

УДК 519.63 + 519.246

ББК 22.161.6 + 22.193 + 22.171

## **СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВАМИ ТРАЕКТОРИЙ, ОПИСЫВАЕМЫМИ СЛУЧАЙНОЙ СМЕСЬЮ ЭРЛАНГОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ<sup>1</sup>**

**Кожевников А. С.<sup>2</sup>, Рыбаков К. А.<sup>3</sup>**

*(Московский авиационный институт, Москва)*

*В статье рассматриваются стохастические системы управления с импульсными воздействиями, которые образуют гиперэрланговские потоки событий и приводят к разрывам траекторий системы. Решается задача нахождения плотности вероятности вектора состояния. В основе решения лежит использование спектральной формы математического описания систем управления.*

Ключевые слова: гиперэрланговское распределение, задача анализа, скачкообразный процесс, спектральный метод, стохастическая система.

### **1. Введение**

Многие окружающие нас явления и закономерности (природные, технические, экономические и т.п.) имеют случайный характер, что позволяет описывать их случайными процессами. Математические модели, заданные в рамках этого подхода, применяются в социологических и демографических исследованиях, для имитации экономической конкуренции и ценообразо-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).

<sup>2</sup> Александр Сергеевич Кожевников, аспирант ([exequit@yandex.ru](mailto:exequit@yandex.ru)).

<sup>3</sup> Константин Александрович Рыбаков, кандидат физико-математических наук, доцент ([rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)).

вания, при описании действия лекарственных препаратов и распространения эпидемий, при анализе процессов в сложных технических системах [1, 5, 16, 17]. Эти явления могут рассматриваться в различных масштабах времени, и поэтому изменения величин, описывающих состояние процесса, можно разделить на диффузионные (малые случайные изменения) и скачкообразные (изменения, связанные с разрывом траектории процесса). Таким образом, многие явления и процессы можно описать с помощью стохастических дифференциальных уравнений с диффузионной и скачкообразной компонентами.

В работе предлагается модель стохастической системы управления, в которой моменты появления разрывов (скачков) траекторий образуют гиперэрланговский поток событий и генерируется два типа скачков, имеющих различные законы распределения величины скачка и распределения интервалов времени между скачками. Использование гиперэрланговского закона распределения (смеси эрланговских законов [7]), позволяет расширить спектр решаемых прикладных задач. Для анализа таких стохастических систем управления разработан метод, основанный на разложении функций в ряд по ортонормированному базису [9, 13–15]. Этот метод является развитием подхода, применяемого для более простых стохастических систем [6, 8].

## 2. Постановка задачи

Будем предполагать, что поведение модели системы управления описывается случайным процессом в непрерывном времени, являющимся аддитивной смесью диффузионного и специального скачкообразного процессов и удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению Ито [10]:

$$(1) \quad dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

в котором  $X \in R^n$  – вектор состояния;  $t \in T$ ,  $T = [t_0, t_1]$  – заданный отрезок времени функционирования системы;  $f(t, x): T \times R^n \rightarrow R^n$  – вектор-функция размеров  $n \times 1$ ;  $\sigma(t, x): T \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$  – матричная функция размеров  $n \times s$ ;  $W(t)$  –  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, который не зависит от на-

чального состояния  $X_0$ , определяемого заданной плотностью вероятности  $\varphi_0(x)$ .

Случайный процесс  $Q(t)$  представляется в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} (\xi_i Y_1(\tau_i) + (1 - \xi_i) Y_2(\tau_i)),$$

где  $J(t)$  – гиперэрланговский процесс, ассоциированный со случайным потоком событий [1, 2], состоящих в том, что вектор состояния  $X$  получает приращения  $Y_1(\tau_i) \in R^n$  или  $Y_2(\tau_i) \in R^n$  в случайные моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$ . Случайный вектор  $Y_1(\tau_i)$  характеризуется плотностью вероятности  $q_1(t, y)$ , а случайный вектор  $Y_2(\tau_i)$  – плотностью вероятности  $q_2(t, y)$ ;  $t = \tau_i$ . Выбор приращения  $Y_1(\tau_i)$  или  $Y_2(\tau_i)$  зависит от случайной величины  $\xi_i$ , принимающей значения 1 с вероятностью  $\lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$  и 0 с вероятностью  $\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$  (случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  имеют распределение Бернулли):

$$X(\tau_i - 0) = X(\tau_i) + \begin{cases} Y_1(\tau_i), & \xi_i = 1 \\ Y_2(\tau_i), & \xi_i = 0 \end{cases}.$$

Заданные положительные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а также натуральные числа  $N_1$  и  $N_2$  определяют гиперэрланговский закон распределения промежутков времени  $\dots, i = 1, 2, \dots$  ( $\tau_0 = t_0$ ), который является эрланговским с параметрами  $\lambda_1$  и  $N_1$ , если  $\xi_i = 1$ , или эрланговским с параметрами  $\lambda_2$  и  $N_2$ , если  $\xi_i = 0$  [3]. Случайные величины  $\xi_i$  независимы, поэтому выбор закона распределения для случайного приращения –  $q_1(t, y)$  или  $q_2(t, y)$  – в момент времени  $\tau_i$  не зависит от предыстории.

Возможно и другое описание схемы появления событий (разрывов в траекториях вектора состояния). Для этого рассмотрим случайный процесс  $K(t)$  с конечным множеством состояний  $\{1, 2, \dots, N\}$ , где  $N = N_1 + N_2 - 1$ . Интенсивности переходов задаются следующим образом (см. рис. 1): смена состояний

$1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, N_1 - 1 \rightarrow N_1$  и  $N_1 \rightarrow 1$  происходит с интенсивностью  $\lambda_1$ , а смена состояний  $1 \rightarrow N_1 + 1, N_1 + 1 \rightarrow N_1 + 2, \dots, N - 1 \rightarrow N$  и  $N \rightarrow 1$  – с интенсивностью  $\lambda_2$ ; другие переходы невозможны. При переходе из состояния с номером  $N_1$  в состояние с номером 1 вектор состояния  $X$  получает случайное приращение  $Y_1(\tau_i)$ , а при переходе из состояния с номером  $N$  в состояние с номером 1 – случайное приращение  $Y_2(\tau_i)$ , что соответствует разрыву (скачку) траектории процесса  $X(t)$  (см. рис. 2).

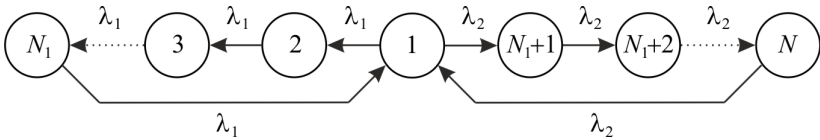


Рис. 1. Граф состояний случайного процесса  $K(t)$

Если предположить, что  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ , то  $J(t)$  будет эрланговским процессом порядка  $N_1$ , а процессу  $K(t)$  будет соответствовать кольцевой граф состояний (аналогично при  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ). Этот случай рассмотрен в работе [6].

Заметим, что постановка задачи может быть изменена с предположением, что интенсивности  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  зависят от времени, т.е.  $\lambda_1 = \lambda_1(t), \lambda_2 = \lambda_2(t)$ . Далее будем рассматривать именно такой вариант.

Таким образом, рассматривается стохастическая система с расширенным вектором состояния, непрерывная часть которого –  $X$ , а дискретная –  $K \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Тогда плотность вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора  $X$  может быть представлена в виде суммы:

$$\varphi(t, x) = \sum_{k=1}^N \varphi^{(k)}(t, x),$$

где функции  $\varphi^{(k)}(t, x)$  удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова [1, 4, 9, 10]:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi^{(1)}(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(1)}(t, x) - (\lambda_1(t) + \lambda_2(t))\varphi^{(1)}(t, x) + \lambda_1(t) \int_{R^n} q_1(t, x - z)\varphi^{(N_1)}(t, z)dz + \lambda_2(t) \int_{R^n} q_2(t, x - z)\varphi^{(N)}(t, z)dz,$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi^{(k)}(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(k)}(t, x) - \lambda_1(t)\varphi^{(k)}(t, x) + \lambda_1(t)\varphi^{(k-1)}(t, x),$$

$k = 2, \dots, N_1,$

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi^{(N_1+1)}(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(N_1+1)}(t, x) - \lambda_2(t)\varphi^{(N_1+1)}(t, x) + \lambda_2(t)\varphi^{(1)}(t, x),$$

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi^{(k)}(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(k)}(t, x) - \lambda_2(t)\varphi^{(k)}(t, x) + \lambda_2(t)\varphi^{(k-1)}(t, x),$$

$k = N_1 + 2, \dots, N,$

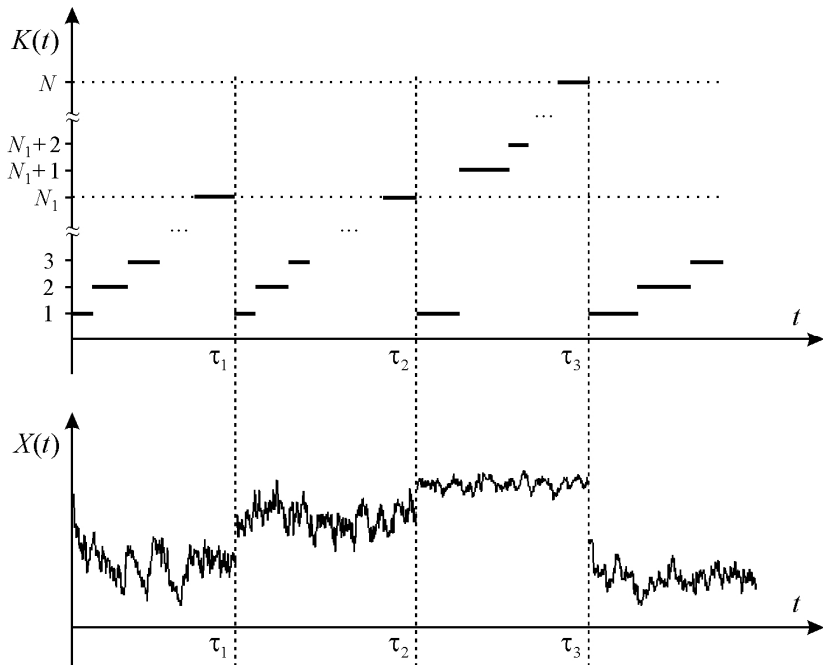


Рис. 2. Выборочные траектории процессов  $K(t)$  и  $X(t)$

в которой

$$(6) \quad \begin{aligned} A\varphi^{(k)}(t, x) = & -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ f_i(t, x)\varphi^{(k)}(t, x) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ g_{ij}(t, x)\varphi^{(k)}(t, x) \right], \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ g_{ij}(t, x) = & \sum_{r=1}^s \sigma_{ir}(t, x)\sigma_{jr}(t, x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Для случайного процесса  $K(t)$  начальное состояние фиксировано:  $K(t_0) = 1$ , поэтому с учетом заданной плотности вероятности  $\varphi_0(x)$  начального состояния  $X_0$  имеем

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi^{(1)}(t_0, x) &= \varphi_0(x), \\ \varphi^{(k)}(t_0, x) &= 0, \quad k = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Последние два слагаемых в правой части уравнения (2) для дальнейших рассуждений целесообразно представить в операторной форме:  $\mathcal{H}_r \varphi^{(N)}(t, x)$ , определив

$$(8) \quad \mathcal{H}_r \varphi(t, x) = \lambda_r(t) \int_{R^n} q_r(t, x-z)\varphi(t, z) dz, \quad r = 1, 2,$$

для всех допустимых функций  $\varphi(t, x)$ ;  $\mathcal{H}_r$  – линейный оператор, а именно композиция оператора умножения на функцию  $\lambda_r(t)$  и оператора Фредгольма с ядром  $q_r(t, x-z)$ .

Задача анализа стохастической системы управления, описываемой уравнением (1), заключается в нахождении плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния  $X$ .

Далее предполагается, что при заданных функциях  $f(t, x)$ ,  $\sigma(t, x)$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $q_1(t, y)$ ,  $q_2(t, y)$  и  $\varphi_0(x)$  существует единственное решение задач (1) и (2)–(5). Условия на функции  $f(t, x)$ ,  $\sigma(t, x)$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ , начальное состояние  $X_0$  и определение обобщенного решения системы уравнений (2)–(5) даны, например, в [18].

### 3. Применение спектральной формы математического описания

Сведем задачу анализа к поиску коэффициентов разложения  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$  функции  $\varphi(t, x)$  по ортонормированным функциям в пространстве  $L_2(T \times R^n)$ . Обозначим полную систему ортонормированных функций  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ , предполагая, что они представляются в виде произведения

$$e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, \dots, i_n, x), \quad i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots,$$

причем функции  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  и  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  образуют полные ортонормированные системы в пространствах  $L_2(T)$  и  $L_2(R^n)$  соответственно.

Применим спектральное преобразование [8] к системе уравнений (2)–(5) с учетом условий (7), тогда

$$\begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) = \\ (9) \quad & = A(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0) - (\Lambda_1(n+1, n+1) + \\ & + \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0) + H_1(n+1, n+1) \cdot \\ & \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0) + H_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) - \\ (10) \quad & - \Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) + \Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \\ & k = 2, \dots, N_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \\ (11) \quad & \cdot \Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0) - \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0) + \\ & + \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) - \\ (12) \quad & - \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) + \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \\ & k = N_1 + 2, \dots, N. \end{aligned}$$

В этих соотношениях  $P(n+1, n+1)$  – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом

значения функции в начальный момент;  $A(n+1, n+1)$ ,  $H_1(n+1, n+1)$  и  $H_2(n+1, n+1)$  – спектральные характеристики операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_2$ , определенных выражением (8);  $\Lambda_1(n+1, n+1)$  и  $\Lambda_2(n+1, n+1)$  – спектральные характеристики операторов умножения на функции  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$  соответственно;  $\Phi^{(k)}(n+1, 0)$  – спектральные характеристики функций  $\varphi^{(k)}(t, x)$ ,  $k=1, 2, \dots, N$ . Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно системы функций  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ . Далее,  $q(1, 0; t_0)$  – матрица-столбец значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  в точке  $t_0$ ;  $\Phi_0(n, 0)$  – спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi_0(x)$  начального состояния  $X_0$ , определенная относительно системы функций  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ .

Спектральная характеристика  $\Phi(n+1, 0)$  плотности вероятности  $\varphi(t, x)$ , называемая также обобщенной характеристической функцией [7, 8, 13], выражается следующим образом ( $\Phi(n+1, 0)$  – многомерная гиперстолбцовая матрица, образованная искомыми коэффициентами разложения  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ ):

$$(13) \quad \Phi(n+1, 0) = \sum_{k=1}^N \Phi^{(k)}(n+1, 0).$$

В основе соотношений (9)–(12) лежат определения, форма представления и свойства спектральных характеристик функций и линейных операторов, подробно изложенные в [9, 13, 15]. Определение спектральной характеристики, аналогичной  $H_1(n+1, n+1)$  и  $H_2(n+1, n+1)$ , дано в [6, 9]. В этих же работах приведено представление спектральной характеристики  $A(n+1, n+1)$  с помощью спектральных характеристик операторов дифференцирования и умножения.

Система уравнений (9)–(12) – это система линейных матричных уравнений относительно неизвестных спектральных характеристик  $\Phi^{(k)}(n+1, 0)$ , или система линейных неоднород-



ных алгебраических уравнений относительно элементов матриц  $\Phi^{(k)}(n+1, 0)$ , т.е. коэффициентов разложения функций  $\varphi^{(k)}(t, x)$  по функциям  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ . Перейдем к решению этой системы.

Из уравнений (10)–(12) следует, что

$$\begin{aligned} & (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda_1(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) = \\ & = \Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \quad k = 2, \dots, N_1, \\ & (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \\ & \cdot \Phi^{(N_1-1)}(n+1, 0) = \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(1)}(n+1, 0), \\ & (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0) = \\ & = \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \quad k = N_1 + 2, \dots, N, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \Phi^{(k-1)}(n+1, 0) &= \Lambda_1^{-1}(n+1, n+1) (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \\ &+ \Lambda_1(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = 2, \dots, N_1, \\ \Phi^{(1)}(n+1, 0) &= \Lambda_2^{-1}(n+1, n+1) \cdot (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \\ &+ \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(N_1-1)}(n+1, 0), \\ \Phi^{(k-1)}(n+1, 0) &= \Lambda_2^{-1}(n+1, n+1) (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \\ &+ \Lambda_2(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = N_1 + 2, \dots, N, \end{aligned}$$

или кратко

$$\begin{aligned} \Phi^{(k-1)}(n+1, 0) &= W_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = 2, \dots, N_1, \\ \Phi^{(1)}(n+1, 0) &= W_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0), \\ \Phi^{(k-1)}(n+1, 0) &= W_2(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = N_1 + 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_1(n+1, n+1) &= \Lambda_1^{-1}(n+1, n+1) \cdot (P(n+1, n+1) - \\ &- A(n+1, n+1) + \Lambda_1(n+1, n+1)), \\ W_2(n+1, n+1) &= \Lambda_2^{-1}(n+1, n+1) \cdot (P(n+1, n+1) - \\ &- A(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Phi^{(1)}(n+1, 0) = W_1^{k-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0),$$

$$\Phi^{(k)}(n+1, 0) = W_1^{N_1-k}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0), \quad k=1, \dots, N_1,$$

$$\Phi^{(1)}(n+1, 0) = W_2^{k-N_1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0),$$

$$\Phi^{(k)}(n+1, 0) = W_2^{N-k}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0), \quad k=N_1+1, \dots, N,$$

в частности

$$(14) \quad \Phi^{(1)}(n+1, 0) = W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0),$$

$$(15) \quad \Phi^{(1)}(n+1, 0) = W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0).$$

Значит

$$(16) \quad \begin{aligned} W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0) = \\ = W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0), \end{aligned}$$

т.е.

$$(17) \quad \begin{aligned} \Phi^{(N_1)}(n+1, 0) = [W_1^{N_1-1}(n+1, n+1)]^{-1} \cdot \\ \cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0), \end{aligned}$$

или

$$(18) \quad \begin{aligned} \Phi^{(N)}(n+1, 0) = [W_2^{N_2-1}(n+1, n+1)]^{-1} \cdot \\ \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0). \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (10) с учетом (14)–(16):

$$\begin{aligned} (\Lambda_1(n+1, n+1) \cdot W_1^{N_1}(n+1, n+1) + \Lambda_2(n+1, n+1) \cdot \\ \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1) - H_1(n+1, n+1) - H_2(n+1, n+1) \cdot \\ \cdot [W_2^{N_2-1}(n+1, n+1)]^{-1} \cdot W_1^{N_1-1}(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0) = \\ = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (\Lambda_2(n+1, n+1) \cdot W_2^{N_2}(n+1, n+1) + \Lambda_1(n+1, n+1) \cdot \\ \cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1) - H_2(n+1, n+1) - H_1(n+1, n+1) \cdot \\ \cdot [W_1^{N_1-1}(n+1, n+1)]^{-1} \cdot W_2^{N_2-1}(n+1, n+1)) \cdot \Phi^{(N)}(n+1, 0) = \\ = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0), \end{aligned}$$

следовательно,

*Рубрика Сборника (окончательно выбирается редактором)*

$$\begin{aligned} \Phi^{(N_1)}(n+1,0) &= \left( \Lambda_1(n+1,n+1) \cdot W_1^{N_1}(n+1,n+1) - H_1(n+1,n+1) \right) + \\ &+ \{ \Lambda_2(n+1,n+1) - H_2(n+1,n+1) \cdot [W_2^{N_2-1}(n+1,n+1)]^{-1} \} \cdot \\ &\cdot W_1^{N_1-1}(n+1,n+1) \Big)^{-1} \cdot (q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0)), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi^{(N)}(n+1,0) &= \left( \Lambda_2(n+1,n+1) \cdot W_2^{N_2}(n+1,n+1) - H_2(n+1,n+1) \right) + \\ &+ \{ \Lambda_1(n+1,n+1) - H_1(n+1,n+1) \cdot [W_1^{N_1-1}(n+1,n+1)]^{-1} \} \cdot \\ &\cdot W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) \Big)^{-1} \cdot (q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0)). \end{aligned}$$

Выразим спектральную характеристику  $\Phi(n+1,0)$ , принимая во внимание (13):

$$\begin{aligned} \Phi(n+1,0) &= \sum_{k=1}^{N_1} \Phi^{(k)}(n+1,0) + \sum_{k=N_1+1}^N \Phi^{(k)}(n+1,0) = \\ (19) \quad &= \sum_{k=1}^{N_1} W_1^{N_1-k}(n+1,n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1,0) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N_2-1} W_2^{N_2-k-1}(n+1,n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1,0). \end{aligned}$$

В [6] было показано, что

$$\begin{aligned} (20) \quad \sum_{k=1}^N W^{N-k}(n+1,n+1) &= \left( E(n+1,n+1) - W^N(n+1,n+1) \right) \cdot \\ &\cdot \left( E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

поэтому с учетом (17)

$$\begin{aligned} \Phi(n+1,0) &= \left[ \left( E(n+1,n+1) - W_1^{N_1}(n+1,n+1) \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left( E(n+1,n+1) - W_1(n+1,n+1) \right)^{-1} + \\ &+ \left( E(n+1,n+1) - W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) \right) \cdot \\ &\cdot \left( E(n+1,n+1) - W_2(n+1,n+1) \right)^{-1} \cdot \\ &\left. \cdot [W_2^{N_2-1}(n+1,n+1)]^{-1} \cdot W_1^{N_1-1}(n+1,n+1) \right] \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1,0), \end{aligned}$$

или с учетом (18)

$$\begin{aligned} \Phi(n+1,0) = & \left[ \left( E(n+1,n+1) - W_1^{N_1}(n+1,n+1) \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left( E(n+1,n+1) - W_1(n+1,n+1) \right)^{-1} \cdot [W_1^{N_1-1}(n+1,n+1)]^{-1} \cdot \\ & \cdot W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) + \left( E(n+1,n+1) - W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) \right) \cdot \\ & \left. \cdot \left( E(n+1,n+1) - W_2(n+1,n+1) \right)^{-1} \right] \cdot \Phi^{(N)}(n+1,0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi(n+1,0) = & \left[ \left( E(n+1,n+1) - W_1^{N_1}(n+1,n+1) \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left( E(n+1,n+1) - W_1(n+1,n+1) \right)^{-1} + \left( E(n+1,n+1) - \right. \\ & \left. - W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) \right) \cdot \left( E(n+1,n+1) - W_2(n+1,n+1) \right)^{-1} \cdot \\ (21) \quad & \left. \cdot [W_2^{N_2-1}(n+1,n+1)]^{-1} \cdot W_1^{N_1-1}(n+1,n+1) \right] \cdot (\Lambda_1(n+1,n+1) \cdot \\ & \cdot W_1^{N_1}(n+1,n+1) - H_1(n+1,n+1) + \{ \Lambda_2(n+1,n+1) - \\ & - H_2(n+1,n+1) \} \cdot [W_2^{N_2-1}(n+1,n+1)]^{-1}) \cdot \\ & \cdot W_1^{N_1-1}(n+1,n+1))^{-1} \cdot (q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0)), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(n+1,0) = & \left[ \left( E(n+1,n+1) - W_1^{N_1}(n+1,n+1) \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left( E(n+1,n+1) - W_1(n+1,n+1) \right)^{-1} \cdot (W_1^{N_1-1}(n+1,n+1))^{-1} \\ & \cdot W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) + \left( E(n+1,n+1) - W_2^{N_2-1}(n+1,n+1) \right) \cdot \\ (22) \quad & \left. \cdot \left( E(n+1,n+1) - W_2(n+1,n+1) \right)^{-1} \right] \cdot (\Lambda_2(n+1,n+1) \cdot \\ & \cdot W_2^{N_2}(n+1,n+1) - H_2(n+1,n+1) + \{ \Lambda_1(n+1,n+1) - \\ & - H_1(n+1,n+1) \} \cdot [W_1^{N_1-1}(n+1,n+1)]^{-1}) \cdot \\ & \cdot W_2^{N_2-1}(n+1,n+1))^{-1} \cdot (q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0)), \end{aligned}$$

– решение рассматриваемой задачи в спектральной форме математического описания.

Для нахождения решения задачи анализа в пространстве функций времени и вектора состояния требуется применить формулу обращения [9]:

*Рубрика Сборника (окончательно выбирается редактором)*

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (t, x) \in T \times R^n.$$

Обычно приближенно определяется конечное число коэффициентов  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ , поскольку задача нахождения всех коэффициентов разложения не является тривиальной. В этом случае бесконечные матрицы в (9)–(13) заменяются конечными матрицами, тогда

$$\varphi(t, x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x),$$

где натуральные числа  $L_0, L_1, \dots, L_n$  – выбранные порядки усечения спектральных характеристик, влияющие на точность решения.

#### **4. Заключение**

В работе рассмотрено применение спектральной формы математического описания к задаче вероятностного анализа стохастических систем, которые характеризуются наличием разрывов (скачков) траекторий, образующих гиперэрланговский поток событий, получены соотношения для нахождения плотности вероятности вектора состояния в спектральной форме математического описания систем управления. Использование гиперэрланговских потоков дает возможность учитывать более сложный характер поведения траекторий вектора состояния, а применение спектральной формы математического описания позволяет свести систему интегро-дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомой плотности вероятности по некоторой полной ортонормированной системе функций.

Рассмотренный подход существенно упрощает процесс решения задачи, делая его удобным для применения современных высокопроизводительных вычислительных систем.

## Литература

1. АРТЕМЬЕВ В.М., ИВАНОВСКИЙ А.В. *Дискретные системы управления со случайным периодом квантования*. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
2. БОЛЬШАКОВ И.А., РАКОШИЦ В.С. *Прикладная теория случайных потоков*. – М.: Советское радио, 1978.
3. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Теория вероятностей и ее инженерные приложения*. – М.: Наука, 1988.
4. КАЗАКОВ И.Е., АРТЕМЬЕВ В.М., БУХАЛЕВ В.А. *Анализ систем случайной структуры*. – М.: Физматлит, 1993.
5. КОЖЕВНИКОВ А.С. *Программное обеспечение для статистического моделирования и анализа случайных процессов со скачками, описывающих динамику цен акций предприятий авиационной отрасли* // Труды МАИ. – 2012. – № 59. – <http://www.mai.ru/science/trudy/>.
6. КОЖЕВНИКОВ А.С., РЫБАКОВ К.А. *Анализ нелинейных стохастических систем управления с импульсными воздействиями, образующими эрланговские потоки событий* // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2012. – № 184 (10). – С. 37–45.
7. КОСТЫЛЕВ В.И. *О композиции гамма-статистик* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия «Физика. Математика». – 2000. – № 1.
8. ПАНТЕЛЕЕВ А.В., РЫБАКОВ К.А. *Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 2. – С. 183–194.
9. ПАНТЕЛЕЕВ А.В., РЫБАКОВ К.А., СОТСКОВА И.Л. *Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления*. – М.: Вузовская книга, 2006.
10. ПУГАЧЕВ В.С., СИНИЦЫН И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*. – М.: Наука, 1990.
11. РОМАНОВ В.А., РЫБАКОВ К.А. *Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита* //

- Труды МАИ. – 2010. – № 39. – <http://www.mai.ru/science/trudy/>.
12. РЫБАКОВ К.А. *Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления.* – 2012. – № 1. – С. 114–141. – <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
  13. РЫБИН В.В. *Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики.* – М.: Изд-во МАИ, 2011.
  14. СЕМЕНОВ В.В. *Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов.* Вып. 2: Межвуз. науч. сб. – Саратов: СПИ, 1977. – С. 3–36.
  15. СОЛОДОВНИКОВ В.В., СЕМЕНОВ В.В. *Спектральная теория нестационарных систем управления.* – М.: Наука, 1974.
  16. ТИХОНОВ В.И., МИРОНОВ М.А. *Марковские процессы.* – М.: Советское радио, 1977.
  17. HANSON F.B. *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions.* – SIAM, 2007.
  18. RYBAKOV K.A., SOTSKOVA I.L. *Spectral method for analysis of switching diffusions // IEEE Transactions on Automatic Control.* – 2007. – Vol. 52, № 7. – P. 1320–1325.

**SPECTRAL METHOD FOR STOCHASTIC SYSTEMS  
WITH A DISCONTINUOUS TRAJECTORIES DESCRIBED  
BY A RANDOM MIXTURE OF ERLANG DISTRIBUTION**

**Alexander Kozhevnikov**, Moscow aviation institute, graduate student (exequit@yandex.ru).

**Konstantin Rybakov**, Moscow aviation institute, Cand.Sc., assistant professor (rkoffice@mail.ru).

*Abstract: The article deals with the stochastic control systems with the impulses which generated by hyper-Erlang flows of events and lead to discontinuities of the system trajectories. We solve the problem of finding the probability density function for the system state. The solution is based on using the spectral form of mathematical description.*

Keywords: analysis, jump process, spectral method, stochastic system, hyper-Erlang distribution.