

УДК 519.86
ББК 65с

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УЧЕТА ФАКТОРА КОРРУПЦИИ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ В ТРЕХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Горбанева О.И.¹, Угольницкий Г.А.²

(Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону)

В статье рассматривается статическая задача распределения ресурсов в трехуровневой системе управления. Исследуется влияние механизма коррупции на экономическую систему, на целевые функции ее участников и на их стратегии. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения механизмов принуждения и побуждения. Рассматривались равновесия принуждения и побуждения. Доказано, что в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно. В случае принуждения всегда можно добиться того, чтобы выполнилось условие устойчивого развития, в случае побуждения этого можно добиться лишь при соответствующих условиях

Ключевые слова: распределение ресурсов, игра Г2, теорема Гермейера, принуждение, побуждение.

1. Введение

Коррупция оказывает негативное влияние на развитие общества. Это одна из главных угроз успешным общественным преобразованиям. На протяжении нескольких десятилетий

¹ Ольга Ивановна Горбанева, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель (gorbaneva@mail.ru).

² Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор (ougoln@mail.ru).

ученые пытались моделировать различных аспекты коррупции и борьбы с ней. Базовой схемой моделирования служит иерархическая система «принципал-агент-клиент»[5] в различных модификациях и ее теоретико-игровое исследование.

Что касается влияния механизма коррупции при распределении ресурсов, ранее была исследована статическая задача распределения ресурсов в двухуровневой экономической системе [1,2,3]. Попустительство рассматривалось в двух формах: более мягкой – «попустительство» и более жесткой – «вымогательство». Также рассматривалась кооперативная постановка задачи. В построенных моделях ищется равновесие по Штакельбергу.

В данной статье рассматривается статическая задача распределения ресурсов в трехуровневой системе управления. Исследуется влияние механизма коррупции при распределении ресурсов на экономическую систему, на целевые функции ее участников и на их стратегии. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения механизмов принуждения и побуждения. В данных целях строится модель в виде игры Γ_2 , которая исследуется при помощи теоремы Гермейера [4].

2. Объект исследования - экономическая система

Рассматривается трехуровневая система управления (Рис.1). Нижний уровень производит продукцию и в процессе производства воздействует на управляемую систему. Средний уровень воздействует на нижний уровень путем побуждения (распределения ресурсов между элементами нижнего уровня) или принуждения (контролирует использование ресурсов). Состояние управляемой системы не является интересом среднего уровня. Верхний уровень следит за состоянием управляемой системы и, в целях сохранения ее состояния в заданных пределах, воздействует на средний уровень, используя механизмы принуждения (ограничения на стратегии) и побуждения (премии, стимулирующие надбавки).

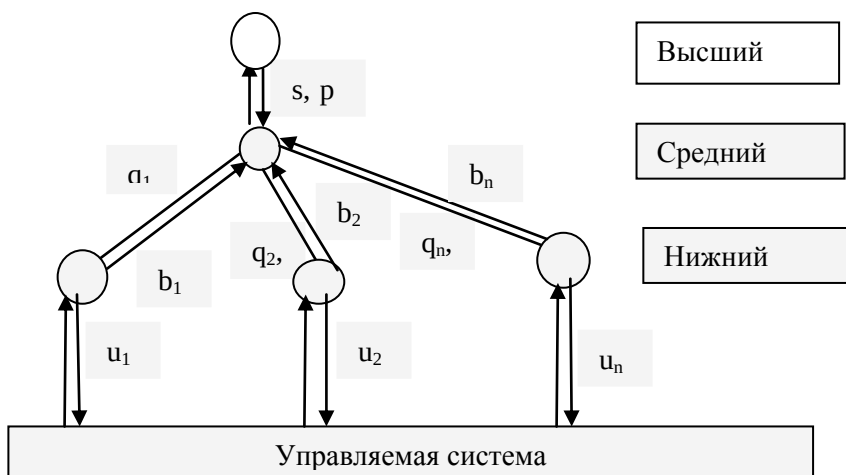


Рис.1. Трехуровневая иерархическая система

3. Постановка задачи

Средний уровень располагает некоторым количеством ресурсов R , которое необходимо распределить между элементами нижнего уровня таким образом, чтобы выигрыш от использования ресурсов был максимальным. Элемент нижнего уровня использует ресурсы для производства в общих целях (общесистемная деятельность), а также для производства в частных целях (частная деятельность). Поэтому нижний уровень часть ресурсов u_i , доставшихся от среднего уровня (r_i), тратит на общие цели, а оставшуюся часть – на свои частные цели.

Средний уровень, зная об этом, может установить нижний порог q_i , меньше которого нижний уровень не может тратить на общие цели. Кроме того, средний уровень может часть ресурсов использовать на свои частные цели.

Нижний уровень может воздействовать на средний при помощи механизма коррупции b_i для увеличения количества ресурсов r_i , выделенных ему, или для уменьшения порогового значения q_i .

Верхний уровень осуществляет контроль состояния управляемой системы, воздействуя на средний уровень путем назначения величины s , меньше которой средний уровень не может назначать величины q_i , а также величины p – доли от суммарного выигрыша элементов нижнего уровня, возвращаемой среднему уровню в качестве премии за соблюдение требования устойчивого развития.

Требование устойчивого развития [6] выражается в том, что суммарный доход от системной деятельности элементов нижнего уровня должен быть не ниже порогового значения a .

Введем условные обозначения:

$M, J_0, J_i, i = 1, \dots, n$ – целевые функции верхнего, среднего и нижнего уровней соответственно.

g_i – производственная функция общесистемной деятельности нижнего уровня с эластичностью производства β .

h_i – производственная функция частной деятельности нижнего уровня с эластичностью производства β .

r_i – доля ресурсов, выделенных средним уровнем нижнему уровню (управляющая величина среднего уровня).

u_i – доля ресурсов от r_i , направленная нижним уровнем на общесистемные цели (управляющая величина нижнего уровня).

b_i – доля ресурсов от r_i , возвращаемая нижним уровнем среднему в качестве взятки (управляющая величина нижнего уровня).

q_i – нижняя доля u_i , назначаемая средним уровнем нижнему, меньше которой нижний уровень не может направить ресурсы на общие цели (управляющая величина среднего уровня).

s – нижняя доля значений q_i , меньше которой средний уровень не может устанавливать порог доли ресурсов, направленной на общие цели (управляющая величина верхнего уровня).

p – доля суммарного дохода от общесистемной деятельности элементов нижнего уровня, достающаяся среднему уровню в качестве стимулирующей величины (премия, зарплата и т.д.) (управляющая величина верхнего уровня).

a – граница устойчивого состояния системы.

s_0 – минимальная величина s , при которой выполняется условие устойчивого развития ($\sum_{i=1}^n g_i(s_0 r_i) = a$, при $r_i - const$).

r_0 – минимальная величина r_i , при которой выполняется условие устойчивого развития ($\sum_{i=1}^n g_i(r_0) = a$, при $r_i - const$).

С учетом этих обозначений, построим математическую модель.

4. Математическая модель

Таким образом, значение целевой функции верхнего уровня зависит от того, выполняется условие устойчивого развития или нет, т.е.

$$(1) \quad M\left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a\right) \rightarrow \max$$

где $M\left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a\right)$ может иметь один из двух видов:

1) функция вида

$$M\left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a\right) = \begin{cases} const, & \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a \\ -\infty, & \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) < a \end{cases}.$$

Такому субъекту верхнего уровня безразлично, каким образом выполняется условие (1) и насколько величина $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$ отклоняется от a . В его цели не входит увеличение величины дохода от системной деятельности всех элементов нижнего уровня $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$. Ему нужно, чтобы выполнилось условие устойчивого развития хотя бы в виде равенства. Такой верхний уровень назовем «незаинтересованным»;

2) линейная функция $M \cdot \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a \right)$, где M – положительная константа, то есть если условие выполняется, то в результате выигрыш верхнего уровня – положительная величина (премия, надбавка), в противном случае – отрицательная (штраф за невыполнение условия устойчивого развития). В этом случае, в отличие от предыдущего, верхний уровень интересуется тем, насколько величина $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$ отклоняется от a , т.е. верхний уровень стремится максимизировать величину $\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i)$. Такой верхний уровень назовем «заинтересованным».

Верхний уровень управляет величинами s и p , на которые накладываются ограничения:

$$(2) \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(3) \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Целевая функция среднего уровня состоит из дохода от суммарной системной деятельности элементов нижнего уровня, дохода от своей частной деятельности, дохода от взятки со стороны элементов нижнего уровня:

$$(4) \quad J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H(1 - \sum_{i=1}^n r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max$$

Средний уровень управляет величинами q_i и r_i , на которые накладываются ограничения:

$$(5) \quad s \leq q_i \leq 1,$$

$$(6) \quad 0 \leq r_i \leq 1,$$

$$(7) \quad 0 \leq \sum_{i=1}^n r_i \leq 1$$

Целевая функция элемента нижнего уровня состоит из дохода от его системной деятельности, за вычетом доли, уплачиваемой среднему уровню в качестве премии за выполнение

условия устойчивого развития, и дохода от несистемной деятельности

$$(8) \quad J_i = (1 - p)g_i(u_i r_i) + h_i((1 - u_i - b_i)r_i) \rightarrow \max$$

Нижний уровень управляет величинами u_i и b_i , на которые накладываются ограничения:

$$(9) \quad q_i \leq u_i \leq 1,$$

$$(10) \quad 0 \leq u_i + b_i \leq 1.$$

Требование устойчивого развития выражается в том, что суммарный доход от системной деятельности элементов нижнего уровня должен быть не ниже порогового значения a , т.е.

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a$$

Обратим особое внимание на то, что элемент верхнего уровня в данной модели один, элемент среднего уровня также один, а элементов нижнего уровня здесь может быть сколько угодно много.

Элементов среднего уровня могло бы быть больше, чем один, но так как в некооперативной постановке ни целевые функции, ни стратегии элементов среднего уровня не зависят друг от друга, то модель распалась бы на n моделей с одним средним уровнем. Этого нельзя сказать об элементах нижнего уровня. Количество ресурсов, достаемых i -му элементу нижнего уровня, зависит от того, сколько ресурсов досталось другим, так как общее количество ресурсов ограничено (в силу условия $0 \leq \sum_{i=1}^n r_i \leq 1$). Поэтому относительно элементов нижнего

уровня задача не является аддитивной, ее нельзя разбить на n задач с одним элементом нижнего уровня.

Задачи среднего и нижнего уровней составляют игру Γ_2 [4].

Задача исследовалась при помощи теоремы Гермейера [4] в случаях равновесия принуждения и побуждения [7 – 8] на каждом уровне. Всего найдено четыре равновесия:

когда верхний элемент использует «принуждение», средний элемент также использует «принуждение» (назовем эту модель «моделью принуждения-принуждения»);

когда верхний элемент использует «принуждение», средний же элемент использует «побуждение» («модель принуждения-побуждения»);

когда верхний элемент использует «побуждение», средний же элемент использует «принуждение» («модель побуждения-принуждения»);

когда верхний элемент использует «побуждение», средний элемент также использует «побуждение» («модель побуждения-побуждения»).

Рассмотрим каждый из этих случаев.

5. «Принуждение-принуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

$$(12) \quad M \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a \right) \rightarrow \max_s$$

$$(13) \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(14) \quad p = \text{const}.$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной s , величина p фиксирована.

Задача среднего уровня:

$$(15) \quad J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H(1 - \sum_{i=1}^n r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max_{q_i}$$

$$(16) \quad s \leq q_i \leq 1$$

$$(17) \quad r_i = \text{const},$$

Здесь, аналогично верхнему уровню, средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины q_i , величина r_i фиксирована.

Задача элемента нижнего уровня не изменяется:

$$(18) \quad J_i = (1 - p)g_i(u_i r_i) + h_i((1 - u_i - b_i)r_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i}$$

$$(19) \quad q_i \leq u_i \leq 1,$$

$$(20) \quad 0 \leq u_i + b_i \leq 1,$$

Требование устойчивого развития не изменяется

$$(21) \quad \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a$$

Итак, модель «принуждение-принуждение» описывается соотношениями (12) – (21).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня (другими словами, стратегия нижнего уровня, при которой достигается величина K_1 [4] теоремы Гермейера – максимальный выигрыш среднего уровня)

$$(22) \quad b_i = 1 - u_i^* - \beta \sqrt{\frac{(1 - u_i^{*\beta}) g_i(1)(1 - p)}{h_i(1)}} - \varepsilon$$

где u_i^* находится из уравнения

$$(23) \quad p g_i(1) r_i^\beta - r_i u_i^\beta + \frac{\gamma_i}{u_i^{1-\beta}} \beta \sqrt{\frac{(1 - u_i^\beta)^{1-\beta} g_i(1)(1 - p)}{h_i(1)}} = 0$$

Уравнение (23) в общем случае аналитически не разрешимо, но доказано, что функция, составляющая левую часть уравнения, убывает на отрезке $[0; 1]$, следовательно, если левая часть уравнения принимает разные знаки на этих концах, то применим метод дихотомии, если же левая часть принимает значения одного знака (положительного, так как при $u_i \rightarrow 0$ левая часть уравнения стремится к $+\infty$), то $u_i = q_i$, то есть элемент нижнего уровня должен потратить на общие цели минимальную величину, которую возможно потратить, то есть ровно ту величину, меньше которой потратить ресурсы на общие цели запрещено средним уровнем.

Оптимальная стратегия среднего уровня выглядит следующим образом:

$$(24) \quad q_i = \begin{cases} s, & b_i = 1 - u_i^* - \beta \sqrt{\frac{(1 - u_i^{*\beta}) g_i(1)}{h_i(1)}}, u_i = u_i^* \\ 1, & b_i \neq 1 - u_i^* - \beta \sqrt{\frac{(1 - u_i^{*\beta}) g_i(1)}{h_i(1)}} \vee u_i \neq u_i^* \end{cases}$$

Оптимальная стратегия верхнего уровня находится при помощи максимизации его целевой функции:

В случае «незаинтересованного» верхнего уровня $s = s_0$, что, в принципе, не сильно мешает коррупции, уменьшая, возможно, размеры взяток. Но в этом случае условие устойчивого развития выполняется (правда, в виде равенства).

В случае «заинтересованного» верхнего уровня $s = 1$, что влечет за собой в силу ограничений модели $q_i = 1$, $u_i = 1$, откуда видно, что коррупция в этом случае искореняется.

Чем больше величина s , тем больше выделенных ресурсов нижний уровень тратит на свои цели и тем меньше ресурсов он возвращает среднему уровню в качестве взятки. То есть, чем больше величина s , тем борьба с коррупцией эффективнее.

6. «Принуждение-побуждение»

Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

$$(25) \quad M \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a \right) \rightarrow \max_s$$

$$(26) \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(27) \quad p = \text{const}.$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной s , величина p фиксирована.

Задача среднего уровня:

$$(28) \quad J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H(1 - \sum_{i=1}^n r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max_{r_i}$$

$$(29) \quad s_i \leq r_i \leq 1,$$

$$(30) \quad \sum_{i=1}^n r_i \leq 1$$

Здесь средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины r_i , величина q_i отсутствует в модели.

В задаче элемента нижнего уровня изменяется только ограничение на u_i :

$$(31) \quad J_i = (1 - p)g_i(u_i r_i) + h_i((1 - u_i - b_i)r_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i}$$

$$(32) \quad 0 \leq u_i + b_i \leq 1,$$

Требование устойчивого развития не изменяется

$$(33) \quad \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a$$

То есть модель «принуждение-побуждение» описывается соотношениями (25) – (33).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия нижнего уровня ($\text{Arg } K_1$)

$$(34) \quad u_i = \frac{s}{r_i} \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \frac{\varepsilon}{r_i}$$

$$(35) \quad u_i = \frac{s}{r_i} \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \frac{\varepsilon}{r_i}$$

что равносильно тому, что на общие цели должно потратиться

ровно $u_i r_i = s \beta \sqrt{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon$ (не зависимо от того, сколько

получит элемент ресурсов, величина, потраченная на общие цели, постоянная).

Кроме того, нетрудно заметить, что выполняется условие $u_i + b_i = 1$, которое означает, что все ресурсы нижний элемент тратит на общие цели и взятку, то есть средний элемент лишает нижний элемент возможности тратить ресурсы на свои частные цели.

Вывод. Оптимальная для взяточника зависимость объема ресурсов от взятки:

$$r_i = \frac{s}{u_i} \sqrt[1-\beta]{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \frac{\varepsilon}{u_i} = \frac{1}{u_i} \left(s \sqrt[1-\beta]{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon \right) =$$

$$= \frac{1}{1-b_i} \left(s \sqrt[1-\beta]{1 + \frac{h_i(1)}{g_i(1)(1-p)}} + \varepsilon \right),$$

то есть величина количества ресурсов обратно пропорциональна величине, противоположной взятке.

Оптимальная стратегия среднего уровня – любой набор значений r_i , при котором $\sum_{i=1}^n r_i = 1 - \sqrt[1-\beta]{\beta H(1)}$, что также является величиной постоянной. То есть средства произвольно распределяются между элементами нижнего уровня. Себе средний уровень оставляет ресурсы в количестве $\sqrt[1-\beta]{\beta H(1)}$.

Оптимальная стратегия верхнего уровня находится оптимизацией его целевой функции в случае «незаинтересованного» верхнего уровня

$$s = \begin{cases} r_0, & u_i r_i > r_0 \\ \frac{1-\beta \sqrt[1-\beta]{g_i(1) u_i^\beta}}{\sum_{i=1}^n 1-\beta \sqrt[1-\beta]{g_i(1) u_i^\beta}}, & u_i r_i \leq r_0 \end{cases}$$

Но в этом случае верхний уровень может повлиять на элемент среднего уровня, если $r_0 < \frac{1-\beta \sqrt[1-\beta]{g_i(1) u_i^\beta}}{\sum_{i=1}^n 1-\beta \sqrt[1-\beta]{g_i(1) u_i^\beta}}$. В этом случае

борьба с коррупцией не происходит, но условие устойчивого развития выполняется.

В случае «заинтересованного» верхнего уровня $s = \frac{1-\beta \sqrt[1-\beta]{g_i(1) u_i^\beta}}{\sum_{i=1}^n 1-\beta \sqrt[1-\beta]{g_i(1) u_i^\beta}}$. Так как $\sum_{i=1}^n \frac{1-\beta \sqrt[1-\beta]{g_i(1) u_i^\beta}}{\sum_{i=1}^n 1-\beta \sqrt[1-\beta]{g_i(1) u_i^\beta}} = 1$, то верхний

уровень принуждает средний уровень все ресурсы тратить на распределение между элементами среднего уровня, лишая

возможности средний уровень часть ресурсов забирать себе и брать взятку.

Следовательно, принуждение эффективно при борьбе с коррупцией при «заинтересованном» высшем уровне.

7. «Побуждение-принуждение»

В данной статье рассматривается статическая задача распределения ресурсов в трехуровневой системе управления. Исследуется влияние механизма коррупции при распределении ресурсов на экономическую систему, на целевые функции ее участников и на их стратегии. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения механизмов принуждения и побуждения. В данных целях строится модель в виде игры Г2, которая исследуется при помощи теоремы Гермейера [4]. Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

$$(36) \quad M \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a \right) \rightarrow \max_p$$

$$(37) \quad 0 \leq p \leq 1,$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной p , величина s отсутствует в модели, так как принуждение не применяется.

Задача среднего уровня:

$$(38) \quad J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H(1 - \sum_{i=1}^n r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max_{q_i}$$

$$(39) \quad 0 \leq q_i \leq 1,$$

$$(40) \quad r_i = \text{const}$$

Здесь средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины q_i , величины r_i фиксированы.

Задача элемента нижнего уровня:

$$(41) \quad J_i = (1 - p)g_i(u_i r_i) + h_i((1 - u_i - b_i)r_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i}$$

$$(42) \quad q_i \leq u_i \leq 1$$

$$(43) \quad 0 \leq u_i + b_i \leq 1,$$

Требование устойчивого развития не изменяется

$$(44) \quad \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a$$

То есть модель «принуждение-побуждение» описывается соотношениями (36) – (44).

Как и в случае «Принуждение-Принуждение» для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня

$$(22) \quad b_i = 1 - u_i^* - \sqrt[\beta]{\frac{(1 - u_i^{*\beta}) g_i(1)(1 - p)}{h_i(1)}} - \varepsilon$$

где u_i^* находится из уравнения

$$(23) \quad p g_i(1) r_i^\beta - r_i u_i^\beta + \frac{\gamma_i}{u_i^{1-\beta}} \sqrt[\beta]{\frac{(1 - u_i^\beta)^{1-\beta} g_i(1)(1 - p)}{h_i(1)}} = 0,$$

а оптимальная стратегия среднего уровня выглядит следующим образом:

$$q_i = \begin{cases} u_i^*, & b_i = 1 - u_i^* - \sqrt[\beta]{\frac{(1 - u_i^{*\beta}) g_i(1)}{h_i(1)}}, u_i = u_i^* \\ 1, & b_i \neq 1 - u_i^* - \sqrt[\beta]{\frac{(1 - u_i^{*\beta}) g_i(1)}{h_i(1)}} \vee u_i \neq u_i^* \end{cases}$$

Что касается стратегии верхнего уровня, то в случае незаинтересованного верхнего уровня минимальное p^* , удовлетворяющее (45)

$$(45) \quad p > \frac{\sum_{i=1}^n \left(s_0 - u_i^* - \sqrt[\beta]{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}} \left(\sqrt[\beta]{(1 - s_0^\beta)(1 - p)} - \sqrt[\beta]{(1 - u_i^{*\beta})} \right) \right)}{\sum_{i=1}^n g_i(s_0 r_i)}$$

и будет стратегией поощрения, т.е.

$$p = \begin{cases} p^*, & q_i \geq s_0 \\ 0, & q_i < s_0 \end{cases}$$

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(46) \quad p^* \leq 1.$$

В случае заинтересованного верхнего уровня минимальное значение p^* , удовлетворяющее (47)

$$(47) \quad p > \frac{\sum_{i=1}^n \left(1 - u_i^* + \sqrt[\beta]{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}} \sqrt[\beta]{(1 - u_i^{*\beta})} \right)}{\sum_{i=1}^n g_i(r_i)}$$

будет стратегией поощрения, т.е.

$$p = \begin{cases} p^*, & q_i = 1 \\ 0, & q_i \neq 1 \end{cases}$$

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(48) \quad \frac{\sum_{i=1}^n \left(1 - u_i^* + \sqrt[\beta]{\frac{g_i(1)}{h_i(1)}} \sqrt[\beta]{(1 - u_i^{*\beta})} \right)}{\sum_{i=1}^n g_i(r_i)} \leq 1.$$

Как можно видеть, в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно, в случае же «незаинтересованного» верхнего уровня коррупцию можно лишь ограничить, уменьшить.

Величина p – часть дохода всей системы, который был получен при помощи нижнего уровня, которая отдается среднему уровню. Чем больше величина p , тем больше доход среднего уровня от системной деятельности, тем меньше его доход от взятки. Среднему уровню становится выгодным позволять нижнему уровню тратить все средства на общесистемную деятельность, что исключает возможность получения взятки.

Правда, в этом случае p должно быть достаточно большим, чтобы доход от общесистемной деятельности для среднего уровня превышал бы его суммарный доход в случае наличия механизма коррупции.

8. «Побуждение-побуждение»

В данной статье рассматривается статическая задача распределения ресурсов в трехуровневой системе управления. Исследуется влияние механизма коррупции при распределении ресурсов на экономическую систему, на целевые функции ее участников и на их стратегии. Оцениваются возможность и способы борьбы с коррупцией в случае применения механизмов принуждения и побуждения. В данных целях строится модель в виде игры Г2, которая исследуется при помощи теоремы Гермейера [4]. Модель в этом случае принимает следующий вид:

Задача верхнего уровня:

$$(49) \quad M \left(\sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) - a \right) \rightarrow \max_p$$

$$(50) \quad 0 \leq p \leq 1,$$

Здесь верхний уровень управляет только величиной p , величина s отсутствует в модели, так как принуждение не применяется.

Задача среднего уровня:

$$(51) \quad J_0 = p \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + H(1 - \sum_{i=1}^n r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i \rightarrow \max_{r_i}$$

$$(52) \quad 0 \leq r_i \leq 1,$$

$$(53) \quad \sum_{i=1}^n r_i \leq 1$$

Здесь аналогично верхнему уровню, средний уровень воздействует на элемент нижнего уровня при помощи величины r_i , величина q_i отсутствует в модели.

Задача элемента нижнего уровня:

$$(54) \quad J_i = (1 - p)g_i(u_i r_i) + h_i((1 - u_i - b_i)r_i) \rightarrow \max_{u_i, b_i}$$

$$(55) \quad 0 \leq u_i \leq 1$$

$$(56) \quad 0 \leq u_i + b_i \leq 1,$$

Требование устойчивого развития не изменяется

$$(57) \quad \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) \geq a$$

То есть модель «побуждение-побуждение» описывается соотношениями (49) – (57).

При нахождении равновесия в данной игре было доказано, что для среднего уровня наиболее выгодна стратегия элемента нижнего уровня

$$(58) \quad u_i = \frac{\sqrt[1-\beta]{g_i(1)(1-p)}}{r_i}$$

$$(59) \quad b_i = 1 - u_i = 1 - \frac{\sqrt[1-\beta]{g_i(1)(1-p)}}{r_i}$$

Это равносильно тому, что на общие цели должно потратиться ровно $u_i r_i = \sqrt[1-\beta]{g_i(1)(1-p)}$ (независимо от того, сколько получит элемент ресурсов, величина, потраченная на общие цели, постоянная).

Кроме того, нетрудно заметить, что выполняется условие $u_i + b_i = 1$, которое означает, что все ресурсы нижний элемент тратит на общие цели и взятку, то есть средний элемент лишает нижний элемент возможности тратить ресурсы на свои частные цели.

Вывод. Оптимальная зависимость для взяточника объема ресурсов от взятки:

$$r_i = \frac{\sqrt[1-\beta]{g_i(1)(1-p)}}{u_i} = \frac{\sqrt[1-\beta]{g_i(1)(1-p)}}{1 - b_i},$$

то есть величина количества ресурсов обратно пропорциональна величине, противоположной взятке, что согласуется с результатами, полученными при исследовании модели «Принуждение-Побуждение».

Оптимальная стратегия среднего уровня – любой набор значений r_i , при котором $\sum_{i=1}^n r_i = 1 - \sqrt[\beta]{\beta H(1)}$. Т.е.

$$r_i = \begin{cases} \forall r_i \mid \sum_{i=1}^n r_i = 1 - \sqrt[\beta]{\beta H(1)}, & \begin{aligned} u_i &= \frac{{}^{1-\beta}\sqrt{g_i(1)(1-p)}}{r_i}, \\ b_i &= 1 - \frac{{}^{1-\beta}\sqrt{g_i(1)(1-p)}}{r_i} \end{aligned} \\ 0, & \begin{aligned} u_i &\neq \frac{{}^{1-\beta}\sqrt{g_i(1)(1-p)}}{r_i}, \\ b_i &\neq 1 - \frac{{}^{1-\beta}\sqrt{g_i(1)(1-p)}}{r_i} \end{aligned} \end{cases}$$

Себе верхний уровень оставляет ресурсы в количестве $\sqrt[\beta]{\beta H(1)}$.

В случае «незаинтересованного» верхнего уровня его стратегия

$$(60) \quad p = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^* r_i + H(1 - \sum_{i=1}^n r_i) - H(1 - nr_0)}{\sum_{i=1}^n g_i(r_0)} - \varepsilon_1, & \forall i \ u_i r_i \geq r_0, \\ 0, & \exists i \ u_i r_i < r_0. \end{cases}$$

где b_i^* находится по формуле (59).

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(61) \quad \frac{\sum_{i=1}^n b_i^* r_i + H(1 - \sum_{i=1}^n r_i) - H(1 - nr_0)}{\sum_{i=1}^n g_i(r_0)} - \varepsilon_1 \leq 1$$

А в случае «заинтересованного» верхнего уровня:

$$(62) \quad p = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^* r_i}{\sum_{i=1}^n g_i(r_i)} - \varepsilon_1, & \forall i \ u_i r_i \geq r_0, \sum_{i=1}^n r_i = 1 \\ 0, & \exists i \ u_i r_i < r_0 \ . \vee \sum_{i=1}^n r_i < 1 \end{cases}$$

где b_i^* находится по формуле (59). То есть в этом случае элементу верхнего уровня выгодно, чтобы все ресурсы были распределены между элементами нижнего уровня, что лишает возможности среднему уровню оставлять часть ресурсов себе.

Но верхний уровень может влиять на средний, только если

$$(63) \quad \frac{\sum_{i=1}^n b_i^* r_i}{\sum_{i=1}^n g_i(r_i)} - \varepsilon_1 \leq 1.$$

Этот вид модели наименее эффективен при борьбе с коррупцией, но в этом случае удастся добиться того, чтобы элементы среднего и нижнего уровня использовали ресурсы строго по назначению.

9. Заключение

В статье построена и исследована статическая трехуровневая модель распределения ресурсов с учетом механизма коррупции. Рассматривались равновесия принуждения и побуждения. Доказано, что в случае «заинтересованного» верхнего уровня бороться с коррупцией можно в трех из четырех рассмотренных случаев, а именно в моделях «принуждение-принуждение», «принуждение-побуждение» и «побуждение-принуждение». В остальных случаях, в том числе и во всех случаях при «незаинтересованном» верхнем уровне возможно лишь ограничение механизма коррупции. В ряде случаев удастся добиться того, чтобы элементы нижнего и среднего уровня (в случае «заинтересованного» верхнего уровня) не тратили ресурсы на частные цели: в моделях «принуждение-побуждение» и «побуждение-побуждение». В случае принуждения всегда можно добиться того, чтобы выполнилось условие устойчивого развития, в случае побуждения этого можно добиться лишь при соответствующих условиях (46), (48), (61) и (63).

Литература

1. ГОРБАНЕВА О. И. *Игровые модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Т. 2, в. 1. – С. 27 – 46.
2. ГОРБАНЕВА О. И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Управление большими системами. – 2009. – № 26. – С. 64–80.
3. КОНОНЕНКО А. Ф. *Теория игр и иерархические систем* // Планирование и управление экономическими целенаправленными системами. – Новосибирск: Наука, 1974. – С.: 63 – 72.
4. РЫБАСОВ Е. А., УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учетом коррупции* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2. / Под редакцией Угольницкого Г. А. – М.: Вузовская книга, 2004. – С.: 45 – 65.
5. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А., ГОРБАНЕВА О. И. *Задача распределения ресурсов в организационной системе с учетом коррупции и ее экологические приложения* // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2007. – № 1. – С. 43–47.
6. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Математическое моделирование иерархического управления устойчивым развитием* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2. / Под редакцией Угольницкого Г. А. – М.: Вузовская книга, 2004. – С.: 101 – 125.
7. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Теоретико-математическое моделирование методов иерархического управления устойчивым развитием* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 1.
8. OUGOLNITSKY, G. A. *Game Theoretic Modeling of the Hierarchical Control of Sustainable Development Game* // Theory and Applications – 2002. –Vol. 8. – P. 107–118.

1. *Ougolnitsky G.A.* Game Theoretic Modeling of the Hierarchical Control of Sustainable Development Game // Theory and Applications. – 2002. – Vol. 8. – P. 107-118.

STATIC MODELS TAKING INTO ACCOUNT CORRUPTION FACTOR IN CASE OF RESOURCE ALLOCATION IN THREE-LEVEL CONTROL SYSTEM

Gorbaneva Olga Ivanovna, South Federal University, Rostov-on-Don, Cand.Sc., assistant professor (gorbaneva@mail.ru).

Abstract: In the article the static problem of resource allocation in a three-level control system is considered. The impact of corruption mechanism on the economic system, the objective function of the participants and their strategies are investigated. The abilities and ways against corruption in the case of implying compulsion and impulsion mechanisms are estimated. Compulsion and impulsion equilibriums are found. The ability of fight against corruption in the case of "interested" top-level is proved.

Keywords: resource allocation, Γ_2 game, Germeier theorem, impulsion, compulsion.