и эффективных сетей. Особую сложность в проведении математических исследований представляют сети, участниками которых являются целенаправленные субъекты (системы).

Адекватным математическим аппаратом исследования конфликтов, возникающих в сетевом взаимодействии между целенаправленными субъектами, является теория сетевых игр [10, 11 ,19]. Следует отметить, что это недостаточно изученный раздел теории игр, который еще находится в стадии своего формирования и развития.

В данной статье представлены две базовые теоретико-игровые модели сети «центр–агент–рынок», ориентированной на продвижение на конкурентном рынке различного рода товаров и услуг: модель «франчайзер–франчайзи–рынок» и модель «производитель–посредник–рынок».

2. Типология сетей

Рассматривается многоагентная сеть «центр–агент–рынок». Некоторые ее структуры, которые представлены в исследованиях авторов, схематично показаны на рис. 1-3.

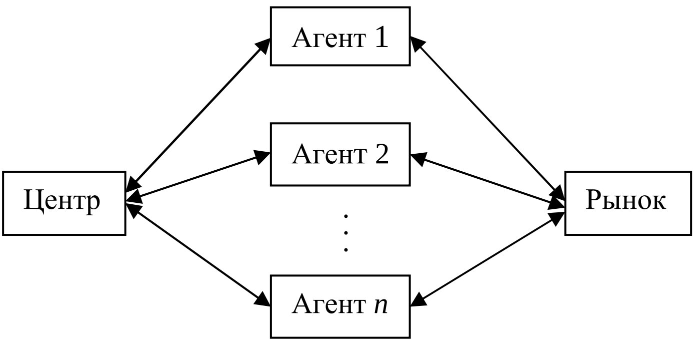

Рис. 1. Центр взаимодействует с агентами, агенты – с рынком (потребителями)

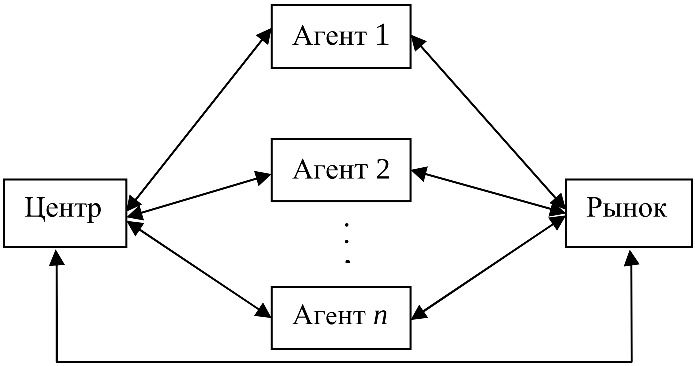

Рис. 2. Центр взаимодействует с агентами и рынком, агенты – с рынком

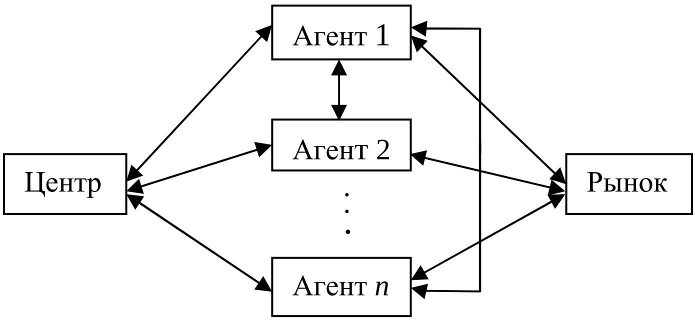

Рис. 3. Центр взаимодействует с агентами, агенты – с рынком и между собой

Будем полагать структуру сети на рис.1 базовой, другие более сложные структуры отличаются от нее добавлением новых связей.

3. Теоретико-игровая модель сетевого взаимодействия

В модели выделены три группы участников: центр, агенты, рынок.

В ней управляющий сетевым взаимодействием целенаправленный субъект – центр, а управляемый целенаправленный субъект – агент. Рынок – неуправляемый субъект сети.

Центр – единственный участник сети, который имеет возможность координировать взаимодействия в ней. Кроме того, центр может в ряде случаев, в связи с изменением общей ситуации, действовать и как агент, т. е. конкурировать с другими агентами на рынке (рис. 2).

Агенты – это участники сети, которые непосредственно занимаются доведением товаров (услуг) до потребителей. К ним относятся торговые точки, предприятия сферы услуг (сети гостиниц, ресторанов быстрого питания и т.п.) или фирмы производители. Под активностью i-го агента q_i будем понимать объем оказываемых им услуг, объем реализованного товара населению и бизнесу, или объем произведенного и реализованного на рынке товара.

Предположения модели состоят в следующем.

Рынок товара (услуг) традиционно описывается невозрастающей функцией спроса. В модели будет использоваться обратная функция спроса, т. е. цены $p(Q)$, которая складывается на рынке при объеме предложения товара (услуг) Q. Учитывается то, что p и Q связаны взаимно однозначной зависимостью, а технически удобнее в качестве аргумента рассматривать Q.

Функции затрат агентов $\varphi_i(q_i)$ считаются зависящими только от активности самого агента. Функция затрат центра φ зависит от суммарной активности агентов сети $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ и, если он еще выступает в роли агента (как на рис. 2), дополнительно от его собственной активности q_0. Каждый участник располагает полной информацией об обратной функции спроса и о своей функции затрат.

Агенты могут наблюдать лишь сложившиеся цены на рынке. Центр может изменить цены, но для этого ему надо повлиять на суммарный выпуск сети Q. Например, чтобы повысить активность сети, он может стимулировать агентов, пересмотрев условия договора с ними, добавить в сеть новых агентов и т. д.

При предположении Курно агенту нет необходимости знать что-либо о поведении других агентов. Он знает свои объемы, но никакой информацией об объемах других агентов не располагает, да она ему и не требуется. Следуя же предположению Курно-Штакельберга, агент должен быть уверен, что располагает полной информированностью о поведении остальных агентов. Вместо такой классической интерпретации предположений Курно и Курно-Штакельберга можно считать, что каждый агент располагает некоторой гипотезой о скорости изменения общего объема Q в зависимости от изменения его собственного объема q_i (или гипотезой о влиянии изменения его собственного объема на цены: локально цены меняются пропорционально вариациям объемов. Учитывая опять что p и Q связаны взаимно однозначно, то это техническая, а не принципиальная сторона вопроса). Заметим, что в проведенных авторами исследованиях, разные агенты могут придерживаться разных гипотез. В частности, если i-й агент действует в рамках традиционных предположений Курно, то изменения в общем объеме Q, которые вносят другие агенты, игнорируются, т. е. агент придерживается гипотезы $\partial Q / \partial q_i = 1$. Если же i-й агент придерживается предположений Курно-Штакельберга, то для базовой линейной модели сетевого взаимодействия, которая будет дана ниже, $\partial Q / \partial q_i = 1/n$.

Считается, что агенты не кооперируются друг с другом.

Если не принимать во внимание наличия центра, то рассматриваемая модель близка к моделям олигополии, в которых агенты могут повлиять на рынок выбором своего поведения.

Далее приведем описание двух базовых прикладных моделей многоагентной сети «центр–агент–рынок».

Модель «франчайзер–франчайзи–рынок» [1]. Рассматривается рынок однородного товара, состоящего из франчайзера и n фирм-франчайзи. Франчайзи реализует товар (услугу) потребителю по цене p в объеме q_i. Величина выручки (дохода) pq_i распределяется между двумя сторонами. Часть выручки kpq_i получает франчайзер, а другую ее часть $(1-k)pqi$ получает фирма-франчайзи; k – коэффициент (параметр), определяющий сервисную плату (роялти), которую франчайзер устанавливает для франчайзи в обмен за права на бизнес $(0 \le k \le 1)$. Предполагается, что только франчайзи этой сети обладают эксклюзивными правами на данный бизнес в рамках определенной территории.

Формально интересы сторон можно записать в виде целевых установок на максимизацию их прибыли:

– для головной фирмы-франчайзера (центра):

$$I(p,Q,k) = kpQ \quad \to \max_k, \qquad k \in [0,1]; \tag{1}$$

– для фирмы-франчайзи (агента):

$$\Pi_i(p,q_i,k) = (1-k)pq_i - \varphi_i(q_i) \quad \to \max_{q_i}, \qquad q_i \in [0,\bar{q}_i], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Здесь $\bar{q}_i$ – предельно возможный объем активности агента. Франшизный взнос не включен авторами в базисную модель, а учитывается при необходимости. Значения параметров k и q_i являются основным предметом согласования условий договора франшизы. Интересы участников проявляются в том, чтобы отстоять желаемые для себя значения этих параметров и, соответственно, получить выгодные условия договора.

Модель «производитель–посредник–рынок» [3]. Рассматривается рынок однородного товара, состоящего из одного его производителя и n торговых посредников. Посредник продает потребителю товар по цене p, покупая его у производителя по цене $(1-k)p$. Таким образом, величина kp есть разница между ценой спроса и ценой предложения на этом рынке. Эта разница и формирует доход посредника. В модели значение параметра k определяется фирмой-производителем.

Интересы сторон представляются в виде целевых установок на максимизацию их прибыли. Эта модель включает:

– задачу фирмы-производителя (центра):

$$I(p,Q,k) = (1-k)pQ - \varphi(Q) \quad \to \max_{Q,k},$$

(3) $Q \in [0,\overline{Q}]$,

$k \in [0,1]$;

– задачу посредника i (агента):

(4) $\Pi_i(p,q_i,k) = kpq_i - \varphi_i(q_i) \quad \to \max_{q_i}, \quad i = \overline{1,n}.$

Здесь $\overline{Q}$ – предельно возможный объем активности производителя.

Как в той так и другой модели полагается, что цена продукции и затраты субъектов определяются следующими выражениями:

(5) $p(Q) = a - bQ,\ \varphi(Q) = c_0 Q + d_0,\ \varphi_i(q_i) = c_i q_i + d_i,\ i = \overline{1,n}.$

Здесь: цена продукции – линейная функция общего объема выпуска агентами; a – спрос на продукцию; b – снижение цены при увеличении на единицу общего выпуска; издержки фирм φ и φ_i являются также линейными функциями, а c_0 и c_i – предельные переменные издержки; d_0 и d_i – постоянные издержки фирм, они не будут оказывать влияния на решение задач оптимизации участников.

4. Проработанность проблемы и новизна модели

В отечественной и зарубежной литературе явно прослеживается, что внимание исследователей приковано не в целом к триаде «центр–агент–рынок», а к отдельным ее составляющим: «центр–агент» и «агент–рынок».

Изучение систем «центр–агент» имеет немалую историю. Заметное место в ней принадлежит теории оптимального планирования и управления, математической теории иерархических многоуровневых систем, информационной теории иерархических игр, теории активных систем. В последнее время доминируют теоретико-игровые подходы, а в системах с неравноправными участниками – иерархические игры. Взаимодействие игроков в иерархических играх описывается играми Γ_i (i = 1,2,3). Иерархические структуры с более сложным взаимодействием, учитывающим влияние взаимной информированности игроков (структуры информированности), и поиск решения (информационного равновесия) описываются соответствующими рефлексивными играми Γ_i [9, 13-16].

Вопросам устойчивости и баланса интересов в системах «агент–рынок», их эффективности ведущее место занимает модель Курно. При этом различные авторы придавали большее значение разным аспектам применения модели Курно. Ряд авторов рассматривают модель, в которой все фирмы идентичны. Другая группа авторов исследует равновесие на рынке, где не обязательна идентичность всех фирм-агентов, используя те ли иные предположения о свойствах обратной функции спроса, функций затрат и функций прибыли. В ряде исследований внимание акцентировано на методах поиска решений. Отечественные ученые рассматривают вместо стандартной гипотезы Курно гипотезы более общего вида и модели олигополии с рынками производственных факторов [7, 8, 12, 22, 23, 24].

В значительном ряде публикаций в дополнение к модели Курно вводится модель фирмы, действующей по особым правилам. В отличие от фирм Курно, эта фирма, обладая возможностью первого хода, доминирует на конкурентном рынке, максимизируя собственную прибыль при явном учете реакции остальных фирм на изменение ее поведения. Остальные же фирмы, как и раньше, максимизируют собственную прибыль на основе принципа Курно–Нэша о неизменности поведения других фирм. Эту фирму-лидер называют еще фирмой Штакельберга, так как он первым ввел такую модель поведения [8, 24, 25].

В классическом подходе принципы поведения Курно и Штакельберга рассматриваются в применении к фирмам-производителям.

Определенный шаг на пути обобщения применения принципов Курно и Штакельберга сделан авторами этой статьи в совместной монографии [1]. В проведенных в ней модельных исследованиях франчайзинговых сетей на рынке олигополии агенты (франчайзи-конкуренты) не различаются как фирмы-производители, торговые точки или предприятия сферы услуг.

Авторским расширением традиционного модельного представления олигополистического рынка является введение в модель нового субъекта, на которого возлагаются функции управления сетевым взаимодействием агентов. Этим «новым» субъектом выступает центр. Таким образом, вместо традиционных систем «центр–агент» и «агент–рынок» рассматривается сеть «центр–агент–рынок».

5. Устойчивость сетей

Устойчивая сеть – это сеть, которая в определенном оговоренном смысле устраивает всех ее участников.

Базовые подходы к устойчивости сетей опираются на классические теоретико-игровые концепции, когда рациональные исходы некоторого конфликта должны быть в том или ином смысле стабильны относительно отклонения от них одного (равновесие Нэша, Байеса-Нэша) или нескольких (сильное равновесие Нэша, *C*-ядро кооперативных игр) агентов [10, 11 ,19].

При формировании устойчивых сетей на конкурентных рынках авторы опирались на три концепции решения некооперативных игр – равновесия Курно-Нэша, равновесия по Штакельбергу и неравновесия по Штакельбергу.

Равновесие Курно-Нэша является на сегодняшний день наиболее распространенной классической концепцией. Равновесие Курно-Нэша – это ситуация, когда каждый агент выбирает наилучшую для себя стратегию при условии, что другие агенты не меняют свои стратегии. В проведенной реализации этой концепции в сетевом взаимодействии на конкурентных рынках авторы данной статьи полагали: каждый агент определяет свою активность так, чтобы максимизировать собственную прибыль, когда другие агенты оставляют свою активность неизменной.

В классической модели Штакельберга один из агентов учитывает реакцию остальных агентов на изменение объемов его выпуска и выбором этого объема максимизирует свою прибыль. На рис. 3 показано, что таким агентом в сети может являться агент 1, а связи между ним и другими агентами интерпретируются как обмен соответствующей информацией. Другими словами, предполагается, что этот агент знает параметры остальных агентов. Поэтому для любого объема q_1 его собственного выпуска может рассчитать их равновесные (оптимальные активности) объемы выпуска $q_2(q_1)$, …, $q_n(q_1)$ и далее использовать эти объемы при максимизации собственной прибыли. Так как в модели Штакельберга сетевые взаимодействия организованы таким образом, что функции прибыли всех агентов достигают максимума, а спрос и предложение сбалансированы, то соответствующее состояние сети естественным образом трактуется как равновесное.

В ряде сетевых моделях, использующих концепции Штакельберга, таких агентов может быть несколько. Сеть, в которой все агенты ведут себя согласно модели Штакельберга (такая ситуация называется неравновесием по Штакельбергу), также имеет стационарные точки, определяющие состояние равновесия. Такая стабильная сеть рассмотрена авторами на базовой линейной модели сетевого взаимодействия [1-3].

6. Эффективность сетей

Эффективность сетей можно оценивать и сравнивать по различным критериям. К основным из них можно отнести: общий объем активности сети и отдельных агентов, прибыль центра и агентов, конкурентная цена на товары (услуги) и величина роялти (для франчайзинговой сети), цена спроса и предложения (для посреднической сети) и т.д.

Приведем аналитические выражения таких критериев для базовой прикладной модели многоагентной сети «франчайзер–франчайзи–рынок» в состоянии равновесия Курно [1]. Для определенности пусть это будет сеть, структура которой приведена на рисунке 1, а верхний индекс K означает, что показатель (критерий) относится к равновесной по Курно сети.

Общий объем активности сети (выпуск товаров (услуг)) определяется выражением

$$(6)\quad Q^K = \frac{1}{(n+1)b}\left(na - \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k} \right);$$

Значение рыночной цены товара (услуг) определяется как

$$(7)\quad p^K = \frac{1}{n+1}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k}\right);$$

Активность франчайзи рассчитывается по формуле

$$(8)\quad q_j^K = \frac{1}{(n+1)b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i - (n+1)c_j}{1-k}\right), \qquad j = \overline{1,n};$$

Имеем следующее выражение для прибыли франчайзи

$$(9)\quad \Pi_j^K = \frac{1-k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i - (n+1)c_j}{1-k}\right)^2 - d_j, \; j = \overline{1,n};$$

Прибыль франчайзера задается выражением

$$(10)\quad I^K = \frac{k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k}\right)\cdot\left(na - \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k}\right);$$

Величина роялти для фирмы-франчайзи составит

$$(11)\quad A_j^K = \frac{k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k}\right)\cdot\left(a + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i - (n+1)c_j}{1-k}\right), \; j = \overline{1,n}.$$

Аналогичные формулы получены для посреднической сети в состоянии равновесия Курно, а также для франчайзинговой и посреднической сетей в состоянии равновесия и неравновесия по Штакельбергу [1, 3].

Пусть далее верхний индекс $\overline{S}$ означает, что показатель (критерий) относится к сети неравновесной по Штакельбергу, S – равновесной по Штакельбергу, M – сети, состоящей из одного единственного агента-монополиста, т.е. к монопольному рынку.

Сравнительный анализ K, S и $\overline{S}$ сетей приведем позже в 7.2.3.1.

Здесь же отметим, что для монопольного рынка [1]: 1) общий объем активности сетей Q самый низкий; 2) монопольная цена p выше любой конкурентной цены; 3) суммарная прибыль всех агентов Π самая высокая; прибыль центра I ниже, чем на конкурентном.

7. Управление сетевым взаимодействием

Являясь целенаправленным субъектом, имеющим интересы в максимизации собственного выигрыша, помимо задачи собственной эффективности, центр решает две главные системные задачи:

1) регулирование конфликтов и обеспечение стабильности (устойчивости) сети;
2) повышение эффективности стабильной сети.

Рассмотрим последовательно каждую из этих задач.

7.1. РЕГУЛИРОВАНИЕ КОНФЛИКТОВ И ОБЕСПЕЧЕНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ СЕТИ

Данная задача обусловлена тем, что формирование и функционирование сетей не всегда проходит обоюдовыгодно для их участников. Конфликты могут возникать как между агентами за свою долю рынка, так и между центром и агентами. Центр заинтересован в максимальном объеме продаж и минимальном риске и поэтому в случае благоприятной конъюнктуры будет стремиться к росту числа агентов, работающих на данном рынке. Агент, в общем случае, заинтересован в ограниченном присутствии других агентов и, как правило, в монопольном обслуживании территории.

Взаимодействие в посреднической сети строится на актах «купли-продажи». Центр, выступая в роли продавца, заинтересован в продаже товара (услуги) по максимальной цене. Агент, действуя в роли покупателя и продавца, заинтересован в приобретении товара (услуги) у центра по минимальной цене и реализации его на рынке по максимальной цене. В базовой прикладной модели посредничества основным параметром согласования интересов центра и агентов выступает параметр цены k, который определяет распределение дохода между ними.

Основным параметром согласования условий договора франшизы между центром и агентами выступает сервисная плата (роялти), которую франчайзер устанавливает для франчайзи (фирм-агентов) в обмен за права на бизнес. Формально интересы сторон с учетом параметра роялти k записаны в выражениях

(1) и (2) в виде целевых установок на максимизацию их прибыли.

Вместе с тем, продвижение товаров (услуг) на рынке с участием посреднических и франчайзинговых агентов, наряду со стремлением участников франшизы получить наиболее выгодные для себя условия, предполагает учет интересов потребителей, согласование спроса и предложения, поиск равновесных решений. В этих вопросах параметром согласования выступает объем активности агентов по выпуску (реализации) товаров или услуг q. Центр может выбором параметра k влиять и на активность агентов.

7.2. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СТАБИЛЬНОЙ СЕТИ

Другой важной задачей центра, связанной с тем, что стабильная сеть не всегда обладает необходимой эффективностью, является повышение эффективности стабильных сетей.

Это требует:

– обеспечения контролируемого роста сети;

– создания или ликвидации связей;

– целенаправленного воздействия на поведение, целевые функции участников, их активность и т. д.

7.2.1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ КОНТРОЛИРУЕСОГО РОСТА СЕТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ЕЕ УЧАСТНИКОВ

Эта проблема связана с оценкой показателей эффективности функционирования сети от числа в ней агентов. Рассмотрим некоторые подходы к решению этой важной задачи по критерию прибыли центра.

Для франчайзинговой сети в состоянии равновесия Курно оптимальное число франчайзи (без учета их первоначального взноса) находится из решения уравнения $\frac{\partial I^K}{\partial n} = 0$, где I^K определяется по (10). После ряда несложных преобразований, полагая $c_i = e$, $i = 1, \ldots, n$, приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{ka}{(n+1)^3 b} \cdot \left(1 - \frac{2ne}{a(n-1)(1-k)}\right). \quad (12)$$

Отсюда, если параметры a,b,e,n таковы, что $1-\frac{2ne}{a(n-1)(1-k)}<0$ или $1-\frac{2e}{a(1-k)}<\frac{1}{n}$, то рост сети положительно связан с ростом прибыли франчайзера. При этом, когда $1-\frac{2e}{a(1-k)}\le 0$, то при любом числе агентов добавление в сеть нового агента приводит к росту прибыли центра. Если $1-\frac{2e}{a(1-k)}>0$, то при $n<\frac{1}{1-\frac{2e}{a(1-k)}}$ новый агент в сети приносит дополнительную прибыль центру, а при $n>\frac{1}{1-\frac{2e}{a(1-k)}}$ новый агент уменьшает прибыль центра.

Таким образом, при выполнении условия $1-\frac{2e}{a(1-k)}>0$ оптимальный размер сети определяется выражением

$$n_I^K=\frac{1}{1-\frac{2e}{a(1-k)}}. \tag{13}$$

Вычислительные эксперименты для франчайзинговых и посреднических сетей во всех трех случаях (равновесия Курно и Штакельберга, неравновесия Штакельберга) показали, что после оптимума идет достаточно медленное монотонное понижение прибыли центра [1].

Видимо, ∩-образная форма зависимости между прибылью центра и числом агентов объясняется тем, что в условиях ограниченности рационального поведения и несимметричной информированности агентов при малом числе их числе действие факторов, «положительно» влияющих на прибыль центра, превалирует над «отрицательно» влияющими. А при значительном числе агентов наблюдается обратная картина.

В этом плане могут представлять интерес те параметры сети, изменения которых (в большую или меньшую сторону) с ростом числа агентов всегда положительно связаны с прибылью центра. Поэтому далее остановимся на этом вопросе подробнее [3, 5].

1. Во всех трех случаях уменьшение разницы между ценой спроса и ценой предложения (т.е. уменьшение параметра k) в модели «производитель–посредник–рынок» или повышение величины роялти (увеличение параметра k) в модели «франчайзер–франчайзи–рынок» приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с увеличением числа агентов.

Так для равновесия Курно повышение прибыли центра можно подтвердить подстановкой соотношения для оптимального числа агентов в соотношение для определения прибыли центра (10) при $c_i = e$, $i = 1, \ldots, n$.

Оптимальное число агентов в посреднической сети находится из уравнения $\frac{\partial I^K}{\partial n} = 0,$ решение которого имеет вид

$$(14)\qquad n_I^K = \frac{a - c_0/(1-k)}{a - 2e/k + c_0/(1-k)}.$$

Тогда при оптимальном числе посредников прибыль центра составит

$$(15)\quad I^K = \frac{1-k}{4b}\left(a - \frac{c_0}{1-k}\right)^2 - d.$$

Знак производной выражения (15) по k доказывает данное утверждение о повышении прибыли, а именно

$$\frac{\partial I^K}{\partial k} = -\frac{1}{4b}\left(a - \frac{c_0}{1-k}\right)\left(a + \frac{c_0}{1-k}\right) < 0.$$

Кроме того, по (14) следует

$$\frac{\partial n_I^K}{\partial k} = -\frac{2c_0\left(a - e/k\right)}{\left[(1-k)a - 2e(1-k)/k + c_0\right]^2} < 0,$$

т.е. оптимальное число посредников убывает с увеличением k.

Итак, показано, что в случае равновесия Курно повышение цены предложения в рыночной цене товара приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников (примечание: уменьшение параметра k имеет свои границы, так как при малых его значениях функции для вычисления n могут иметь особенности).

При оптимальном числе фирм-франчайзи (согласно формуле (14)) прибыль центра-франчайзера составит

$$(16)\quad I^K = \frac{ka^2}{4b},$$

т. е. его прибыль растет при увеличении роялти.

При этом

$$\frac{\partial n_I^K}{\partial k} = \frac{2e/a(1-k)^2}{[1-2e/a(1-k)]^2} > 0,$$

т.е. оптимальное число франчайзи растет с увеличением роялти, что подтверждает выдвинутое предположение и для этой сети. Можно показать, что для посреднических и франчайзинговых сетей аналогичные выводы имеют место также в условиях равновесия и неравновесия Штакельберга.

В дополнение отметим, что повышение нормы лицензионного платежа (увеличение параметра k) в контрактах франчайзинга позволяет франчайзеру более активно и с большими правами решать множество задач, способствующих привлекательности и росту франчайзинговой системы: возмещения затрат, связанных с контролем франчайзинговой системы; осуществления текущей деятельности и введения новшеств в системе; ограничения месторасположения франшизы; контроля и снижения уровня риска в системе; увеличения спроса на продукцию [5, 6, 17, 18 ,20, 21].

2. Следует отметить интересный факт, что во всех трех случаях: а) прибыль производителя для оптимального числа посредников составляет одну и ту же величину, определяемую формулой (15); б) прибыль франчайзера для оптимального числа фирм-франчайзи составляет также одну и ту же величину, определяемую формулой (16).

3. Во всех трех случаях цена оптимальна, если оптимален размер сети.

Покажем справедливость этого утверждения для франчайзинга. Из выражении прибыли франчайзера (1), формулы цены

(5) и формул для активности сети (6)и рыночной цены (7) в состоянии равновесия Курно имеем

$$\frac{\partial I}{\partial p}=\frac{\partial (kpQ)}{\partial p}=k\left(Q+p\frac{\partial Q}{\partial p}\right)=k\left(Q-\frac{p}{b}\right)=$$

$$=\frac{k}{n+1}\left[n\left(a-\frac{e}{1-k}\right)-\left(a+\frac{ne}{1-k}\right)\right]=\frac{k}{n+1}\left[n\left(a-\frac{2e}{1-k}\right)-a\right].$$

Последнее выражение равно нулю, а прибыль франчайзера достигает максимума, при $n=n_I^K=\dfrac{1}{1-2e/a(1-k)}$, т. е. согласно (13) при оптимальном размере сети.

Аналогичным образом, для посреднической сети, используя (3) и (5) получаем

$$\frac{\partial I}{\partial p}=\frac{\partial ((1-k)pQ-c_0Q-d_0)}{\partial p}=(1-k)\left(Q+p\frac{\partial Q}{\partial p}\right)-c_0\frac{\partial Q}{\partial p}=$$

$$=(1-k)\left(Q-\frac{p}{b}\right)+\frac{c_0}{b}.$$

Подставляя в полученное выражение формулы для Q и p в состоянии Курно посреднической сети [3], приходим, что

$$\frac{\partial I}{\partial p}=\frac{1-k}{n+1}\left[n\left(a-\frac{e}{k}\right)-\left(a+\frac{ne}{k}\right)\right]+\frac{c_0}{b}.$$

Это выражение обращается в ноль, если размер сети оптимален (14), т.е. при $n=n_I^K=\dfrac{a-c_0/(1-k)}{a-2e/k+c_0/(1-k)}$.

Таким образом, данное утверждение имеет место для франчайзинговой и посреднической сетей в состоянии равновесия Курно. Аналогичным образом, используя соотношения, приведенные в работах [1, 3], показывается его справедливость и для состояния равновесия и неравновесия по Штакельбергу.

4. Во всех трех случаях снижение рыночной цены товара (услуги) p приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с увеличением числа агентов, если сеть не достигла своего оптимального размера.

Если размер сети меньше оптимального, то $\frac{\partial I}{\partial p}<0$. С другой стороны, нетрудно показать, что $\frac{\partial p^K}{\partial n}, \frac{\partial p^S}{\partial n}$ и $\frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial n}$ меньше нуля. Это показывает, что рыночная цена снижается с ростом числа агентов. Для убедительности приведем выражения для этих производных для франчайзинговой сети

$$\frac{\partial p^K}{\partial n}=-\frac{1}{(n+1)^2}(a-\frac{e}{1-k})<0;$$

$$\frac{\partial p^S}{\partial n}=-\frac{1}{2n^2}(a-\frac{e}{1-k})<0;$$

$$\frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial n}=-\frac{2n}{n^2+1}(a+\frac{(n^2-1)e}{1-k})<0.$$

Таким образом, показано, что снижение цены положительно связано с ростом сети, если ее размер не достиг оптимального.

В связи со сказанным, пользуясь удобным случаем, авторы приносят свои извинения за неточности, допущенные при доказательстве этого утверждения в работах [3, 5].

5. Во всех трех случаях повышение активности сети (т.е. объема товара (услуг) Q) приводит к повышению прибыли центра и положительно связано с ростом его сети, если сеть не достигла своего оптимального размера.

Этот вывод непосредственно следует из предыдущего, так как $p = a - bQ$.

Одновременно, во всех трех случаях с ростом числа агентов растет выпуск Q и этот рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых агентов. Для экономии покажем это только франчайзинговой сети в равновесии Курно.

Из неравенства

$$\frac{\partial Q^K}{\partial n}=\frac{1}{(n+1)^2 b}\left(a-\frac{e}{1-k}\right)>0$$

следует, что с ростом числа агентов растет и суммарный выпуск сети. Но вместе с тем

$$\frac{\partial q_i^K}{\partial n} = -\frac{1}{(n+1)^2 b}\left(a - \frac{e}{1-k}\right) < 0\,,$$

т.е. падает количество реализованных каждым агентом товаров (услуг). Таким образом, рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых агентов.

Таким образом, развитие франчайзинговой системы не всегда дает рост прибыли франчайзера. Эффективному развитию франчайзинговой системы препятствуют не только свободное месторасположение франшизы и риск вложений франчайзера. Этот процесс может сопровождаться конфликтами между франчайзи одной и той же сети, каждый из которых заинтересован в монопольном обслуживании территории. Чтобы обеспечить баланс интересов при развитии сети, франчайзер должен выступать в роли «иерархического менеджера», используя для этого и закономерности во взаимосвязи между целями собственной прибыли и развитием франшизы.

Принимая во внимание полученные выше выводы, можно в целом ожидать, что конкуренция между агентами усиливает положительные отношения между величиной прибыли центра и развитием его сети.

7.2.2. СОЗДАНИЕ И ЛИКВИДАЦИЯ СВЯЗЕЙ

Рассмотрим одну из возможных постановок задачи создания новых связей: при формировании своей сети центр может принять решение о самостоятельном выходе на потребителя, минуя своих агентов. Такая ситуация иллюстрируется выше на рисунке 2 в виде новой связи «центр–рынок». Рассмотрим эту ситуацию на примере франчайзинговой сети [4].

Есть, по крайней мере, два обстоятельства в пользу выхода на рынок франчайзера.

Во-первых, рассматривая задачи повышения эффективности сети в целом и получения собственного дополнительного дохода, франчайзер не может не учитывать, если позволяют условия франшизного договора, такую потенциально выгодную возможность.

Во-вторых, для франчайзера это самый надежный способ провести маркетинговое исследование рынка, условий ведения бизнеса на данной территории или в отрасли и апробацию элементов своей операционной системы.

Для описания такой сети применим теоретико-игровую модель, которая отличается от базовой модели «франчайзер–франчайзи–рынок» (1)-(2) добавлением новой связи – «взаимодействие центра с рынком».

В этой модели интересы сторон – максимизация прибыли, записываются традиционным образом:

– для головной фирмы-франчайзера (центра):

$$I(p,Q,q_0,k) = kpQ \quad + pq_0 - \varphi_0(q_0) \quad \to \max_{k,q_0},$$

(17) $k \in [0,1]$,

$$q_0 \in [0,\overline{q}_0].$$

– для фирмы-франчайзи (агента):

$$\Pi_i(p,q_i,k) = (1-k)pq_i - \varphi_i(q_i) \quad \to \max_{q_i},$$

(18)

$$q_i \in [0,\overline{q}_i], \quad i = \overline{1,n}.$$

Здесь $q_0(q_i)$ – объем активности, а $\overline{q}_0(\overline{q}_i)$ – предельно возможный объем активности центра (агента); pq_0 – дополнительный доход франчайзера, обусловленный его активностью на рынке. Как и раньше, через Q обозначена суммарная активность франчайзи, т.е. $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$, а цена продукции с учетом деятельности на рынке головной фирмы определяется линейной функцией общего объема выпуска центром и агентами:

(19) $$p = a - b(Q + q_0).$$

Полагается, что затраты центра заданы линейной функцией:

(20) $$\varphi_0(q_0) = c_0 q_0 + d_0,$$

где c_0 и d_0 – предельные переменные и постоянные издержки центра, соответственно.

Обозначим решение данной модели рынка для равновесия Курно верхним индексом "K^c".

В следующих утверждениях показывается эффективность выхода на рынок франчайзера [1, 4].

1. С вступлением на рынок франчайзера повышается активность сети. Для доказательства этого утверждения используем равенство $(n+1)Q^K = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a - \dfrac{c_i}{1-k}}{b}$, где Q^K – активность франчайзинговой сети в состоянии равновесия Курно, в которой только n франчайзи взаимодействуют с потребителями (см. (6)).

Также имеем (см. например, [1, 4]), что $(n+1)(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) = q_0^{K^c} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a - \dfrac{c_i}{1-k}}{b}$. Отсюда получаем неравенство, доказывающее утверждение

(21) $$(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - Q^K = \frac{q_0^{K^c}}{n+1} > 0.$$

2. С вступлением на рынок франчайзера снижается цена товара (услуги). Чтобы показать это утверждение используем соотношения для цен $p^K = a - bQ^K$ и $p^{K^c} = a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c})$. Тогда с учетом (21) получаем

(22) $$p^{K^c} - p^K = -b(Q^{K^c} + q_0^{K^c} - Q^K) = -b\frac{q_0^{K^c}}{n+1} < 0.$$

3. Повышение дохода франчайзинговой сети. Оценим следующую разность доходов сети после и до вступления на рынок центра, используя формулу цены (19) и выражение (21)

$$p^{K^c}(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - p^K Q^K = (a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c}))(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) -$$

$$-(a - bQ^K)Q^K == a(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - aQ^K - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c})^2 +$$

$$+b(Q^K)^2 = a\frac{q_0^{K^c}}{n+1} - b\frac{q_0^{K^c}}{n+1}(Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K) =$$

$$= \frac{q_0^{K^c}}{n+1}(a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c} + Q^K)).$$

Здесь величина $a-b(Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K)$ есть рыночная цена, если на рынок поступил продукт в объеме $Q^{K^c}+q_0^{K^c}+Q^K$. Если допустить, что при таком объеме активности сети цена не может быть отрицательной, то выход на рынок франчайзера дает дополнительный доход сети.

4. Изменение прибыли франчайзера. До вступления франчайзера на рынок его прибыль определялась выражением $I^K = kp^K \cdot Q^K$, а после вступления с учетом (17) и (20) как

$$I^{K^c} = kp^{K^c} \cdot Q^{K^c} \quad + p^{K^c} \cdot q_0^{K^c} - c_0 q_0^{K^c} - d_0.$$

Преобразуем I^{K^c} к виду

$$I^{K^c} = kp^{K^c} \cdot (Q^{K^c} + q_0^{K^c}) \quad + (1-k)p^{K^c} \cdot q_0^{K^c} - c_0 q_0^{K^c} - d_0.$$

Изменение прибыли определяется разностью

$$I^{K^c} - I^K = kp^{K^c} \cdot (Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - kp^K \cdot Q^K \quad +$$

$$+(1-k)p^{K^c} \cdot q_0^{K^c} - c_0 q_0^{K^c} - d_0 =$$

$$= k(p^{K^c} \cdot (Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - p^K \cdot Q^K) + q_0^{K^c} \cdot ((1-k)p^{K^c} - c_0) - d_0.$$

Первое слагаемое, с учетом сделанных в предыдущем пункте примечаний, положительно. Второе слагаемое преобразуем следующим образом

$$q_0^{K^c} \cdot ((1-k)p^{K^c} - c_0) = q_0^{K^c} \cdot ((1-k)(a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c})) - c_0) =$$

$$= q_0^{K^c} \cdot (1-k)(a - b(Q^{K^c} + q_0^{K^c}) - \frac{c_0}{1-k}) =$$

$$= q_0^{K^c} \cdot b(1-k)(\frac{a - \frac{c_0}{1-k}}{b} - (Q^{K^c} + q_0^{K^c})).$$

Используя, полученные в работе [1] соотношения для $q_i^{K^c}$, имеем

$$q_i^{K^c} = \frac{a - \frac{c_i}{1-k}}{b} - (Q^{K^c} + q_0^{K^c}) \geq 0.$$

Поэтому, если для предельных переменных издержек франчайзера выполняется условие $c_0 \le \max_i c_i \ (i = \overline{1, n})$, то и второе слагаемое будет не отрицательным, и тогда окончательная доходность франчайзера определяется только величиной его постоянных издержек d_0.

7.2.3. ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА АГЕНТОВ

7.2.3.1. РЕФЛЕКСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АГЕНТАМИ

Приведем ряд основных сопутствующих понятий согласно работе [13].

«*Рефлексивной* является *игра*, в которой информированность игроков не является общим знанием. С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия решений целесообразно разделять информационную и стратегическую рефлексию.

Информационная рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений игрок не принимает.

Стратегическая рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие игроки) в рамках информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии».

Одна из возможных задач информационной рефлексии для базовой франчайзинговой сети, в которой принимается во внимание влияние взаимной информированности агентов при принятии решений об объемах выпуска продукции (услуг) на конкурентных рынках, может состоять в следующем.

В базовой модели многоагентной франчайзинговой системы и представленных выше на ее основе исследованиях, авторы исходили из наиболее распространенной на сегодняшний день классической концепции решения некооперативных игр – равновесия Курно-Нэша. Равновесие Курно-Нэша – это ситуация, когда каждый агент выбирает наилучшую для себя стратегию при условии, что другие агенты не меняют свои стратегии. Эта концепция существенно опирается на то обстоятельство, что условия игры (правила, возможности-допустимые множества, интересы-целевые функции участников) являются общим знанием.

В рассматриваемой ниже рефлексивной модели франчайзинговой системы не все параметры игры-франшизы являются общим знанием. В этой модели прибыль агентов-франчайзи зависит не только от их собственных стратегий – решений по объемам выпуска продукции (услуг), но и от спроса на нее потребителей, величина которого не является общим знанием, У каждого агента имеются вполне определенные представления о величине спроса; о том, каковы представления (также вполне определенные) остальных агентов и т. д. В этой ситуации каждый агент рынка должен смоделировать стратегии других агентов, чтобы выбором собственной стратегии максимизировать свою прибыль, учитывая в ней стратегии других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента по имеющимся у него представлениям о других агентах.

Рассмотрим достаточно простой случай точечной структуры информированности агентов-франчайзи о параметре спроса и поиск решений в соответствующей рефлексивной игре. В качестве концепции решений рефлексивной игры используем информационное равновесие, которое является обобщением равновесия Нэша в некооперативных играх [16]. Более сложные структуры информированности агентов можно найти в специальной литературе по рефлексивным играм, например [14-16].

Пусть имеется 2 типа агентов: 1) агенты, неадекватно информированные о величине спроса a, т. е. они оценивают спрос как $\alpha_i a (\alpha_i \neq 1)$. Согласно работе [16] агентов с $\alpha_i > 1$ будем называть «оптимистами», так как их ожидания превосходят реальный спрос, а с $\alpha_i < 1$, соответственно, «пессимистами»; 2) агенты, адекватно информированные о величине спроса $a (\alpha_i = 1)$. Причем полагаем также, что все агенты одинаково взаимно информированы.

Согласно условию $\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = 0$, определяющего оптимальный выпуск i-го агента, мы имеем

$$q_i = \frac{\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}}{b} - Q,$$

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k} \right) - nQ,$$

$$Q = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k} \right).$$

Отсюда

$$q_i = \frac{\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k}}{b} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i a - \frac{c_i}{1-k} \right). \quad (23)$$

Приведем конкретный расчетный пример. Пусть имеется три агента: 1-й и 2-й являются адекватными, а 3-й агент – «пессимист» и $\alpha_3 = 0{,}8$. Положим также, что $a = 1; b = 0{,}001; k = 0{,}5; c_1 = c_2 = c_3 = 0{,}1.$

Для нахождения информационного равновесия $q_1^\bullet, q_2^\bullet, q_3^\bullet$ в этой рефлексивной игре используем соотношения (23). Получим следующий результат: $q_1^\bullet = q_2^\bullet = 250, q_3^\bullet = 50.$

Для сравнения классическое равновесие Курно-Нэша дает решение $q_1^\bullet = q_2^\bullet = q_3^\bullet = 200.$

Остановимся теперь на задаче стратегической рефлексии. В этой связи одна из возможных постановок задачи «управления» для мультиагентной сети может состоять в следующем: принять концепцию построения однородной сети, когда интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии разыгрывают равновесие Курно-Нэша, или центру лучше проектировать такую сеть с региональными агентами-«лидерами» по Штакельбергу.

Подход к решению этой задачи приведем, основываясь на сравнительном анализе трех вариантов построения сети:

– все агенты действуют по Курно;

– один из агентов выступает «лидером», остальные действуют по Курно;

– все агенты выступают в роли «лидеров».

Сравнительный анализ вариантов построения сети проведем по следующим параметрам:

– общий объем активности франчайзинговой сети;

– активность отдельных фирм-франчайзи;

– рыночная цена продукции;

– прибыль фирм-франчайзи;

– прибыль франчайзера;

– величина роялти;

– оптимальное число фирм в франчайзинговой сети.

Чтобы несколько облегчить выкладки, положим, что предельные издержки всех фирм одинаковы и $c_i = e$, $i = 1, \ldots, n$. Напомним также, что указанным вариантам соответствуют индексы $K, S, \bar{S}$.

1) Сравним общий объем активности франчайзинговой сети.

Из справедливости при целых $n > 1$ неравенств $\frac{n^2}{n^2+1} > \frac{2n-1}{2n} > \frac{n}{n+1}$ следуют следующие неравенства для общих активностей, которые с учетом зависимости их значений от параметра роялти k записываются ниже как функции от k:

(24) $$Q^{\bar{S}}(k) > Q^{S}(k) > Q^{K}(k).$$

Здесь по [1] $Q^{S}(k) = \frac{1}{2nb} \cdot \left((2n-1)a - \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i + (n-1)c_1}{1-k} \right)$ и $Q^{\bar{S}}(k) = \frac{n}{(n^2+1)b} \cdot \left(na - \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{1-k} \right)$, а $Q^{K}(k)$ задается формулой (6).

2) Сравним объемы выпуска по фирмам-франчайзи.

Нетрудно установить при целых $n > 1$ справедливость неравенств: $\frac{1}{2} > \frac{n}{n^2+1} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$. Используя эти неравенства и формальные выражения для объемов выпуска фирм, получаем, что при заданном значении параметра роялти k имеют место следующие соотношения:

(25) $$q_1^S(k) > q_j^{\bar{S}}(k) > q_j^K(k) > q_{j\neq 1}^S(k).$$

Здесь использованы выражение (8) и результаты работы [1]:

$$q_1^S(k) = \frac{1}{2b} \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_1}{1-k} \right);$$

$$q_j^S(k) = \frac{1}{2nb} \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - 2nc_j + (n-1)c_1}{1-k} \right), \qquad j = \overline{2, n};$$

$$q_j^{\bar{S}}(k) = \frac{n}{(n^2+1)b} \cdot \left(a + \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n c_i - (n^2+1)c_j}{1-k} \right), \quad j = \overline{1, n};$$

Сопоставление общего объема выпуска в точках равновесия Курно и Штакельберга (см. (24)) с выпуском по отдельным фирмам (см. (25)) показывает, что рост общего выпуска в точке равновесия Штакельберга происходит за счет первой фирмы, в то время как другие снижают свою активность по сравнению с состоянием равновесия по Курно.

3) Проведем сравнительный анализ цен на продукцию.

Используя формулы для цен (7) и в работе [1], $p^S = \frac{1}{2n} \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i + (n-1)c_1}{1-k} \right)$ и $p^{\bar{S}} = \frac{1}{n^2+1} \cdot \left(a + \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right)$, имеем:

$$p^K - p^S = \frac{n-1}{2n(n+1)} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k} \right) > 0;$$

$$p^S - p^{\bar{S}} = \frac{(n-1)^2}{2n(n^2+1)} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k} \right) > 0.$$

Таким образом:

(26) $$p^K(k) > p^S(k) > p^{\bar{S}}(k).$$

Неравенства (26) прямо противоположны неравенствам (25), то есть чем выше общий объем выпуска, тем ниже цена.

4) Осуществим сравнительный анализ прибыли фирм-франчайзи.

По (9) и [1] при $j=\overline{2,n}$ и $n>1$, пропуская промежуточные математические выкладки, имеем:

$$\Pi_j^K-\Pi_j^S=\left(\frac{1-k}{(n+1)^2b}-\frac{1-k}{4n^2b}\right)\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)^2=$$

$$=\frac{(1-k)(n-1)(3n+1)}{4n^2(n+1)^2b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)^2>0.$$

При $j=\overline{1,n}$ и $n>1$, получаем:

$$\Pi_j^K-\Pi_j^{\bar{S}}==\left(\frac{1-k}{(n+1)^2b}-\frac{n(1-k)}{(n^2+1)^2b}\right)\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)^2=$$

$$=\frac{(1-k)(n^3-1)(n-1)}{(n^2+1)^2(n+1)^2b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)^2>0.$$

При $n>1$:

$$\Pi_1^S-\Pi_1^K=\left(\frac{1-k}{4nb}-\frac{1-k}{(n+1)^2b}\right)\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)^2=$$

$$=\frac{(1-k)(n-1)^2}{4n(n+1)^2b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)^2>0.$$

Далее для $j=\overline{2,n}$ и $n>1$ оценим разность

$$\Pi_j^S-\Pi_j^{\bar{S}}=\left(\frac{1-k}{4n^2b}-\frac{(1-k)n}{(n^2+1)^2b}\right)\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)^2=$$

$$=\frac{(1-k)(n^2+2n\sqrt{n}+1)((n-1)(\sqrt{n}-1)-2)}{4n^2(n^2+1)^2b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)^2.$$

Из последнего выражения следует, что при $n=2{,}3$ будет $\Pi_j^S-\Pi_j^{\bar{S}}<0$, а при $n\geq 4$ справедливо $\Pi_j^S-\Pi_j^{\bar{S}}>0$.

Итак, объединяя все рассмотренные случаи, приходим к следующим результатам:

$\Pi_1^S(k)>\Pi_1^K(k)$ при $n>1$;

для $j=\overline{2,n}$ и $n>1$ выполняется противоположные неравенства, т. е. $\Pi_J^S(k)<\Pi_J^K(k)$;

для $j=\overline{1,n}$ и $n>1$ справедливы неравенства $\Pi_j^K(k)>\Pi_j^{\bar{S}}(k)$;

для $j=\overline{1,n}$ и $n=2{,}3$ справедливы неравенства $\Pi_J^S(k)<\Pi_J^{\bar{S}}(k)$;

а для $j=\overline{1,n}$ и $n\geq 4$ справедливы противоположные неравенства $\Pi_J^S(k)>\Pi_J^{\bar{S}}(k)$.

5) Проведем сравнительный анализ доходов франчайзера.

При фиксированном значении параметра роялти k сравним друг с другом доходы центра в точках равновесия Курно, равновесия и неравновесия Штакельберга. Отметим, что здесь вывод результатов сравнения более полон и проведен более рациональным методом, чем это сделано в работе [1].

Используем соотношения (10) и аналогичные им, полученные в работе [1]

$$I^S == \frac{(2n-1)k}{4n^2b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\left(a+\frac{(2n-1)e}{1-k}\right);$$

$$I^{\bar{S}} == \frac{n^2k}{(n^2+1)^2b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\left(a+\frac{n^2e}{1-k}\right).$$

По (12) $\dfrac{\partial I^K}{\partial n}<0$, т.е. доход центра падает с ростом числа агентов, если параметры a, e, k таковы, что $1-\dfrac{2e}{a(1-k)}>\dfrac{1}{n}$.

Заметим, что I^S можно получить из выражения для I^K подстановкой вместо n выражения $2n-1$. Учитывая, что при $n>1$ будет $2n - 1>n$ и при $1-\dfrac{2e}{a(1-k)}>\dfrac{1}{n}$ будет $1-\dfrac{2e}{a(1-k)}>\dfrac{1}{2n-1}$, имеем $I^K>I^S$.

Аналогично $I^{\bar{S}}$ получаем из выражения для I^S подстановкой вместо $2n - 1$ выражения n^2. Так как $n^2 > 2n - 1$ имеем $1 - \dfrac{2e}{a(1-k)} > \dfrac{1}{n^2}$ и $I^S > I^{\bar{S}}$.

Таким образом, показали, что при $1 - \dfrac{2e}{a(1-k)} > \dfrac{1}{n}$ справедливы соотношения между доходами центра $I^K > I^S > I^{\bar{S}}$.

Пусть теперь параметры a, e, k таковы, что $1 - \dfrac{2e}{a(1-k)} \le 0.$ Тогда по (12) $\dfrac{\partial I^K}{\partial n} > 0,$ т.е. доход центра растет с ростом числа агентов. Так как при $n > 1$ выполняются неравенства $n^2 > 2n$ - 1 > n, то $I^K < I^S < I^{\bar{S}}$.

Случай $1 - \dfrac{2e}{a(1-k)} \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right]$ требует дополнительного сравнительного анализа доходов центра.

6) Сравним величины роялти.

Анализ начнем со сравнения величины роялти для состояний равновесия Курно и Штакельберга.

Для первой фирмы, т. е. при $j = 1$, на основании (11) и [1] имеем:

$$A_1^K(k) - A_1^S(k) =$$

$$= \frac{k}{(n+1)^2 b}\left(a + \frac{ne}{1-k}\right)\left(a - \frac{e}{1-k}\right) - \frac{k}{4nb}\left(a + \frac{(2n-1)e}{1-k}\right)\left(a - \frac{e}{1-k}\right) =$$

$$= -\frac{k(n-1)}{4n(n+1)^2 b}\cdot\left(a - \frac{e}{1-k}\right)\cdot\left[\left(a(n-1) + (2n^2+n+1)\frac{e}{1-k}\cdot\right)\right] < 0.$$

Для остальных фирм франчайзинговой сети ($j = \overline{2,n}$) имеем:

$$A_j^K(k)-A_j^S(k)=$$

$$=\frac{k}{(n+1)^2 b}\left(a+\frac{ne}{1-k}\right)\left(a-\frac{e}{1-k}\right)-\frac{k}{4n^2 b}\left(a+\frac{(2n-1)e}{1-k}\right)\left(a-\frac{e}{1-k}\right)=$$

$$=\frac{k(n-1)}{4n^2(n+1)^2 b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot\left[\left(a(3n+1)+\frac{e}{1-k}(n-1)(2n+1)\right)\right]>0.$$

Для точек равновесия Курно и неравновесия Штакельберга. по $j=\overline{1,n}$ имеем:

$$A_j^K(k)-A_j^{\bar{S}}(k)=$$

$$=\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot\left[\frac{k}{(n+1)^2\cdot b}\cdot\left(a+\frac{ne}{1-k}\right)-\frac{nk}{(n^2+1)^2\cdot b}\cdot\left(a+\frac{n^2 e}{1-k}\right)\right]=$$

$$=\frac{k(n-1)}{(n+1)^2(n^2+1)^2 b}\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot\left[a(n^3-1)+n(2n^2+n+1)\cdot\frac{e}{1-k}\right]>0.$$

Сравнение роялти первой фирмы в состояниях равновесия и неравновесия Штакельберга дает:

$$A_1^S(k)-A_1^{\bar{S}}(k)=$$

$$=\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot\left[\frac{k}{4nb}\cdot\left(a+\frac{(2n-1)e}{1-k}\right)-\frac{nk}{(n^2+1)^2 b}\cdot\left(a+\frac{n^2 e}{1-k}\right)\right]=$$

$$=\frac{k(n-1)^2}{4n(n^2+1)^2 b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot\left[a(n+1)^2+\frac{e}{1-k}(2n^2+n+1)\right]>0.$$

Сравнение роялти по остальным фирмам ($j=\overline{2,n}$) в состояниях равновесия и неравновесия Штакельберга, используя их формальные выражения по [1], показывает:

$$A_j^S(k)-A_j^{\bar S}(k)=$$

$$=\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot\left[\frac{k}{4n^2b}\cdot\left(a+\frac{(2n-1)e}{1-k}\right)-\frac{nk}{(n^2+1)^2b}\cdot\left(a+\frac{n^2e}{1-k}\right)\right]=$$

$$=\frac{k}{b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\times$$

$$\times\left[\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\left(\frac{1}{4n^2}-\frac{n}{(n^2+1)^2}\right)+\frac{e}{1-k}\cdot\left(\frac{2n}{4n^2}-\frac{n(n^2+1)}{(n^2+1)^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{k(n-1)}{4n^2(n^2+1)^2b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\times$$

$$\times\left[\left(a-\frac{e}{1-k}\right)(n^3-3n^2-n-1)-\frac{e}{1-k}2n(n^2+1)(n+1)\right]=$$

$$=\frac{k(n^2-1)}{2n(n^2+1)b}\cdot\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\left[\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot\frac{n^3-3n^2-n-1}{2n(n^2+1)(n+1)}-\frac{e}{1-k}\right].$$

Следует отметить, что при $n = 2, 3$ последнее выражение отрицательно.

При целом $n = 7$ выражение $\dfrac{n^3-3n^2-n-1}{2n(n^2+1)(n+1)}$ достигает своего абсолютного максимума, равному всего 0,0336. При этом имеем

$$\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot\frac{n^3-3n^2-n-1}{2n(n^2+1)(n+1)}-\frac{e}{1-k}=\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot 0{,}0336-\frac{e}{1-k}=$$

$$=\left(a-\frac{e}{1-k}\right)\cdot 0{,}0336-\frac{e}{1-k}\approx 0{,}0336\cdot\left(a-30{,}76\cdot\frac{e}{1-k}\right).$$

Поэтому представляется, что для реальных данных последнее выражение скорее всего отрицательно, т. е. следует предполагать, что $A_j^S(k)<A_j^{\bar S}(k)$.

Таким образом, мы показали:

$A_1^S(k)>A_1^K(k)>A_1^{\bar S}(k)$;

$$A_j^k(k) > A_j^S(k), \qquad j = \overline{2,n};$$

$$A_j^K(k) > A_j^{\bar{S}}(k), \qquad j = \overline{2,n}.$$

Также следует, что $A_1^S(k) > A_j^S(k)$ при $j = \overline{2,n}.$

Для реальных данных следует ожидать

$$A_j^S(k) < A_j^{\bar{S}}(k). \qquad j = \overline{2,n}.$$

7) Проведем анализ оптимальности числа фирм в франчайзинговой сети.

Оптимальное с точки зрения дохода франчайзера число фирм в франчайзинговой сети без учета их первоначального взноса в точках равновесия Курно, равновесия и неравновесия Штакельберга заданы формальными соотношениями (13), $n^S = \dfrac{1 - \dfrac{e}{a(1-k)}}{1 - \dfrac{2e}{a(1-k)}}$ и $\left(n^{\bar{S}}\right)^2 = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2 \cdot \bar{c}}{a(1-k)}}$, соответственно [1]. Чтобы упростить анализ, введем обозначение выражения, встречающегося в каждом из этих соотношений: $z = 1 - \dfrac{2e}{a(1-k)}$. При этом естественно предполагать, что параметр роялти выбран так, что $z > 0$. Иначе указанные формальные соотношения для оптимального числа фирм теряют всякий содержательный смысл.

Тогда с учетом того, что $\dfrac{e}{a(1-k)} = \dfrac{1-z}{2}$ и $z < 1$ имеем:

$$n^K - n^S = \frac{1}{z} - \frac{1 - \frac{1-z}{2}}{z} = \frac{1-z}{2z} > 0,$$

$$n^K - n^{\bar{S}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z} - z}{z\sqrt{z}} > 0.$$

Также $n^{S} - n^{\bar{S}} = \dfrac{1-\dfrac{1-z}{2}}{z} - \dfrac{1}{\sqrt{z}} = \dfrac{(1-\sqrt{z})^2}{2z} > 0.$

Таким образом $n^{K}(k) > n^{S}(k) > n^{\bar{S}}(k).$

7.2.3.2. ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ АГЕНТОВ

Рассмотрим два вида воздействия центра на целевые функции агентов:

–воздействие через параметр k;

–воздействие через предельные переменные издержки агентов.

В предложенных моделях основное воздействие центра на целевые функции агентов сети осуществляется через параметр k. Выбором этого параметра центр, делая ход первым, выступает в роли «иерархического менеджера», обеспечивая согласование своих интересов и интересов его агентов. В теории иерархических игр для поиска баланса интересов традиционно используются стратегии игры гамма-один (Γ_1).

Игра Γ_1 дает наиболее выгодное для центра значение этого параметра при условии, что агенты действуют оптимальным для себя образом. Это значение находится из условия

(27) $$\frac{\partial I}{\partial k} = 0,$$

где I – прибыль центра, а агенты оптимизируют выбор своей активности q.

Другие возможности поиска баланса интересов дает игра Γ_1 с фиксированными платежами. Рассмотрим эту игру для базовой франчайзинговой сети, в которой выплата агентом роялти строится не по схеме отчислений, размер которых устанавливается фиксированной ставкой процента от объема продаж, а по схеме фиксированной сервисной платы. Этот вариант расчета приведем для сети в состоянии равновесия Курно.

Размер фиксированной сервисной платы для j-ой фирмы-франчайзи ($A^{K}_{\Gamma_1, j}$) устанавливается равным платежам франчайзеру, рассчитанным по стратегии Γ_1, т. е.

(28) $$A^K_{\Gamma_1,j} = k^K_{\Gamma_1} \cdot p^K \cdot q^K_j ,$$

где $k^K_{\Gamma_1}$ определяется по (27), а p^K и q^K_j – по (7) и (8) при $k = k^K_{\Gamma_1}$.

Дополнительно после решения игры Γ_1 каждая фирма-франчайзи при фиксированном платеже решает задачу определения оптимальной для себя активности:

(29) $$\Pi_i(p, q_i, A^K_{\Gamma_1,i}) = p \cdot q_i - c_i \cdot q_i - d_i - A^K_{\Gamma_1,i} \quad \to \max_{q_i}.$$

Ввиду важности для последующего анализа приведем решениям игры Γ_1 с фиксированной сервисной платой [1]:

(30) $$Q^K_{\Gamma_1^f} = \frac{1}{(n+1)b} \cdot \left(na - \sum_{i=1}^n c_i\right);$$

(31) $$p^K_{\Gamma_1^f} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(a + \sum_{i=1}^n c_i\right);$$

(32) $$q^K_{\Gamma_1^f,j} = \frac{1}{(n+1)b} \cdot \left(a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j\right), \quad j = \overline{1,n};$$

(33) $$\Pi^K_{\Gamma_1^f,j} = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left(a + \sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j\right)^2 - d_j - A^K_{\Gamma_1,j}, \; j = \overline{1,n};$$

(34) $$I^K_{\Gamma_1^f} = I^K_{\Gamma_1} = \sum_{i=1}^n A^K_{\Gamma_1,j} = \frac{k^K_{\Gamma_1}}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k^K_{\Gamma_1}} \right) \cdot \left(na - \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k^K_{\Gamma_1}} \right);$$

(35) $$A^K_{\Gamma_1,j} = \frac{k^K_{\Gamma_1}}{(n+1)^2 \cdot b} \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1 - k^K_{\Gamma_1}} \right) \cdot \left(a + \frac{\sum_{i=1}^n c_i - (n+1)c_j}{1 - k^K_{\Gamma_1}} \right),$$

$j = \overline{1,n}.$

Приведем некоторые утверждения, показывающие эффективность механизмов с фиксированной сервисной платой.

1. Применение механизма с фиксированной сервисной платой дает максимальную активность сети.

Так для равновесной по Курно сети, сравнивая выражения для общего объема активности (6) и (30), имеем для каждого $k \in (0,1)$:

$$Q^K(k)=\frac{1}{(n+1)b}\left(na-\frac{\sum_{i=1}^n c_i}{1-k}\right)<Q^K_{\Gamma_1^f}=\frac{1}{(n+1)b}\cdot\left(na-\sum_{i=1}^n c_i\right),$$

что доказывает данное утверждение. Таким же образом подобный факт устанавливается для равновесия и неравновесия Штакельберга, а также для сети, в которой центр конкурирует с агентами.

2. Применение механизма с фиксированной сервисной платой дает минимальную цену товара (услуги). Для доказательства этого утверждения используем соотношения для цен $p^K=a-bQ^K$ и $p^K_{\Gamma_1^f}=a-bQ^K_{\Gamma_1^f}$. Тогда с учетом результата предыдущего пункта получаем

(36) $$p^K_{\Gamma_1^f}-p^K=-b(Q^K_{\Gamma_1^f}-Q^K)=<0.$$

Этот факт справедлив для равновесия и неравновесия Штакельберга, а также для сети, в которой центр конкурирует с агентами.

3. Механизмы Γ_1 с фиксированной сервисной платой дают максимальный по k $(k\in[0,1))$ объем активности по отдельным фирмам-франчайзи.

Чтобы показать справедливость этого утверждения достаточно сравнить выражения (32) и (8)

$$q^K_{\Gamma_1^f,j}=\frac{1}{(n+1)b}\cdot\left(a+\sum_{i=1}^n c_i-(n+1)c_j\right)>q^K_j(k)=$$

$$=\frac{1}{(n+1)b}\left(a+\frac{\sum_{i=1}^n c_i-(n+1)c_j}{1-k}\right).$$

Также этот факт справедлив для равновесия и неравновесия Штакельберга, и для сети, в которой центр конкурирует с агентами.

4. Прибыль центра не меняется, т. е. $I_{\Gamma_1^f}=I_{\Gamma_1}$.

5. Прибыль франчайзи. Покажем, когда механизм Γ_1^f с фиксированной сервисной платой является более выгодным для

фирм, чем механизм Γ_1, при котором величина роялти рассчитывается от объема продаж франчайзи.

Этот анализ начнем с ситуации равновесия по Курно. Для этого, используя (33), (28) и (7)-(9) оценим следующую разность доходов фирм при $k = k_{\Gamma_1}^K$:

$$\Pi_{\Gamma_1^f, j}^K - \Pi_{\Gamma_1, j}^K = \frac{1}{(n+1)^2 b} \cdot (a-e)^2 -$$

$$- \frac{k_{\Gamma_1}^K}{(n+1)^2 b} \cdot \left(a + \frac{ne}{1-k_{\Gamma_1}^K}\right) \cdot \left(a - \frac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}\right) - \frac{1-k_{\Gamma_1}^K}{(n+1)^2 b} \cdot \left(a - \frac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}\right)^2 =$$

$$= \frac{k_{\Gamma_1}^K e}{(1-k_{\Gamma_1}^K)(n+1)^2 b} \cdot \left[\frac{k_{\Gamma_1}^K e}{1-k_{\Gamma_1}^K} - (n-1) \cdot \left(a - \frac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}\right)\right].$$

Оценим знак выражения в квадратных скобках. При $n = n_0^K = \dfrac{a-e}{a - \dfrac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}}$ оно обращается в ноль, при $n > n_0^K$ – отрицательно, а при $n < n_0^K$ – положительно.

Таким образом, для точки равновесия Курно механизм Γ_1^f (с фиксированной сервисной платой) предпочтительнее для фирм, чем механизм Γ_1, если число фирм n на рынке меньше n_0^K, т. е.

$$(37) \qquad n < \frac{a-e}{a - \dfrac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}}.$$

Если число фирм больше n_0^K, то есть неравенство (37) меняется на противоположное, то предпочтительными будет механизм Γ_1 с роялти от объема продаж.

Отметим, что для оптимального для головной фирмы числа франчайзи (n_I^K), определяемого без учета первоначального взноса соотношением (13), имеем $n_I^K > n_0^K$, и поэтому применение механизма Γ_1 с фиксированной сервисной платой снижает доход фирм по сравнению с механизмом Γ_1 с роялти от объема продаж.

Действительно,

$n_I^K = \dfrac{1}{1-\dfrac{2e}{a(1-k_{\Gamma_1}^K)}} = \dfrac{a}{a-\dfrac{2e}{1-k_{\Gamma_1}^K}} > n_0^K = \dfrac{a-e}{a-\dfrac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}}$, так как после несложных преобразований доказательство этого неравенству сводится к очевидному неравенству: $a-\dfrac{2e}{1-k_{\Gamma_1}^K} > -\dfrac{e}{1-k_{\Gamma_1}^K}$.

Здесь уместно привести следующее примечание: полагается, что $a-\dfrac{2e}{1-k_{\Gamma_1}^K} > 0$, иначе выражение (13) для n_I^K при $k = k_{\Gamma_1}^K$ не имеет содержательного смысла.

Управление издержками франчайзи является важной задачей франчайзера. Практические пути ее решения достаточно разнообразны и предполагают различные услуги, которые могут оказываться франчайзером при продаже франшизы, поддержании и развитии франшизной системы [1].

Переходя к модельным исследованиям, рассмотрим влияние переменных предельных издержек агентов на прибыль центра.

Для франчайзинговой сети в равновесии Курно, используя соответствующее выражение (10) для прибыли франчайзера, имеем

(38) $$\frac{\partial I^K}{\partial(\sum_{i=1}^n c_i)} = \frac{k}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left((n-1)a - \frac{2\sum_{i=1}^n c_i}{1-k} \right).$$

Прибыль франчайзера максимальна, если $\sum_{i=1}^n c_i = \dfrac{a(n-1)(1-k)}{2}$. Если суммарные предельные издержки франчайзи меньше этой величины, то знак производной положителен и прибыль франчайзера растет с их ростом; если –

больше, то прибыль падает с ростом суммарных предельных издержек.

Также имеем

(39) $$\frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} = \frac{k}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left((n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} \right),$$

где $\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{n}$;

(40) $$\frac{\partial I^K}{\partial e} = \frac{nk}{(n+1)^2 b(1-k)} \cdot \left((n-1)a - \frac{2ne}{1-k} \right).$$

Оптимальные для франчайзера предельные издержки франчайзи составят

(41) $$e_I^K = \frac{a(n-1)(1-k)}{2n}.$$

Из (40) и (41) следует: если предельные издержки франчайзи меньше правой части (41), то прибыль франчайзера растет с их ростом; если – больше, то прибыль падает с ростом предельных издержек.

Приведем также без вывода следующие соотношения для оптимальных предельных издержек франчайзи:

$$e_I^S = \frac{a(n-1)(1-k)}{2n-1};$$

$$e_I^{\bar{S}} = \frac{a(n^2-1)(1-k)}{2n^2}.$$

Также, опуская математические выкладки, приведем для сведения соответствующие выражения для посреднических сетей.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)_I^K = \frac{a(n-1)k}{2} + \frac{c_0(n+1)k}{2(1-k)};$$

$$e_I^K = \frac{a(n-1)k}{2n} + \frac{c_0(n+1)k}{2n(1-k)};$$

$$e_I^S = \frac{a(n-1)k}{2n-1} + \frac{c_0 nk}{(2n-1)(1-k)};$$

$$e_I^{\bar{S}} = \frac{a(n^2-1)k}{2n^2} + \frac{c_0(n^2+1)k}{2n^2(1-k)}.$$

Покажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение. $\frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} \cdot \frac{\partial I^K}{\partial n} \le 0.$

Это произведение равно нулю только при $\frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}}=0$ и $\frac{\partial I^K}{\partial n} = 0.$

Для доказательство используем (12)

$$\frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{k}{(n-1)(n+1)^3 b} \cdot \left((n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} \right).$$

С учетом (39) имеем

$$\frac{\partial I^K}{\partial \bar{c}} \cdot \frac{\partial I^K}{\partial n} = -\frac{k^2}{(n-1)(n+1)^5 b^2 (1-k)} \cdot \left((n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} \right)^2.$$

Из последнего выражения следует доказуемое утверждение.

Необходимо отметить, что знак каждого сомножителя определяется знаком выражения $(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k}$, зависящего от выбора параметров $a, n, \bar{c}, k$.

Таким образом: 1) если доход центра растет с ростом средних переменных издержек агентов, т. е. $(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} > 0,$ то он (доход центра) падает с увеличением числа агентов, и наоборот; 2) если доход центра падает с ростом средних переменных издержек агентов, т. е. $(n-1)a - \frac{2n\bar{c}}{1-k} < 0,$ то он (доход центра) растет с увеличением числа агентов, и наоборот.

Отсюда следуют такие рекомендации для центра: при росте издержек агентов и сопутствующему ему падении дохода центра целесообразно увеличивать сеть, а при росте издержек агентов и сопутствующему ему росте дохода центра последнему целесообразно не развивать сеть.

Справедливость доказанного утверждения показывается аналогичным образом для посреднических и франчайзинговых сетей в состоянии равновесия Курно и неравновесия Штакельберга. Для сетей в равновесии Штакельберга вместо средних переменных издержек агентов следует рассмотреть случай равенства переменных издержек агентов, т. е. $c_i = e, i = \overline{1, n}$.

8. Заключение

В статье на основе единого теоретико-игрового подхода представлен спектр модельных исследований многоагентных франчайзинговых и посреднических сетей на конкурентных рынках.

Представлены базовые теоретико-игровые модели сетевого взаимодействия «франчайзер–франчайзи–рынок» и «производитель–посредник–рынок». В них сделаны обычные для моделей олигополии предположения о линейности функций затрат и обратной функции спроса, дающие возможность аналитического представления решения. В отличие от классических моделей олигополии, состоящей исключительно из агентов-производителей, в предложенной базовой модели франчайзинговых сетей агенты могут являться фирмами-производителями, торговыми точками или предприятиями сферы услуг, а в модели посреднической сети агенты выполняют только посреднические функции, производителем выступает только центр. Авторским расширением традиционного модельного описания олигополистического рынка является введение в модель нового субъекта-центра, на которого возлагаются функции управления сетевым взаимодействием агентов. Таким образом, вместо традиционных систем «центр–агент» и «агент–рынок» рассматривается сеть «центр–агент–рынок».

При формировании устойчивых сетей авторы опирались на наиболее распространенные на сегодняшний день классические концепции решения некооперативных игр – равновесия Курно-Нэша и равновесия по Штакельбергу.

Рассмотрен ряд важных задач центра, связанных с повышение эффективности стабильных сетей. При решении задачи обеспечения контролируемого роста сети и оптимизации числа ее участников отмечены закономерности во взаимосвязи между целями собственной прибыли центра и развитием сети. Установлены условия, при которых для повышения эффективности сети в целом и получения собственного дополнительного дохода центру целесообразно принять решение о самостоятельном выходе на потребителя, конкурируя со своими агентами.

Рефлексивное управление сетевым взаимодействием представлено в статье задачами информационной и стратегической рефлексии. В задаче информационной рефлексии рассмотрен случай точечной структуры информированности агентов о параметре спроса и поиск решений в соответствующей рефлексивной игре. В задаче стратегической рефлексии анализируются различные концепции построения сети: 1) однородная сеть, когда все интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии разыгрывают равновесие Курно-Нэша; 2) однородная сеть, когда все интеллектуальные агенты одного уровня рефлексии выступают «лидерами» по Штакельбергу; 3) неоднородная сеть, в которой некоторые агенты выступает региональными «лидерами» по Штакельбергу, а остальные агенты действуют по Курно-Нэшу.

Рассмотрены возможности повышения эффективности сетей на основе стратегий игр $Г_1$ и игр $Г_1$ с фиксированными платежами, проведен сравнительный анализ этих игр. Представлены также модельные исследования влияния предельных переменных издержек агентов на прибыль центра и его решения по развитию сети.

Литература

1. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование многоагентных франчайзинговых систем.* – Барнаул: АлтГУ, 2009. – 91 с.
2. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Теоретико-игровое моделирование сетевого взаимодействия целенаправленных*

субъектов в многоагентной системе «центр–агент–конкурентный рынок» // Известия АлтГУ. – 2012. – № 1/2(71).
3. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Ю.Г. *Моделирование поведения экономических агентов в системе «производитель–посредник–конкурентный рынок»* // Управление большими системами. Выпуск 32. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 83–108.
4. АЛГАЗИНА Д.Г. *Теоретико-игровое моделирование отношений франчайзинга в условиях конкуренции центра и агентов рынке* // Известия АлтГУ. – 2012. – № 1/2(71).
5. АЛГАЗИНА Д.Г., АЛГАЗИН Г.И. *Моделирование взаимосвязи прибыли франчайзера и развития франчайзинговой системы на конкурентном рынке* // Известия АлтГУ. – 2011. – № 2/1(70). – С. 261–264.
6. АРДАШЕВА Л.М., СКОПИН А.О. *Положительные отношения между целями прибыли франчайзера и ростом франчайзинговой системы* // Управление экономическими системами: электрон. науч. журн.[Электронный ресурс]. – 2007. – № 2(10). – Режим доступа: http://uecs.mcnip.ru.
7. БУЛАВСКИЙ В.А. *Модель олигополии с рынками производственных факторов* // Экономика и математические методы. – 1999. – Т. 35, №4. – С. 78–86.
8. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Равновесие и обобщенных моделях Курно и Штакельберга* // Экономика и математические методы. – 1995. – Т. 31, вып. 4. – С. 151–163.
9. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* – М.: Наука, 1976. – 328 с.
10. ГУБКО М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I. Обзор теории сетевых игр* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 8. – С. 115–132.
11. ГУБКО М.В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. II. Задачи стимулирования* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 9. – С. 131–148.

12. ДЮСУШЕ О.М. *Статическое равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек* // Экономический журнал ВШЭ. – 2006.– №1. – С. 3–32.
13. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1.– С. 3–18.
14. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 149 с.
15. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Прикладные модели информационного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.
16. ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Информационное равновесие: точечные структуры информированности* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 10. – С. 111–122.
17. BRICKLEY J., DARK F. The Choice of Organization Form: The Case of Franchising // Journal of Financial Economics. – 1987. – Vol. 18. – P. 401–420.
18. CASTROGIOVANNI G., ROBERT J., SCOTT J. Franchise Failure Rates: An Assessment of Magnitude and Influencing Factors // Journal of Small Business Management. – 1993.
19. JACKSON M.O., VOLINSKY A.A. Strategic Model of Social and Economic Networks // Journal of Economic Theory. – 1996. – № 71. – P. 44–74.
20. KNOTT A.M. The Dynamic Value of Hierarchy // Management Science. – 2001. – Vol. 47(3). – P. 430–448.
21. LAL R. Improving Channel Coordination Through Franchising // Marketing Science. – 1990. – Vol. 5. – P. 299–318.
22. METZLER C., HOBBS B.S., PANG J.-S. Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC network with Arbitrage: Formulations and Properties // Networks and Spatial Economics. – 2003. – Vol. 3, №2. – P. 123–150.
23. NOVSHEK W. On the Existence of Cournot Equilibrium // Review Economic Studies. – 1985. – Vol. 5(1), №168.
24. SHERALI H.D., SOYSTER A.L., MURPHY F.H. Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations // Operatios Research. – 1983. – Vol. 31, №2.

25. STACKELBERG H. Marktform und Gleichgewicht. – Vienna: Julius Springer, 1934.

MODELLING OF NETWORK INTERACTION IN COMPETITIVE MARKETS

Gennady Algazin, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algazin@socio.asu.ru).
Daria Algazina, Altai State University, Barnaul, associated professor (darya.algazina@mail.ru).

Abstract: Presented theoretical game model of multi-agent network, focused on the promotion of the competitive market of homogeneous products (services). For the base of applied models «franchisor-franchisee-market» and «producer-mediator-market» under normal for models of oligopoly assumptions about the linearity of the cost function and the inverse demand function, allowing the analytic representation of solutions, carried out comprehensive studies of the effectiveness of networks in the conditions of the Cournot and Stackelberg equilibrium. A new aspect of model studies is an introduction to the theoretical game model of a network of active subject – centre, who is responsible for the solution of the system tasks on regulation of conflicts and ensuring the stability of the network, the management network of interaction and improve the effectiveness of a stable network.

Keywords: the typology of the network, theoretical game model, equilibrium and stability of the network, Cournot, Stackelberg, management of network interaction, network efficiency, franchising, trade mediation.