УДК 519
ББК 32.81

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭФФЕКТИВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ МЕХАНИЗМА ГРОВСА-ЛЕЙДЯРДА ПРИ ТРАНСФЕРАБЕЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ[1]

Коргин Н.А.[2],
(*Федеральное государственное учреждение науки Институт проблем управления им В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва
Московский Физико-технический институт, Москва*)
Корепанов В.О.[3]
(*Федеральное государственное учреждение науки Институт проблем управления им В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва*)

Решается задача разработки механизма распределения ограниченных ресурсов, эффективного в смысле максимизации суммарной полезности получателей ресурсов в условиях, когда возможна передача полезности между ними. В качестве решения предлагается адаптация механизма Гровса-Лейдярда, первоначально предложенного для решения задачи определения объема выпуска коллективного блага.

---

[1] *Работа при поддержке РФФИ, грант № 12-07-3124412*

[2] *Коргин Николай Андреевич, кандидат технических наук, доцент* (*nkorgin@ipu.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д.* 65, *тел.* (495) *335-60-37*)
[3] *Корепанов Всеволод Олегович, кандидат технических наук* (*Москва, ул. Профсоюзная, д.* 65, *тел.* (495) *334-79-00*)

Ключевые слова: дизайн механизмов, реализация по Нэшу, распределение ресурсов.

1. Введение

Одной из ключевых проблем в теории управления в социальных и экономических системах является проблема минимизации потерь из-за отсутствия полной информации, необходимой для принятия управленческих решений. При этом специфика социально-экономических систем позволяет выделить отдельный класс задач – в которых необходимая информация для принятия решений недоступна лицу, принимающему решения, но доступна другим участникам системы, интересы которых затрагивают принимаемые решения – задачи принятия решений в условиях неполной асимметричной информированности [10]. Для данного класса задач исследуется возможность разработки механизмов в которых лицо, принимающее решение, получает необходимую для этого информацию от остальных участников системы, и которые позволяют получать эффективные решения – при которых достигается максимальная суммарная полезность всех участников системы .

В рамках современной теории разработки механизмов принятия решений в социально-экономических системах (mechanism design) можно выделить два класса задач – разработку механизмов в условиях нетрансферабельной полезности, когда передача полезности между участниками системы не возможна, и в условиях трансферабельной полезности – когда возможна передача полезности между участниками системы.

При этом, классическим результатом, например [1,24], является тот факт, что для первого класса задач за счет передачи информации от участников системы к ЛПР не возможно обеспечить ту же эффективность принятия решений, что и в условиях полной информированности ЛПР о необходимых параметрах системы. В то время как для второго класса задач это возможно – эффективность механизмов в условиях неполной асимметричной информированности может быть не ниже, чем в условиях полной информированности.

Исследования в области разработки эффективных механизмов для второго класса задач были начаты еще в семидесятых годах прошлого столетия [17, 19, 29]. Но, все эти механизмы имели определенные недостатки, затрудняющие их практическую реализацию.

В частности, механизм Гровса-Лейдярда [17] не гарантировал индивидуальной рациональности получаемого решения, т.к. оно не являлось равновесием Линдаля. Механизм Гурвича [19] использовал структуру сообщений от участников системы ЛПР, затрудняющее его практическую реализацию. Механизм Волкера [29] давал неустойчивое решение. Кроме того, эффективные решения в последних двух механизмах не могли быть достигнуты в рамках обучающей динамики – т.е. их реализация на практике была крайне затруднительна.

В данный момент наблюдается очередная волна интереса к данной проблеме – появился целый ряд новых публикаций, содержащих результаты теоретических исследований и имитационных экспериментов – см., например [11, 18, 25, 28]. В основном, исследования сосредоточены на разработке механизмов, реализующих равновесие Линдаля при определении уровня производства коллективного блага. При этом, общим недостатком большинства предлагаемых в данных работах механизмов являются:

1. сложные сообщения от участников системы к ЛПР
2. несбалансированность побочных платежей при неравновесных заявках

Задача распределения ограниченных ресурсов с помощью нерыночных механизмов при нетрансферабельной полезности рассматривалась как отечественными авторами, например [1, 9], так и зарубежными – [12, 27]. При этом, практическая актуальность разработки таких механизмов является актуальной и на данный момент – см., например [16, 23].

Публикации, посвященные построению эффективных механизмов распределения ресурсов при наличии трансферабельной полезности в основном рассматривают эту задачу для моделей мультиагентных систем со сложной сетевой структурой. В первую очередь, исследуются т.н. «аукционные подходы» определения приоритетности потребителей (см., например [13]) в которых распределение ресурсов определяется на основе того, кто из претендентов назовет большую цену за единицу ресурса, по которой он готов компенсировать остальным претендентам то количество ресурса, которое они недополучают. Однако основной акцент в этих моделях делается на сложные процедуры распределения ресурсов на сетевых структурах [20, 22], а сами механизмы строятся на основе подходов к построению неманипулируемых механизмов (Викри-Гровса-Кларка) [21].

Так же исследования ведутся в направлении построения «квази»-оптимальных механизмов, которые могут реализовывать почти оптимальное распределение ресурсов, см, например [24].

Отдельным направлением следует выделить работы в области построения процедур распределенной оптимизации, где в последнее время были получены результаты, очень тесно пересекающиеся с теорией разработки механизмов [14]. Однако, в настоящее время эти итеративные процедуры не представлены в форме механизмов, что не позволяет исследовать их теоретико-игровые свойства.

Наиболее близкой к предлагаемым авторами в данной статье подходу можно считать работу [18], в которой был предложен механизм, реализующий равновесие Вальраса при распределении индивидуальных благ. Но:

1. предложенное ими решение не позволяет учитывать ограниченность распределяемого ресурса
2. механизм обладает все той же сложной структурой заявок, о которой уже упоминалось выше

Нами предлагается развитие механизма Гровса-Лейдярда, предложенное в [7] для решения задачи активной экспертизы при трансферабельной полезности. В частности, было показано, что в рамках решения задачи активной экспертизы механизм Гровса-Лейдярда является индивидуально рациональным (что являлось, пожалуй, его ключевым недостатком при решении задач определения уровня коллективного блага). Данный механизм предполагается адаптировать для задачи распределения ресурсов, т.к. можно предположить что механизм распределения ресурсов так же будет реализовывать индивидуально-рациональные решения и можно будет обеспечить сбалансированность трансферов как в эффективном решении, так и вне его.

В основе адаптации лежит идея представления задачи распределения ресурсов как многокритериальной задачи активной экспертизы, целесообразность и продуктивность которой была продемонстрирована в [6] для задачи распределения ресурсов при нетрансферабельной полезности. Суть идеи очень проста - задачу распределения ресурсов предлагается трактовать не как задачу распределения индивидуальных благ, а как задачу многокритериального выбора, в которой каждый из агентов может сообщить, каким он хочет видеть значение многокритериального коллективного блага – распределения ресурсов между всеми агентами.

Структура дальнейшего изложения такова. В разделе 1 описываются формальная постановка задачи эффективного распределения ресурсов (максимизирующего сумму полезностей всех агентов) и модель, для которой ищется решение этой задачи. В разделе 2 описывается предлагаемый механизм распределения ресурсов на основе многокритериального голосования и доказывается, что он реализует эффективное распределение ресурсов между агентами. Раздел 3 посвящен описанию процесса итеративных переговоров на основе предлагаемого механизма, который предполагается применять в условиях, когда каждый агент может не обладать полной информацией о функциях полезности всех претендентов на ресурс. В разделе 4 исследуется построение «редуцированной» версии предложенного механизма – в которой каждый агент будет сообщать только то, сколько ресурса он хочет получить сам. Раздел 5 посвящен описанию системы, предназначенной для экспериментальной апробации разработанного механизма и описывает результаты нескольких пробных игр.

2. Постановка задачи и основные определения

Формально, задача распределения ресурсов записывается следующим образом. *Организационная система* состоит из одного *центра* и множества $N = \{1,\ldots,n\}$ *агентов*. У центра имеются ресурсы в ограниченном количестве - $R \in \mathbb{R}^1_+$, которые могут быть распределены между агентами в любой пропорции.

Полезность каждого агента $i \in N$ относительно количества выделяемых ему ресурсов $x_i \in [0, R]$ определяется функцией $u_i(\bullet)$: $\mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$, принадлежащей некоторому множеству допустимых функций полезности U_i.

Обозначим множество допустимых распределений ресурса как

$$A = \{x = (x_1,\ldots,x_n) : \sum_{i\in N} x_i \le R,\ x \in \mathbb{R}^n_+\},$$

множество возможных *профилей полезности* агентов как

$$U = \{u = (u_1(\bullet),\ldots,u_n(\bullet)) : u_i(\bullet) \in U_i, i \in N\}.$$

«Базовая» задача заключается в нахождении такого отображения $g(\bullet): U \to A$, которое является *утилитарно* эффективным, т.е. максимизирует суммарную полезность всех агентов от распределенного ресурса для любого из возможных профилей полезности $u \in U$:

(1) $g(u) \in Arg\max\limits_{x\in A} \sum\limits_{i\in N} u_i(x_i)$.

Однако, даже, если решение (1) существует, может оказаться, что оно *манипулируемо* [10] (или *несовместимо со стимулами*, см., например [24]). Т.е. $\exists u \in U$ и $\exists k \in N$ что найдется профиль полезности $\tilde{u} = (\tilde{u}_k, u_{-k}) \in U$ такой, что

$$u_k(g_k(\tilde{u})) > u_k(g_k(u)),$$

где u_{-k} - профиль полезности всех агентов за исключением k и $u = (u_k, u_{-k})$, а $g_k(u)$ - количество ресурса, выделяемое агенту k при профиле полезности u.

В рамках данной статьи будем рассматривать следующее множество профилей полезности $\widehat{U}$:

1. функция полезности любого агента вогнута, не убывает и C^2;
2. $\forall u \in \widehat{U}$ решение задачи (1) является внутренним.

Очевидно, что в рамках данных предположений решение задачи (1) будет существовать и будет единственным, что позволит сосредоточиться на проблеме совместимости со стимулами. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть полезность каждого из агентов описывается функцией вида

$$u_i(x) = \sqrt{r_i + x_i}, \ i \in N,$$

где r_i - собственные «резервы» агента i, известные лишь ему. Тогда максимум суммарной полезности всех агентов будет достигаться при выделении каждому агенту ресурса в количестве

$$x_i = (R + \sum_{i \in N} r_i) / n - r_i, \ i \in N.$$

Т.е. для решения задачи (1) от агента необходимо получить информацию о значении r_i. Очевидно, что если агента спросить о значении r_i, то ему будет выгодно не сообщать правду, а занизить сообщаемое значение. Что и означает, что полученное правило эффективного распределения ресурсов не совместимо со стимулами агентам достоверно раскрывать информацию о своей функции полезности. ■[1]

Будем называть *механизмом* набор $\rho = < S, \pi, t >$, где $S = \times_{i \in N} S_i$ - некоторое множество допустимых действий агентов, $\pi(\bullet) : S \to A$ - некоторая процедура, отображающая действия агентов в множество допустимых распределений ресурсов $t(\bullet) : S \to \mathbb{R}^n$ - некоторая процедура *трансфера* полезностей агентов. Обозначим $\Gamma(\rho) = < N, S, \varphi_{u,\rho} >$ - игру, *индуцированную механизмом,* где $\varphi_{u,\rho} = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ - профиль предпочтений агентов, определяемый на основе их профиля полезности $u \in U$ и процедур $\pi(\bullet)$ и $t(\bullet)$: $\varphi_i(s) = u_i(\pi(s)) - t_i(s)$, $i \in N$.

В рамках данной статьи рассматривается следующая постановка задачи распределения ресурсов – возможно ли найти механизм, который позволит *реализовать по Нэшу* эффективное распределение ресурсов в случае, если решение задачи (1) не совместимо со стимулами – т.е. $\forall u \in U$ в игре будет единственное равновесие Нэша $s^*(u) \in S$:

$\forall i \in N$, $\forall \tilde{s}_i \in S_i$ $\varphi_i(s^*(u)) > \varphi_i(\tilde{s}_i, s^*_{-i}(u))$,

такое, что $\pi(s^*(u)) = g(u)$;

Кроме того, сам механизм можно считать эффективным, только если $\sum_{i \in N} \varphi_i(s^*(u)) = \sum_{i \in N} u_i(g(u))$. Что подразумевает *сбалансированность платежей* - $\sum_{i \in N} t_i(s^*(u)) = 0$.

[1] Здесь и далее будем подобным образом обозначать конец примеров

3. Применение механизма Гровса-Лейдярда для решения задачи распределения ресурсов

Рассмотрим следующий механизм $\rho = < S, \pi, t >$. Каждый агент $i \in N$ сообщает, каким он видит распределение ресурсов в системе, причем от любого из агентов он может потребовать «пополнить» ресурс. Требуется лишь, что бы предлагаемое распределение удовлетворяло первоначальному ресурсному ограничению:

$$S_i = \{s_i \in \mathbb{R}^n : \sum_{j \in N} s_{ji} \le R\}, \; S = \times_{i \in N} S_i$$

Процедура $\pi(s) = \{x_1(s), ..., x_n(s)\}$ усредняет заявки всех агентов:

$$x_i(s) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}, \; i \in N .$$

Трансферы агентов определяются следующим образом

$$t_i(s) = p_i(s) - \frac{\alpha}{n} \sum_{j=1}^{n} p_j(s),$$

где

$$p_i(s) = \beta \sum_{j=1}^{n} (x_j(s) - s_{ji})^2 .$$

Параметр $\beta \ge 0$ - можно трактовать, как *силу штрафов*, $\alpha \in [0,1]$ - *балансировочный коэффициент*, т.к. если $\alpha = 1$, то трансферы всегда сбалансированы - $\forall s \in S$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(s) = 0 .$$

Кроме того, при $\alpha = 1$ механизм можно трактовать как «квадратичное правило» Гровса-Лейдярда [11, 17] при отсутствии затрат на производство ресурса.

Опишем некоторые очевидные, но полезные для дальнейшего исследования свойства данного механизма и индуцированной им игры $\Gamma(\rho)$.

Обозначим $s_{-i} \in S_{-i}$ - *обстановку* для агента $i \in N$, $S_{-i} = \times_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$. Введем обозначение $br_i(s_{-i}) \in S_i$ - *функцию наилучшего ответа* агента $i \in N$:

$$br_i(s_{-i}) \in Arg \max_{s_i \in S_i} \varphi_i(s_i, s_{-i}).$$

Верны следующие утверждения:

Лемма 1. *Пусть* $n > \alpha + 1$. *Тогда* $\forall u \in \hat{U}$, $\forall i \in N$, $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ $\exists! br_i(s_{-i}) = arg \max_{s_i \in S_i} \varphi_i(s_i, s_{-i})$.

Доказательство леммы 1 и других утверждений приведены в Приложении 1.

Так как в исследуемой игре множества S_i - выпуклые подмн-ва $\mathbb{R}^n$, а функции $\varphi_i(s_i, s_{-i})$ в соответствии с леммой 1 вогнуты по s_i и, по построению, непрерывны по s_{-i}, то в этой игре существуют равновесия по Нэшу, см, например [3].

Важным следствием из леммы 1 является тот факт, что при $n = 2$ принудительная балансировка трансферов не возможна, т.к. допустимы только значения $\alpha < 1$. Кроме того, если исследовать зависимость $br_i(s_{-i})$ от параметров α и β (будем обозначать как $br_i(s_{-i}, \alpha, \beta)$, то $\forall i \in N$, $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ $br_i(s_{-i}, \alpha, \beta) = br_i(s_{-i}, 0, \tilde{\beta})$, где

$$\tilde{\beta} = \beta \frac{n - \alpha - 1}{n - 1}.$$

Обозначим $x_{j-i} = \dfrac{1}{n-1} \sum_{k \in N \setminus \{i\}} s_{jk}$ - количество ресурса, который предлагают выделить агенту $j \in N$ все агенты за исключением агента $i \in N$. Очевидно, что если агент i согласится с «мнением» остального «общества» относительно выделяемого агенту j ресурса, т.е. $s_{ji} = x_{j-i}$, то, в соответствии с процедурой $\pi(s)$, $x_j = x_{j-i}$.

Лемма 2. *Пусть* $n > \alpha + 1$. *Тогда* $\forall u \in \widehat{U}$, $\forall i \in N$, $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ $br_i(s_{-i}) = \{br_{ji}(s_{-i})\}_{j \in N}$ *определяется следующим образом. Обозначим* $\Delta_{ji} = br_{ji}(s_{-i}) - x_{j-i}$, $j \in N$, $A_i = \max\{0; \Delta_{ii} + \sum_{j \in N} x_{j-i} - R\}$. *Тогда* Δ_{ii} *определяется из решения уравнения*

(2) $$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\frac{1}{n}\Delta_{ii} + x_{i-i}\right) = 2\tilde{\beta}\,\frac{n-1}{n}((n-1)\Delta_{ii} + A_i),$$

а $\forall j \in N \setminus \{i\}$ Δ_{ji} $A_i \neq (1-n)$.

Лемма 2 позволяет осуществить поиск равновесных по Нэшу сообщений агентов, как неподвижных точек отображения $BR(\bullet) = \{br_i(s_{-i})\}_{i \in N} : S \to S$, порождаемого функциями наилучшего ответа $br_i(s_{-i}) = \{br_{ji}(s_{-i})\}_{j \in N}$, определенными в ней.

Кроме того, лемма 2 формально обосновывает следующее рациональное поведение агентов в индуцированной игре – если агенту целесообразно просить для себя большее количество ресурса, чем ему предлагает общество, то возникающий от этого дефицит в рамках своей заявки агенту оптимально устранять, уменьшая предлагаемые обществом остальным агентам заявки на одинаковую величину - $\forall j \in N \setminus \{i\}$ $\Delta_{ji} = \Delta_{ii} / (1-n)$. При этом, если в соответствии с заявками остальных агентов, необходимо распределять весь ресурс ($\sum_{j \in N} x_{j-i} = R$), (2) приобретает следующий вид:

(3) $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\frac{1}{n}\Delta_{ii} + x_{i-i}\right) = 2\tilde{\beta}(n-1)\Delta_{ii}$,

и $\Delta_{ji} = \Delta_{ii} / (1-n)$, $j \in N \setminus \{i\}$.

Ведем обозначение $\Delta = \sum_{i \in N} s_{ii}^* - R$ - которое можно интерпретировать, как «дефицит» ресурса в системе – разницу между суммой того, что каждый агент просит выделить себе и доступным количеством ресурса. Через $u_i'^{-1}(\bullet)$ обозначим функцию, обратную к $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\bullet)$.

Утверждение 1. $\forall u \in \widehat{U}$, $\forall \alpha \in [0, \min(1, n-1)]$, $\forall \beta > 0$ *в игре* $\Gamma(\rho)$ *существует единственное равновесие Нэша* $s^* \in S$. *Причем* $\pi(s^*) = \arg\max_{x \in A} \sum_{i \in N} u_i(x_i)$, *где*

$\forall i \in N \; x_i(s^*) = s_{ii}^* - \frac{\Delta}{n}$,

$\forall j \in N \setminus \{i\} \; x_j(s^*) = s_{ji}^* + \frac{\Delta}{n(n-1)}$,

а Δ *является единственным решением уравнения* $\sum_{i \in N} u_i'^{-1}(2\tilde{\beta}\Delta) = R$.

Из утверждения 1 можно получить следующие свойства предложенного механизма. В первую очередь, определим трансферы агентов в равновесии:

(4) $t_i(s^*) = \tilde{\beta}(1-\alpha)\frac{\Delta^2}{n(n-1)}$, $i \in N$

Из (4) наглядно виден тот факт, что трансферы всех агентов при любых значениях параметров механизма одинаковы. Более того в сбалансированном механизме ($\alpha = 1$) в равновесии трансферы отсутствуют. Т.е. механизм позволяет использовать трансферы как «угрозу» - без необходимости их осуществления при достижении эффективного распределения ресурсов.

Один из недостатков механизма Гровса-Лейдярда при применении его в задаче определения выпуска уровня коллективного блага, состоял в том, что решение могло оказаться индивидуально нерациональным для отдельных агентов [17]. Из (4) следует, что, если оптимальное распределение ресурсов является индивидуально рациональным, то и решение игры будет индивидуально рациональным для всех игроков при $\alpha = 1$.

Однако, обеспечить максимум суммарной полезности агентов при применении механизма можно только при $\alpha = 1$[1].

Следствие 1. $\forall u \in \widehat{U}$ $\sum_{i=1}^{n} t_i(s^*) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha = 1$.

Так же, любопытным является тот факт, что в несбалансированном механизме (при $\alpha < 1$) итоговый трансфер для каждого агента уменьшается с ростом силы штрафов, т.к. (4) можно так же записать, как:

$$t_i(s^*) = \frac{(1-\alpha)}{\beta n(n-\alpha-1)} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}^2 (x_i(s^*)),$$

откуда видно, что для заданных $u \in \widehat{U}$ и R размер трансфера определяется только α и β, причем он обратно пропорционален последнему параметру – силе штрафов. Т.е. увеличивая силу штрафов, трансферы агентов так же можно сделать сколь угодно малыми.

---

[1] Если отказаться от требования возрастания функций полезности агентов, то платежи могут оказаться сбалансированы при $\alpha < 1$ если решение задачи (1) будет внутренним.

Таким образом, предложенный механизм позволяет реализовать эффективное распределение ресурсов, как равновесие Нэша, и при сбалансированных платежах является эффективным.

Проиллюстрируем предложенный механизм на конкретном примере.

Пример 2. Пусть 3 агента претендуют на ограниченный ресурс, доступный в количестве $R = 115$. Полезность каждого из агентов описывается функцией из примера 1. Собственные резервы агентов заданы набором $r = \{1; 9; 25\}$, где r_i - резервы агента i, известные лишь ему.

В этом случае эффективным будет распределение $x = \{49; 41; 25\}$, а полезность любого из агентов будет примерно 7,07.

Если применить предложенный механизм с параметрами $\alpha = 1$, $\beta = 0,0005$, то в индуцированной им игре агентов равновесными будут следующие заявки (с точностью до 2ого знака после запятой):

$s_1 = \{80,43;\ 25,29;\ 9,29\}$, $s_2 = \{33,29;\ 72,43;\ 9,29\}$,

$s_3 = \{33,29;\ 25,29;\ 56,43\}$.

Усреднение этих заявок для каждого из агентов дает эффективное распределение ресурса $x = \{49; 41; 25\}$. Т.е. каждый из агентов просит себе примерно на 31,43 большее количество ресурса чем получает, занижая свои заявки для остальных на 15,575.

Увеличение силы штрафов в два раза $\beta = 0,001$ приведет к уменьшению «разногласий» в два раза.

В обоих случаях трансферы агентов будут равны 0.■

4. Исследование сходимости процесса итеративных переговоров на основе предложенного механизма

Реализация равновесия Нэша требует от агентов полной информированности о параметрах индуцированной механизмом игры, что крайне редко встречается в практических задачах распределения ресурсов. Исследуем возможность применения механизма в условиях, когда каждый агент может знать только свою функцию полезности, доступное количество ресурса, общее число агентов и механизм. Для определения распределения ресурсов между ними используется следующий *итеративный процесс переговоров* $I\rho$ на основе предложенного механизма $\rho = < S, \pi, t >$:

$x(\tau) = \pi(s(\tau))$, $\varphi_i(\tau) = u_i(x(\tau)) - t(s(\tau))$,

где $s(\tau) = (s_1(\tau), ..., s_n(\tau)) \in S$ - сообщения агентов на шаге $\tau \geq 1$. Процесс переговоров продолжается до такой итерации T, на которой агенты перестанут менять свои заявки - $s(T-1) = s(T)$.

Для ответа на вопрос – может ли сойтись данный процесс к эффективному распределению за конечное число шагов, необходимо сделать предположения о том, как принимает решения о свей заявке каждый из агентов на каждом из шагов процесса и исследовать его свойства, как свойства дискретного динамического процесса. Примером простейшей гипотезы о принятии решений агентами является *динамика Курно*, в рамках которой каждый агент выбирает свое действие как наилучший ответ на действия всех остальных агентов на предыдущем шаге, см, например [11, 25]:

$s_i(\tau) = br_i(s_{-i}(\tau - 1))$.

Обозначим $\left|s_i(\tau)\right| = \sum_{j \in N} s_{ji}(\tau)$.

Лемма 3. *Если для некоторого* $\tau \geq 1$ $s(\tau) \in S$ *таково, что* $\left|\pi(s(\tau))\right| < R$, *то при поведении агентов в соответствии с динамикой Курно*

$$\left|\pi(s(\tau+1))\right| > \left|\pi(s(\tau))\right|.$$

Если же $\left|\pi(s(\tau))\right| = R$, *то и* $\left|\pi(s(\tau+1))\right| = R$.

Т.е. в рамках динамики Курно, если $s(\tau)$ обеспечивает не полное распределение ресурса, то $s(\tau+1) = br(s(\tau))$ будет увеличивать количество распределяемого ресурса. Если же $s(\tau)$ распределяет ресурсы полностью, то $s(\tau+1) = br(s(\tau))$ так же будет распределять ресурсы полностью.

Проведем анализ итеративного процесса в области $\overline{S} = \{s \in S : \forall i \in N \left|s_i\right| = R\}$. По сути, необходимо проверить, является ли равновесие Нэша притягивающей неподвижной точкой отображения $BR(\bullet)$:

$$\forall \{s, s'\} \in \overline{S}^2 \quad d(s, s') > d(BR(s), BR(s')),$$

где $d(s, s')$ - расстояние в $\overline{S}$ (может быть выбрана произвольная метрика).

Соответственно, если механизм порождает игру, в которой отображение $BR(\bullet)$ сжимающее для некоторого $u \in \widehat{U}$, то он также называется *сжимающим* для данного $u \in \widehat{U}$ [18, 28]. Если механизм является сжимающим, то для целого ряда гипотез поведения агентов, включая динамику Курно, итеративный процесс при заданном профиле полезностей $u \in \widehat{U}$ будет сходиться к $s^*(u)$. В случае нашего механизма ситуация немного сложнее. Обозначим $BR^2(\bullet) = BR(BR(\bullet)) : S \to S$ - «двойное отображение», построенное на основе $BR(\bullet)$

Лемма 4. $\forall u \in \widehat{U}$, *такого, что* $\forall s \in \overline{S}$

$$\max_{i \in N}(-u_i''(x_i(s)) \le C,$$

существует такое

$$\tilde{\beta} \ge \frac{1}{2n}\max_{i \in N}(-u_i''(x_i(s)),$$

что $BR^2(\bullet)$ *является сжимающим отображением.*

Так как отображение $BR^2(\bullet)$ сжимающее, то оно имеет единственную неподвижную точку. Очевидно, что неподвижная точка отображения $BR(\bullet)$, которую мы нашли ранее, будет так же и неподвижной точкой отображения $BR^2(\bullet)$.Поэтому, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. *Эффективное распределение ресурса реализуется в итеративном процессе* $I\rho$ *для любого профиля предпочтений из* $\widehat{U}$, *такого, что* $\max_{i \in N}(-u_i''(x_i(s)) \le C$, *если агенты действуют по динамике Курно.*

К сожалению, результаты по стратегиям поведения агентов, отличным от динамики Курно [8, 11, 25], требует дополнительной проверки для рассматриваемого механизма, т.к. механизм не является сжимающим в классическом определении.

Кроме того, открытым остается вопрос о скорости сходимости итеративного процесса к равновесию Нэша. Из доказательства леммы 4 следует, что делать $\tilde{\beta}$ очень большой не целесообразно – в этом случае в итеративном процессе переговоров агенты будут стремиться минимизировать значения штрафов – процесс будет достаточно быстро сходиться к среднему арифметическому стартовых заявок агентов, затем медленно двигаться в сторону эффективного распределения.

Проиллюстрируем полученные в данном разделе результаты на нескольких примерах.

Пример 3. *Действие механизма при поведении агентов в соответствии с динамикой Курно.*

Для рассмотренной в примерах 1 и 2 модели и параметров механизма рисунок 1 демонстрирует динамику выигрышей (который могли бы получить агенты, если бы переговоры закончились бы на этой итерации) и заявок агентов (про количество ресурса для агента 1) в случае, если на первой итерации каждый агент попросил отдать весь ресурс ему. Параметры $\alpha = 1$ $\beta = 0,0005$ удовлетворяют условию леммы 4 той части области $\bar{S}$, где любой из агентов получает не менее 31 единицы ресурса.

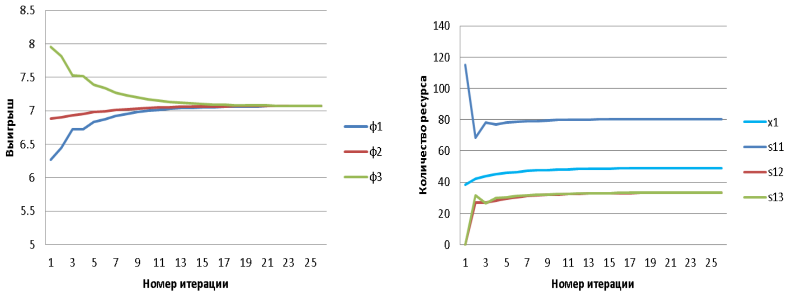

Рис. 1. Выигрыши агентов и их заявки про ресурс для агента 1

Начиная с итерации 10, получаемый каждым агентом ресурс отличается от оптимального не более чем на 1. Оптимальное распределение достигается только на 60-ой итерации. На любой итерации после 60-ой агенты не меняют своих заявок. ■

Актуальность исследования различных гипотез поведения может быть проиллюстрирована следующим образом.

Пример 4. *Отказ агентов от динамики Курно.*

Если в модели, использованной в предыдущих примерах, ресурс между агентами делится поровну, то агент 3 получает полезность $\approx 7,95$, т.е. больше, чем при эффективном распределении ресурса. Агенты 1 и 2 получают при этом меньшую полезность, чем при эффективном распределении ресурсов. Если агент 3 действует по динамике Курно, выбирая на каждой итерации свою заявку, как наилучший ответ на обстановку на предыдущей итерации, то его выигрыш в игре (полезность плюс трансферы) будет уменьшаться с каждой итерацией. Более того, выигрыш, который он может ожидать, выбирая наилучший ответ, будет всегда меньше, чем тот, который реализуется на соответствующей итерации. В отличие от двух других агентов, чьи выигрыши будут возрастать.

Вот почему у агента 3 может возникнуть мотивация отказаться следовать динамике Курно как стратегии своего поведения. В частности, он может не уменьшать то количество ресурса, которое он просит себе.

На рисунке 2 приведены графики изменения выигрышей агентов и ресурса, который будет получать агент 1 для случая, если агент 3 решил не менять заявку $s_{33} = R$ на всех итерациях, но минимизирует свой трансфер за счет выбора заявок s_{13} и s_{23}.

Агенты 1 и 2 действуют в соответствии с динамикой Курно до 10-ой итерации. На второй итерации выигрыш агента 3 значительно уменьшается, а выигрыши агентов 1 и 2 растут. Но, начиная с 3-ей итерации и вплоть до 10-ой выигрыши агентов 1 и 2 оказываются меньше, чем на итерации 1. Более того, начиная с 7-ой итерации заявки агентов 1 и 2 оказываются «равновесными» в том смысле, что каждому из них не выгодно от них отклоняться, при условии, что агент 3 не будет менять свою заявку. Для агента 3 сообщение $s_{33} = R$ не входит в его наилучший ответ на всех итерациях - $R \neq br_{33}(s_{-3}(\tau - 1))$.

На 11-ой итерации агент 2 отказывается от модели поведения и меняет свою заявку про тот ресурс, который он просит себе на стартовую - $s_{22}(11) = R$. На итерации 12 он существенно теряет в выигрыше, но начиная с 12-ой итерации и далее агент 2 получает больший выигрыш, чем при выборе им стратегии наилучших ответов на предыдущих итерациях.

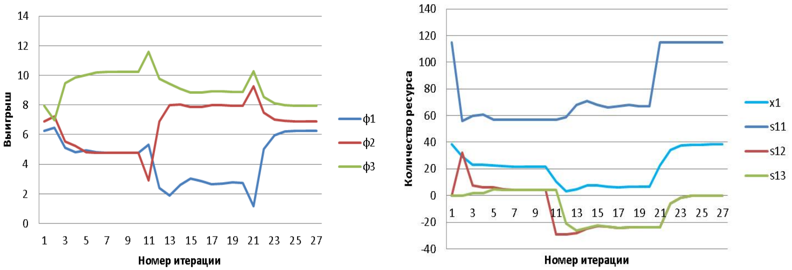

Рис. 2. Выигрыши агентов и их заявки про ресурс для агента 1 при последовательном отказе агентов следовать динамике Курно.

Начиная с итерации 11, только агент 1 выбирает свою заявку как наилучший ответ на заявки оппонентов. При этом, минимизируя свои трансферы, агенты 2 и 3 просят для него отрицательное количество ресурса.

Но, начиная с 20-ой итерации тот ресурс , что он может получить, как и его наилучший ответ, перестают сильно меняться, а его выигрыш оказывается $\approx 2,73$. На итерации 21 он перестает следовать наилучшим ответам и просит отдать весь ресурс себе - $s_{11} = R$. И далее не меняет s_{11}, выбирая s_{21} и s_{31}, минимизируя свой трансфер. Начиная с итерации 27 заявки, выигрыши всех агентов и выделяемый им ресурс оказываются такими же, как и на первой итерации.

На всех итерациях, кроме 2-ой, выигрыш агента 3 оказывается больше, чем при эффективном распределении ресурсов. Суммарный выигрыш агентов меньше максимального, что естественно.

Но, координируя свои заявки, агенты 1 и 2 могут «наказать» агента 3 за несговорчивость, кооперируясь между собой только путем координации сообщаемых заявок. Рисунок 3 демонстрирует пример, когда в ситуации, аналогичной описанной выше, агенты 1 и 2 начали кооперироваться на шаге 10, «договорившись» сообщать такие заявки, которые позволят максимизировать их суммарный выигрыш. С этого момента заявки агентов 1 и 2 на правом графике на рисунке 3 совпадают полностью.

На итерациях 10-13 они просят весь ресурс отдать им. Начиная с 14-ой итерации, используя возможности механизма, они начинают сообщать такие заявки, что бы агенту 3 не выделялся ресурс совсем. С 15-ой итерации агент 3 перестает сообщать фиксированную заявку $s_{33} = R$ и начинает действовать по динамике Курно - $s_3 = br_3(s_{-3})$

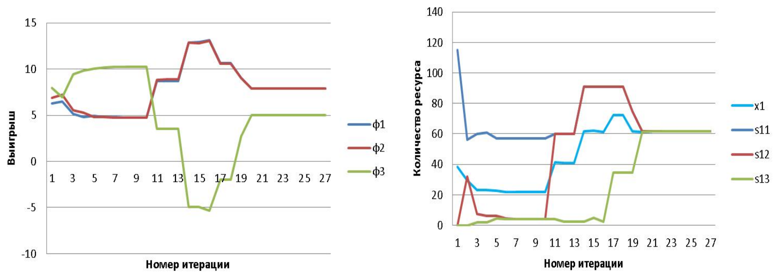

Рис. 3. Выигрыши агентов и их заявки про ресурс для агента 1 при последовательном отказе агента3 следовать динамике Курно и кооперации агентов 1 и 2.

Агенты 1 и 2 , начиная с итерации 19, так же выбирают свои заявки, как наилучший ответ на заявки агента 3, но для коалиции, а не для каждого в отдельности. В итоге, начиная с итерации 20, для агента 3 наилучшей стратегией оказывается отказ от притязаний на ресурс и сообщение заявки, аналогичной сообщаемой агентами 1 и 2. Агент 1 и 2 делят весь доступный ресурс между собой, что им приносит очевидным образом большую полезность, чем при эффективном распределении ресурсов между всеми тремя агентами.■

5. Уменьшение размерности пространства сообщений агентов

Предлагаемый механизм требует от агентов сообщения полного вектора распределения ресурсов. Что может быть затруднительным на практике, особенно, если число агентов велико. Кроме того, как было проиллюстрировано в примере 4, агенты могут использовать возможность сообщать полный вектор для кооперации друг с другом, сообщая скоординированную заявку. В частности, возможны ситуации, в которых сообщество разделяется на две группы. Тогда их взаимодействие можно рассматривать как игру двух агентов, что при сбалансированных платежах может не позволить реализовать эффективное распределение, так как в этом случае окажется, что $\tilde{\beta} = 0$ и у двух групп будут отсутствовать стимулы договариваться. При этом группа, состоящая из большего числа агентов, может полностью забрать весь ресурс себе, что и было продемонстрировано в примере 4. Поэтому целесообразным представляется исследование возможности исключения кооперации между агентами за счет координации своих заявок.

Полученные в разделе 3 результаты по виду функций наилучших ответов агентов мотивируют исследовать возможность построения модификации исследуемого механизма, в которой каждый агент будет сообщать лишь то, сколько ресурса хочет получить лично он - $\hat{\rho} =< \hat{S}, \hat{\pi}, \hat{t} >$, где $\tilde{S}_i \subseteq \mathbb{R}$.

Сохраним обозначение заявки агента $i \in N$ - s_{ii}.

Из утверждения 1 следует, что в равновесии каждый агент по процедуре $\hat{\pi} : \mathbb{R}^n \to X$ должен получать ресурс в количестве

(5) $\hat{x}_i = s_{ii} - \dfrac{\sum_{i \in N} s_{ii} - R}{n}$.

Предположим, что таким же образом ресурс будет распределяться для всех возможных заявок агентов, таких, что

$\sum_{i \in N} s_{ii} - R \geq 0$. В случае отсутствия дефицита каждый агент будет получать, сколько просит - $\forall i \in N \;\; x_i = s_{ii}$.

С каждого агента будем взымать платеж $\hat{t}_i = \hat{\beta}(s_{ii} - x_i)^2$. Очевидно, что платежи всех агентов будут одинаковы, поэтому балансировка платежей не допустима – в противном случае, реальный платеж каждого агента всегда будет нулевым. Справедливы следующее утверждения.

Лемма 5. *Механизм* $\hat{\rho} =< \hat{S}, \hat{\pi}, \hat{t} >$ *реализует эффективное распределение ресурсов как единственное равновесие Нэша в индуцированной им игре агентов* $\Gamma(\hat{\rho})$.

Лемма 5 позволяет сформулировать утверждени*е об эквивалентности* между механизмами $\rho =< S, \pi, t >$ и $\hat{\rho} =< \hat{S}, \hat{\pi}, \hat{t} >$. Эквивалентными считаются механизмы (распределения ресурсов), которые для любого профиля предпочтений агентов реализуют одинаковое распределение ресурсов.

Утверждение 3. *Пусть механизм* $\rho =< S, \pi, t >$ *задан параметрами* $\beta > 0$, $\alpha < 1$. *Механизм* $\hat{\rho} =< \hat{S}, \hat{\pi}, \hat{t} >$ *в котором* $\hat{\beta} = \beta \dfrac{n - \alpha - 1}{n(n-1)^2}$:

1. *эквивалентен механизму* $\rho =< S, \pi, t >$
2. *равновесные заявки агентов в механизме* $\hat{\rho} =< \hat{S}, \hat{\pi}, \hat{t} >$ *совпадают с равновесными заявками про собственный ресурс в механизме* $\rho =< S, \pi, t >$.

Таким образом, для отдельных параметров механизма $\rho =< S, \pi, t >$ оказывается возможным построение эквивалентного ему механизма $\hat{\rho} =< \hat{S}, \hat{\pi}, \hat{t} >$ в котором все агенты сообщают только заявку на ресурс для себя. Однако, балансировка этого механизма не возможна, поэтому, в отличии от механизма $\rho =< S, \pi, t >$ его нельзя считать эффективным. Но, для него справедлива аналогичная зависимость абсолютных платежей агентов от силы штрафов:

$$\hat{p}_i(\hat{s}^*) = \frac{n(n-1)}{\hat{\beta}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}^2 (\hat{x}_i(\hat{s}^*)) .$$

Т.е. имеется возможность сделать платежи агентов сколь угодно малыми, что позволяет трактовать его, по аналогии с [26] как почти эффективный.

Однако из-за ненулевых платежей в механизме $\hat{\rho} =< \hat{S}, \hat{\pi}, \hat{t} >$ нельзя гарантировать, что будет обеспечена индивидуальная рациональность решения для всех агентов.

В тоже время, на основе итеративного процесса переговоров $I\rho$ можно предложить «редуцированный» итеративный процесс переговоров $\hat{I}\rho$, в котором на каждом шаге у агентов спрашиваются только их заявки про ресурс для себя - $s_{ii}(\tau)$, $i \in N$. Причем $\forall i \in N \;\; s_{ii}(1) \le R$. При этом, заявки агента о том, какое количество ресурса следует выделять каждому из остальных агентов, определяются следующим образом.

На первом шаге, если поданные заявки агентов не могут быть удовлетворены, то считается, что агент предлагает весь оставшийся после удовлетворения его заявки ресурс поделить поровну между остальными агентами. Т.е., если

$$\sum_{i \in N} s_{ii}(1) > R,$$

то $\forall i \in N$, $\forall j \in N \setminus \{i\} \;\; s_{ji}(1) = \dfrac{R - s_{ii}}{n-1}$.

Если в системе нет дефицита ресурсов, то считается, что все агенты согласны с поданными заявками. Т.е. при

$$\sum_{i \in N} s_{ii}(1) \le R$$

$\forall i \in N$, $\forall j \in N \setminus \{i\} \;\; s_{ji}(1) = s_{jj}(1)$.

Для любого шага $\tau > 1$, для каждого из агентов его заявки про количество ресурса для каждого из остальных агентов рассчитываются как его наилучший ответ в игре $\Gamma(\rho)$ на обстановку на предыдущем шаге: $\forall j \in N \setminus \{i\}$ $s_{ji}(\tau) = br_{ji}(s_{-i}(\tau - 1))$, предполагая, что $br_{ii}(s_{-i}(\tau-1)) = s_{ii}(\tau)$. Т.е. в случае, если $s_{ii}(\tau) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_{j-i}(\tau - 1) < R$, то $s_{ji}(\tau) = x_{j-i}(\tau - 1)$.
Иначе,

$$s_{ji}(\tau) = x_{j-i}(\tau - 1) - \frac{1}{n-1} A_i,$$

где $A_i = s_{ii} + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_{j-i} - R$.

В рамках данного итеративного процесса переговоров динамика Курно подразумевает, что каждый агент будет выбирать свою заявку на каждом шаге как решение уравнения (2), беря в качестве обстановки заявки всех агентов про количество ресурса для него $s_{i-i}(\tau - 1)$.

Очевидно, что, если итеративный процесс $I\rho$ обеспечивает сходимость к равновесию Нэша в игре $\Gamma(\rho)$ в предположении, что агенты действует в соответствии с динамикой Курно, то и $\hat{I}\rho$ так же обеспечит сходимость к этому равновесию.

Предлагаемый итеративный процесс $\hat{I}\rho$ исключает возможность кооперации агентов путем координации заявок, т.к. каждый агент может выбирать заявку «про себя», а механизм будет перераспределять создаваемый этой заявкой дефицит поровну между всеми другими агентами. Но, он остается уязвимым к поведению, иллюстрируемому рисунком 2 – когда некоторые агенты (или все) не действуют по динамике Курно. Более того, для ситуации, рассмотренной в примере 4, для агента 3 не существует угрозы кооперации агентов 1 и 2.

6. Экспериментальная апробация

Для экспериментальной апробации полученных теоретических результатов и результатов компьютерного моделирования была разработана деловая игра и информационная система для ее проведения на основе программы zTree [15].

Первая серия игр была проведена с целью проверки предлагаемого механизма ρ в максимально свободных условиях. В системе были реализованы одновременно оба итеративных процесса переговоров $I\rho$ и $\hat{I}\rho$, а игроки могли свободно выбирать между ними в процессе игры. При этом игрокам в большинстве игр не запрещалось общаться в реальности.

Игра проводилась в группах из 3 или 5 человек. Игрокам предлагалась ситуация, в которой они делили между собой время на консультацию у преподавателя, а выигрыш являлся оценкой за экзамен. При этом выигрыш каждого игрока в Парето-оптимуме составлял 7 баллов по 10-ти балльной системе (4 по 5-ти балльной), т.е. попытки получить больший балл приводили к уменьшению балла одного из игроков. При этом в некоторых играх участвовали реальные студенты и играли на реальные оценки (в этих играх кооперация наблюдалась чаще всего). Полный текст инструкции игры доступен по адресу http://www.mtas.ru/games/gl.

Игра проходит в течение не более 100 шагов ($\tau \leq 100$). Она продолжается до тех пор, пока все игроки не перестанут менять свои заявки или пока не истечёт отведенный лимит шагов. Выигрыш игрока определяется как выигрыш на последнем шаге.

Хотя динамика Курно не приводит игроков к ситуации выдачи кому либо отрицательного ресурса, в реальной ситуации нельзя исключить такой возможности, поэтому была реализована система штрафов, при которой сильно (10000) штрафуется игрок, получивший отриц. ресурс и тот игрок, заявка которого оказала решающее влияние на этого.

Таблица 1 представляет параметры механизма, применявшиеся в игре.

Таблица 1 Параметры механизма для игры

Параметр	Смысл	Значение
A	балансировочный коэффициент	1 в 17 играх, 0 в 10 играх
B	сила штрафа	0.001 в 3 играх, 0.002 в 4 играх, 0.0005 в остальных 20 играх
R	ресурс Центра	$50*n$ - Σr_i, где n – количество игроков в группе.
r_i	типы игроков	случайно из набора {1,9,25}

Таблица 2 содержит информацию по проведённым играм. Первый шаг не учитывается, т.к. по нему нельзя сказать был ли он каким-то ответом на пред. шаг. В игре 3х лиц на каждом шаге 3 заявки. В связи с введёнными штрафами за выход в отрицательную область, заявки игроков, получивших на предыдущем шаге эти штрафы, нельзя считать «чистыми», поэтому такие заявки не учитывались при анализе.

Таблица 2 Общая информация по играм

Всего игр/шагов	26/387
игр/шагов/заявок с некооперативным поведением	13/232/643

Далее рассматриваются только игры с некооперативным поведением. Будем называть направлением вектора – вектор знаков его компонент, а направлением изменения вектора заявок $s_i(\tau)$ i-го игрока на шаге τ – направление $\Delta_i(\tau)$.

Проанализируем заявки игроков на совпадение со следующими моделями поведения:

- «Индикаторное поведение» [2] – IB. Каждый игрок на каждом шаге будет выбирать вектор заявок с направлением изменения равным направлению вектора $(br_i(s_{-i}(\tau\text{-}1)) - s_i(\tau\text{-}1))$: $s_i(\tau) = s_i(\tau\text{-}1) + \gamma_i^\tau\ [br_i(s_{-i}(\tau\text{-}1)) - s_i(\tau\text{-}1)]$, $i \in N$, где $\gamma_i^\tau \in [0; 1]$ – «величины ходов».
- «Не двигается» – IB($\gamma = 0$).
- «Почти не двигается» – IB($-0.1<\gamma<0.1$).
- Наилучший ответ с точностью ε – BR(ε), где BR(0) – динамика Курно: $s_i(\tau) = br_i(s_{-i}(\tau\text{-}1))$. Определим BR($\varepsilon$) = IB($1\text{-}\varepsilon < \gamma <1+\varepsilon$), т.е. заявки игрока около BR(0).
- Наилучший ответ про собственный ресурс с точностью ε – $\mathrm{BR}_i(\varepsilon)$. Игрок пользуется наилучшим ответом только для заявки про количество ресурса для себя: $\mathrm{BR}_i(\varepsilon) = (\mathrm{BR}(\varepsilon))_i$.
- Наилучший ответ по остальным – BR_{-i}. Наилучший ответ только для заявок об остальных: $\forall j\ \ \mathrm{BR}_j(\varepsilon) = (\mathrm{BR}(\varepsilon))_j$.

Таблица 3 показывает для всего набора данных и для наборов данных, разбитых по типам игроков, сколько заявок игроков:

- не двигалось (IB($\gamma = 0$))
- почти не двигалось (IB($-0.1<\gamma<0.1$))
- было в сторону BR (IB($\gamma > 0$)),
- «перескочило» за BR (IB($\gamma > 1$)),
- совпало с BR(ε) с точностью ε,
- совпало с $\mathrm{BR}_i\,(\varepsilon)$ с точностью ε,
- совпало с $\mathrm{BR}_{-i}\,(\varepsilon)$ с точностью ε,
- совпало с гипотезой IB.

Таблица 3 Анализ поведения

Имя набора	Весь набор	Тип 1	Тип 9	Тип 25
Всего заявок	640	212	214	214
IB(0)	177 (27.7%)	71 (33.5%)	54 (25.2%)	52 (24.3%)
IB($-0.1<\gamma<0.1$)	213 (33.3%)	82 (38.7%)	66 (30.8%)	65 (30.4%)
В сторону BR	93 (14.5%)	24 (11.3%)	34 (15.9%)	35 (16.4%)
За BR	20 (3.1%)	2 (0.9%)	9 (4.2%)	9 (4.2%)
BR(0.05)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)
BR(0.1)	1 (0.2%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	1 (0.5%)
BR(0.2)	5 (0.8%)	1 (0.5%)	2 (0.9%)	2 (0.9%)
BR_i (0.05)	11 (1.7%)	3 (1.4%)	5 (2.3%)	3 (1.4%)
BR_i (0.1)	20 (3.1%)	6 (2.8%)	7 (3.3%)	7 (3.3%)
BR_i (0.2)	38 (5.9%)	12 (5.7%)	15 (7.0%)	11 (5.1%)
BR_{-i} (0.05)	1 (0.2%)	0 (0.0%)	1 (0.5%)	0 (0.0%)
BR_{-i} (0.1)	3 (0.5%)	0 (0.0%)	1 (0.5%)	2 (0.9%)
BR_{-i} (0.2)	10 (1.6%)	3 (1.4%)	3 (1.4%)	4 (1.9%)
IB	28 (4.4%)	7 (3.3%)	8 (3.7%)	13 (6.1%)

Из таблицы ясно, что хорошей модели, объясняющей поведение игроков, пока не удалось найти – из содержательных моделей ни одна не выходит за 10% встречаемости, за исключением моделей «(Почти) не двигается», которые объясняют почти треть заявок.

Если расположить модели в порядке убывания их встречаемости в объёме данных, то, приблизительно, первые четыре: «в сторону BR», $BR_i(0.2)$, IB, «за BR». Первая и последняя модели слишком абстрактные, а вторая и третья говорят о том, что улучшение заявки по ресурсу для себя и индикаторное поведение занимают некоторое заметное место среди поведения игроков. Интересно также, что наибольшее количество заявок, совпадающих с IB, было у игроков с типом $r = 25$.

Заявки, которые не удалось идентифицировать с помощью предложенных моделей, содержат компоненты, которые изменялись не по направлению к наилучшему ответу по данной компоненте относительно заявки на предыдущей итерации (т.е. не могла считаться рациональной вообще). Модель, адекватно объясняющую такое поведение, авторам пока не удалось предложить. Возможно, что игроки действуют «нерационально», пытаясь бороться за ресурс и не учитывая штрафы. Или наоборот пытаются предсказать поведение оппонентов на несколько шагов вперёд, т.е. применять рефлексию. В дальнейшем можно исследовать ходы игроков на совпадение с рефлексивными моделями как напр. в [8]. Отдельный вопрос для анализа – игры, в которых проявилось кооперативное поведение с более чем двумя коалициями.

Следующий планируемый этап проверки механизма – проведение серии игр с «редуцированным» механизмом, который отсекает некоторые нежелательные модели поведения игроков – в частности кооперацию путем согласования сообщаемых заявок.

Заключение

Основным результатом данной статьи можно считать тот факт, что авторам удалось на основе подхода, предложенного в [6] – представления задачи распределения ресурсов как задачи многокритериального голосования, предложить механизм, эффективно решающий задачу распределения ресурсов на основе механизма, эффективно решающего задачу однокритериального голосования. Предложен механизм, обеспечивающий эффективное распределение ресурса, как единственное равновесие Нэша в индуцированной им игре агентов и обеспечивающий максимум суммарной полезности агентов.

Разработанный авторами инструментарий для проведения экспериментальных игр позволяет проводить апробацию применимости механизма для решения различных прикладных задач распределения ресурсов.

Однако, остаётся открытым целый ряд вопросов, которые требуют дальнейшего теоретического и экспериментального исследования, среди которых особенно хочется выделить следующие.

1. Ослабление ограничений на класс функций полезности агентов. Для большинства прикладных задач, в лучшем случае, можно будет обеспечить выполнимость условия вогнутости. В статье, посвященной применению данного механизма для решения задачи активной экспертизы [7], было показано, что положительные результаты о существовании эффективного решения как равновесия Нэша в игре агентов могут быть распространены на класс кусочно-линейных вогнутых функций полезности. Однако, динамические свойства механизма не исследовались. Поэтому, представляется интересным распространение полученных в данной статье результатов на класс кусочно-линейных функций полезности.

2.Исследование свойств механизма и процессов итеративных переговоров в рамках различных гипотез о поведении агентов, т.к. в статье была исследована лишь «простейшая» модель поведения – динамика Курно. Причем, как это было показано в статье, в игре, кроме единственного и эффективного равновесия Нэша, могут существовать и равновесия других типов, например равновесие в безопасных стратегиях [5], не позволяющие обеспечить эффективность распределения ресурсов. В защиту предложенного механизма, следует отметить, что данный вопрос вообще является открытым и актуальным для теории построения эффективных экономических механизмов.

3. Исследование методов обеспечения устойчивости механизма к кооперативному поведению участников, в рамках которого участники делятся на несколько коалиций. Полученные в статье результаты позволяют предположить, что наихудшей с точки зрения механизма ситуацией является разделение всего сообщества на две коалиции. Остальные коалиционные конфигурации не должны представлять проблем для работоспособности механизма. Однако, это вопрос требует более детального изучения, включая сопоставление с кооперативным моделями распределения ресурсов [4,9].

Приложение

Доказательство леммы 1: Очевидно, что $\forall i \in N$ функции $p_i(s)$ являются строго выпуклыми.

Покажем, что при $n > \alpha + 1$ $\forall i \in N$ функции $t_i(s)$ являются строго выпуклыми тоже. $\forall j \in N$ $\forall s \in S$

$$\frac{\partial t_i(s)}{\partial s_{ji}} = 2\beta\left[(x_j - s_{ji})(\frac{1}{n} - 1 + \frac{\alpha}{n}) - \frac{\alpha}{n^2}\sum_{k\in N}(x_j - s_{jk})\right].$$

Т.к. $\forall j,k \in N$ $\sum_{k\in N} s_{jk} = nx_j$, то

$$\frac{\partial t_i(s)}{\partial s_{ij}} = 2\beta\left[(x_j - s_{ji})(\frac{1}{n} - 1 + \frac{\alpha}{n})\right] = \frac{n-\alpha-1}{n-1}\frac{\partial p_i(s)}{\partial s_{ij}}.$$

Т.к. $n>1$, то при $n>\alpha+1$ знаки $\frac{\partial t_i(s)}{\partial s_{ji}}$ и $\frac{\partial p_i(s)}{\partial s_{ji}}$ совпадают, а любые производные высших порядков двух функций будут пропорциональны друг другу с коэффициентом $\frac{n-\alpha-1}{n-1}$. Следовательно, если $p_i(s)$ строго выпукла, то $t_i(s)$ строго выпукла тоже при $n>\alpha+1$.

Следовательно, функция $\varphi_i(s)=u_i(\pi(s))-t_i(s)$ - строго вогнута, откуда следует единственность ее максимума.

<u>*Доказательство леммы 2:*</u> Для любого агента $i\in N$ выбор наилучшего ответа в соответствии с леммой 1 является задачей выпуклой оптимизации с лагранжианом

$$L_i(s_i)=\varphi_i(s_i,s_{-i})+\lambda_i(\sum_{j\in N}s_{ji}-R).$$

Следовательно:

$$\frac{\partial L_i(s_i)}{\partial s_{ii}}=\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_i}\frac{1}{n}-2\tilde{\beta}(x_i-s_{ii})(\frac{1}{n}-1)+\lambda_i,$$

$$\frac{\partial L_i(s_i)}{\partial s_{ji}}=-2\tilde{\beta}(x_j-s_{ji})(\frac{1}{n}-1)+\lambda_i,\ \ j\in N\setminus\{i\},$$

$$\frac{\partial L_i(s_i)}{\partial \lambda_i}=\sum_{j\in N}s_{ji}-R$$

Откуда следует, что в оптимальном решении $\forall j\in N\setminus\{i\}$ Δ_{ji} $br_{ji}(s_{-i})-x_{j-i}$ одинаково:

$$br_{ji}(s_{-i})-x_{j-i}=\frac{n^2}{2\tilde{\beta}(n-1)^2}\lambda_i$$

1. Пусть решение задачи является внутренним: $\sum_{j\in N}br_{ji}(s_{-i})\le R$, $\lambda_i=0$.

Тогда $\forall j \in N \setminus \{i\}$ $x_j = br_{ji}(s_{-i})$, откуда очевидным образом получаем, что $br_{ji}(s_{-i}) = x_{i-i}$ и $\Delta_{ji} = 0$. С учетом $\Delta_{ii} = br_{ii}(s_{-i}) - x_{i-i}$, получаем, что $\sum_{j\in N} br_{ji}(s_{-i}) = \Delta_{ii} + \sum_{j\in N} x_{j-i} \le R$.

Т.е. $A_i = 0$. Поэтому, $br_{ii}(s_{-i})$ определяется из решения $\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_i} = 2\tilde{\beta}(x_i - s_{ii})(1-n)$, что эквивалентно

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\frac{1}{n}\Delta_{ii} + x_{i-i}\right) = 2\tilde{\beta}\frac{(n-1)^2}{n}\Delta_{ii},$$

Что и требовалось показать.

2. Пусть решение задачи граничное - $\sum_{j\in N} br_{ji}(s_{-i}) = R$, $\lambda_i < 0$.

Тогда с учетом того, что $\sum_{j\in N\setminus\{i\}} \Delta_{ji} = R - \Delta_{ii} - \sum_{j\in N} x_{j-i}$, получаем, что $\sum_{j\in N\setminus\{i\}} \Delta_{ji} < 0$, так как $\Delta_{ii} > 0$, что следует из свойств класса $\widehat{U}$. Откуда получаем:

$$\Delta_{ii} + \sum_{j\in N} x_{j-i} - R = \frac{n^2}{2\tilde{\beta}(1-n)}\lambda_i,$$

причем

$$\Delta_{ii} + \sum_{j\in N} x_{j-i} \ge R.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_i(\frac{1}{n}\Delta_{ii} + x_{i-i})}{\partial x_i} = 2\tilde{\beta}\frac{n-1}{n}((n-1)\Delta_{ii} + A_i),$$

и $\forall j \in N \setminus \{i\}$ $\Delta_{ji} = A_i / (1-n)$, где

$$A_i = \Delta_{ii} + \sum_{j\in N} x_{j-i} - R.$$

Что и требовалось показать.

Доказательство утверждения 1:

1. Покажем, что $\forall u \in \widehat{U}$ для неподвижной точки выполняется условие $\forall i \in N \ \sum_{j \in N} s^*_{ji} = R$.

Очевидно, что только в этом случае $\sum_{i \in N} x_i(s^*) = R$.

Для неподвижной точки $BR(s^*) = s^*$ и $\pi(BR(s^*)) = \pi(s^*)$. Что эквивалентно выполнению системы равенств

$$\sum_{i \in N} br_{ji}(s^*_{-i}) = nx_j(s^*), \ j \in N,$$

Откуда следует, что

$$\sum_{j \in N} \sum_{i \in N} br_{ji}(s^*_{-i}) = n \sum_{j \in N} x_j(s^*).$$

Покажем, что последнее равенство выполняется только при

$$\sum_{j \in N} x_j(s^*) = R.$$

Из определения Δ_{ji} следует, что $\forall \{i, j\} \in N^2$

$$br_{ji}(s^*_{-i}) = x_j(s^*) + \frac{n-1}{n} \Delta_{ji}.$$

Из леммы 2 следует, что $\forall j \in N$

$$\sum_{j \in N} br_{ji}(s^*_{-i}) = \sum_{j \in N} x_j(s^*) + \frac{n-1}{n}(\Delta_{ii} - A_i).$$

Соответственно,

$$\sum_{j \in N} \sum_{i \in N} br_{ji}(s^*_{-i}) = n \sum_{j \in N} x_j(s^*) + \frac{n-1}{n} \sum_{i \in N} (\Delta_{ii} - A_i).$$

Т.е. для неподвижной точки должно выполняться условие

$$\sum_{i \in N} (\Delta_{ii} - A_i) = 0.$$

Если $\sum_{i\in N} x_i(s^*) < R$, то

$$\exists K \subseteq N = \{k \in N : \sum_{j\in N} s^*_{jk} < R\}.$$

Т.е. для агентов из K решение задачи поиска наилучшего ответа является внутренним. Из леммы 2 получаем, что $\forall l \in K\ A_k = 0$, $\forall i \in N \setminus K$

$$A_i = \Delta_{ii} + \sum_{j\in N} x_{j-i} - R.$$

Следовательно,

$$\sum_{i\in N}(\Delta_{ii} - A_i) = \sum_{l\in K}\Delta_{ll} + \sum_{i\in N\setminus K}(R - \sum_{j\in N} x_{j-i}).$$

Из свойств класса $\widehat{U}$ следует, что $\forall i \in N\ \Delta_{ii} > 0$, а из того, что решение внутреннее, получаем, что $\forall i \in N \setminus K$

$$R - \sum_{j\in N} x_{j-i} > 0$$

Таком образом, для $s^* \in S : \sum_{i\in N} x_i(s^*) < R$

$$\sum_{i\in N}(\Delta_{ii} - A_i) > 0.$$

Если $\sum_{i\in N} x_i(s^*) = R$, то $\forall i \in N\ A_i = \Delta_{ii}$ и

$$\sum_{i\in N}(\Delta_{ii} - A_i) = 0.$$

2. Покажем, что равновесные по Нэшу заявки агентов определяют эффективное распределение ресурса. Т.к., $\forall i \in N\ A_i = \Delta_{ii}$, то из (3) получаем, что для любой неподвижной точки s^* верно

$$\sum_{i\in N}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i(s^*)) = 2\tilde{\beta}(n-1)\sum_{i\in N}\Delta_{ii} = 2\tilde{\beta}n(\sum_{i\in N} s^*_{ii} - R)$$

Из леммы 2, получаем, что $\forall i \in N$

$$x_i = \frac{1}{n}(nx_i + \frac{n-1}{n}\Delta_{ii} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\Delta_{jj}) .$$

Следовательно, $\forall i \in N$

$$(n-1)\Delta_{ii} = \sum_{j\in N\setminus\{i\}}\Delta_{jj} .$$

Решение данной системы следующее: $\forall\{i, j\} \in N^2$ $\Delta_{ii} = \Delta_{jj}$.

Обозначив $\Delta = (\sum_{i\in N} s_{ii}^* - R)$, получаем, что $\forall i \in N$

$$\Delta_{ii} = \frac{1}{n-1}\Delta .$$

Следовательно, $\forall i \in N$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i(s^*)) = 2\tilde{\beta}(\sum_{i\in N} s_{ii}^* - R) .$$

Таким образом, получаем, что для любого равновесного по Нэшу набора заявок агентов s^* $\sum_{i\in N} x_i(s^*) = R$ и $\forall i \in N$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i(s^*)) = \lambda .$$

Т.е. $\pi(s)$ является решением задачи (1).

3. Покажем, что равновесие Нэша единственно. Задача (1) выпуклая и обладает единственным решением - т.е. λ и $x_i(s^*)$, $i \in N$, определены однозначно. Поэтому s^* так же единственно, т.к. $\forall i \in N$ $s_{ii}^* = x_i(s^*) - \frac{\lambda}{2\tilde{\beta}n}$.

4. Наконец, покажем, как определить Δ в равновесии. Из того, что $\forall i \in N$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i(s^*)) = 2\tilde{\beta}\Delta,$$

получаем, что $x_i(s^*) = u_i'^{-1}(2\tilde{\beta}\Delta)$. Из свойств класса $\widehat{U}$ следует, что $\forall u \in \widehat{U}$ и $\forall i \in N$ $u_i'^{-1}(\bullet)$ - строго убывающая функция. Следовательно, $\sum_{i\in N} u_i'^{-1}(2\tilde{\beta}\Delta)$ является строго убывающей по Δ. Поэтому, уравнение

$$\sum_{i\in N} u_i'^{-1}(2\tilde{\beta}\Delta) = R$$

имеет всегда (в предположении, что в решении задачи (1) ресурс должен распределяться между всеми агентами) единственное решение, которое и определяет Δ в равновесии.

<u>*Доказательство следствия 1:*</u> Если $\alpha < 1$, то $\sum_{i=1}^{n} t_i(s^*) = 0$ только при $\Delta = 0$. Из (2) получаем, что при этом $\forall i \in N$ $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(x^*\right) = 0$, что не возможно из определения $\widehat{U}$.

<u>*Доказательство леммы 3*</u>: Если $\left|\pi(s(\tau))\right| < R$, то из утверждения 1 следует, что

$$\sum_{j\in N}\sum_{i\in N} br_{ji}(s_{-i}) > n\sum_{j\in N} x_j(s).$$

Т.е. $n\left|\pi(s(\tau+1))\right| > n\left|\pi(s(\tau))\right|$.

При этом $n\left|\pi(s(\tau+1))\right| - n\left|\pi(s(\tau))\right| \to 0$ только при

$\sum_{i\in N} u_i'(x_i(s(\tau+1))) \to 0$, что означает, что решение задачи (1) должно быть «почти» внутренним, а это не так.

Если $\left|\pi(s(\tau))\right| = R$, то

$$\sum_{j\in N}\sum_{i\in N} br_{ji}(s_{-i}) = n\sum_{j\in N} x_j(s).$$

Т.е. $n\left|\pi(s(\tau+1))\right| = n\left|\pi(s(\tau))\right| = nR$.

<u>*Доказательство леммы 4*</u>: Исследуем отображение $BR(\bullet): S \to S$. Легко получить, что $\forall i$ при $\tilde{\beta} > 0$ выполняется

$$\sum_{\{l,k\}\in N^2}\left|\frac{\partial br_{ii}}{\partial s_{lk}}\right| = \sum_{j\in N\setminus\{i\}}\left|\frac{\partial br_{ii}}{\partial s_{ij}}\right| = (n-1)\left|\frac{2\tilde{\beta}n + u_i''(x_i)}{-u_i''(x_i) + 2\tilde{\beta}n(n-1)}\right| < 1.$$

Введем обозначения

$$D_i = \frac{2\tilde{\beta}n + u_i''(x_i)}{-u_i''(x_i) + 2\tilde{\beta}n(n-1)},\ \overline{D} = \max_{i\in N}\left|D_i\right|,\ \underline{D} = \min_{i\in N} D_i.$$

Тогда верно, что $(n-1)\overline{D} < 1$, $(n-1)\underline{D} < 1$, при условии, что $\max_{i\in N}(-u_i''(x_i(s)) \le C$. В противном случае, может оказаться, что

$$\sum_{\{l,k\}\in N^2}\left|\frac{\partial br_{ii}}{\partial s_{lk}}\right| = 1.$$

Каждый агент действует по динамике Курно, что означает:

$$br_{ji} = x_{j-i} + \frac{1}{n-1}(x_{i-i} - br_{ii}),\ j \in N\setminus\{i\},$$

где $x_{i-j} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k\in N\setminus\{j\}} s_{ik}$,

получаем, что

$$\sum_{\{l,k\}\in N^2}\left|\frac{\partial br_{ji}}{\partial s_{lk}}\right| = \sum_{k\in N\setminus\{i\}}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\sum_{k\in N\setminus\{i\}}(\frac{1}{n-1} - A_i).$$

Следовательно, с учетом того, что $(n-1)D_i < 1$

$$\sum_{\{l,k\}\in N^2}\left|\frac{\partial br_{ji}}{\partial s_{lk}}\right| = 1 + \frac{1}{n-1} - D_i > 1$$

Т.е. отображение $BR(\bullet): S \to S$ не удовлетворяет достаточным условиям сжимаемости.

Исследуем отображение $BR^2(\bullet) = BR(BR(\bullet)): S \to S$. С учетом написанного выше, верно, что $\forall i$

$$\sum_{\{l,k\}\in N^2} \left| \frac{\partial br^2{}_{ii}}{\partial s_{lk}} \right| = |D_i| \sum_{j\in N\setminus\{i\}} (1 + \frac{1}{n-1} - D_j).$$

Кроме того, с учетом того, что каждый агент действует по динамике Курно, получаем, что

$$\sum_{\{l,k\}\in N^2} \left| \frac{\partial br^2{}_{ji}}{\partial s_{lk}} \right| = (1 + \frac{1}{n-1} - D_i) \sum_{j\in N\setminus\{i\}} |D_j|.$$

Откуда получаем, что

$$\sum_{\{l,k\}\in N^2} \left| \frac{\partial br^2{}_{ii}}{\partial s_{lk}} \right| \le \bar{D}(n - (n-1)\underline{D}),$$

$$\sum_{\{l,k\}\in N^2} \left| \frac{\partial br^2{}_{ji}}{\partial s_{lk}} \right| \le \bar{D}(n - (n-1)\underline{D}).$$

Т.е., если выполняется условие $\bar{D}(n-(n-1)\underline{D}) < 1$, то отображение $BR^2(\bullet)$ является сжимающим.

Проанализируем, при каких $\tilde{\beta}$ это может быть достигнуто. Если $\tilde{\beta} \ge \frac{1}{2n}\max_{i\in N}(-u_i''(x_i(s)))$, то $\underline{D} \ge 0$. Тогда всегда можно обеспечить выполнение условия $\bar{D}(n-(n-1)\underline{D}) \le 1$ выбором $\underline{D} \le \bar{D} < \frac{1}{n-1}$, т.к. $\underline{D}(n-(n-1)\underline{D}) < 1$ при $\underline{D} < \frac{1}{n-1}$. Увеличение значения $\tilde{\beta}$ обеспечивает $\underline{D} \to \bar{D} \to \frac{1}{n-1}$, однако при этом $\bar{D}(n-(n-1)\underline{D}) \to 1$. Поэтому делать $\tilde{\beta}$ очень большим нецелесообразно.

Таким образом, показано, что выбором параметра $\tilde{\beta}$ механизма можно обеспечить сжимаемость отображения $BR^2(\bullet)$ при $\max_{i \in N}(-u_i''(x_i(s)) \le C$.

<u>*Доказательство утверждения 2:*</u> Из леммы 3 получаем, что итеративный процесс, стартовав в S, перейдет в $\overline{S}$. Из леммы 4 следует, что при гладких функциях полезности агентов (т.е. $\max_{i \in N}(-u_i''(x_i(s)) \le C$) выбором $\tilde{\beta}$ можно обеспечить сходимость пары итеративных процессов $s(\tau+2) = BR^2(s(\tau))$ и $s(\tau+3) = BR^2(s(\tau+1))$, где $s(\tau+1) = BR(s(\tau))$, $\tau \ge 1$ к одному и тому же равновесию Нэша, т.к. оно является единственной неподвижной точкой для каждого из этих процессов.

<u>*Доказательство леммы 5:*</u> В индуцированной механизмом $\hat{\rho} =< \hat{S}, \hat{\pi}, \hat{t} >$ игре $\Gamma(\hat{\rho})$ агенты обладают функциями предпочтения $\hat{\varphi}_i(s) = u_i(\hat{x}_i(s)) - \hat{p}_i(s)$. Очевидно, что при $\hat{\beta} > 0$ эти функции вогнутые.

Наилучший ответ агента $i \in N$ будет определяться, как решение (единственное) уравнения

$$u_i'(\hat{x}_i)(1 - \frac{1}{n}) - 2\hat{\beta}(\widehat{br}_{ii} - \hat{x}_i)\frac{1}{n} = 0.$$

С учетом (5), получаем, что равновесные сообщения агентов удовлетворяют следующей системе уравнений

$$u_i'(\hat{x}_i^*)(n-1) = 2\hat{\beta}\,\frac{\sum_{i \in N} \widehat{br}_{ii} - R}{n},\ i \in N.$$

По аналогии с леммами 1 и 2, очевидно, что решение этой системы единственно. Более того, это решение обеспечивает $\forall i \in N \ u_i'(\hat{x}_i^*) = const$, что соответствует решению задачи (1).

Доказательство утверждения 3: Эквивалентность механизмов очевидным образом следует из того факта, что решение задачи (1) единственно.

Из леммы 5 получаем, что в игре $\Gamma(\hat{\rho})$ равновесные заявки агентов удовлетворяют системе уравнений

$$u_i'(\hat{x}_i^*)(n-1) = 2\hat{\beta}\frac{\sum_{i \in N} \widehat{br}_{ii} - R}{n}, \ i \in N.$$

Из утверждения 1 следует, что в игре $\Gamma(\rho)$

$$u_i'(x^*{}_i) = 2\tilde{\beta}(\sum_{i \in N} br_{ii} - R).$$

Следовательно, $\forall i \in N \ br_{ii} = \widehat{br}_{ii}$ при $\hat{\beta} = \tilde{\beta}\frac{1}{n(n-1)}$. Т.е

$$\hat{\beta} = \beta\frac{n-\alpha-1}{n(n-1)^2}.$$

Литература

1. БУРКОВ В.Н., ДАНЕВ Б., ЕНАЛЕЕВ А.К. *Большие системы: моделирование организационных механизмов.* – М.: Наука, 1989. – С. 248.
2. БУРКОВ В.Н., ДЖАВАХАДЗЕ Г.С., ДИНОВА Н.И., ЩЕПКИН Д.А. *Применение игрового имитационного моделирования для оценки эффективности экономических механизмов.* – М.: ИПУ РАН, 2003. – 51 с.
3. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами.* - М.: Синтег, 2002. – 148 с.
4. ГУБКО М.В., СПРЫСКОВ Д.С. *Учет кооперативных взаимодействий в механизмах планирования* // Управление большими системами. Выпуск 2. – М.: Фонд «Проблемы управления», 2000. – С. 28-38.
5. ИСКАКОВ М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях и равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх.* // Автоматика и Телемеханика. – 2008. – №2. – С. 114-134.
6. КОРГИН Н. А. *Представление механизма последовательного распределения ресурсов как неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы* // Управление большими системами. – 2012. – Выпуск 36.. – С. 186-208.
7. КОРГИН Н.А., ХРИСТЮК А.А. *Эффективный механизм активной экспертизы с платой за участие как инструмент принятия согласованных решений.* // Вестник Воронежского государственного технического университета. – Т. 7, №6. – С. 117-121.
8. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления* // Проблемы управления. – 2011. – № 1. – С. 21-32.

9. МАЗАЛОВ В.В., МЕНЧЕР А.Э., ТОКАРЕВА Ю.С. *Переговоры. Математическая теория.* Санкт-Петербург-Москва-Краснодар, Лань, 2012. - 304 с.
10. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* – 3-е изд. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2012. – С. 604.
11. ARIFOVIC, J., LEDYARD, J. O. *A behavioral model for mechanism design: Individual evolutionary learning.* // Journal of Economic Behavior and Organization. – 2011. – № 78. – P. 375-395.
12. BARBERÁ S., JACKSON M., NEME A. *Strategy-Proof Allotment Rules* // Games and Economic Behavior. – 1997. – Vol. 18, Issue 1. – P. 1-21.
13. BASAR T., MAHESWAREN R. *Social welfare of selfish agents: Motivating efficiency for divisible resources //* Proc. Control Decision Conf. (CDC). – 2004. – P.361 -395.
14. BOYD S., PARIKH N., CHU E. *Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers* // Foundations and Trends in Machine Learning. – 2011. – Vol.3, №1. – P. 1-122.
15. FISCHBACHER U. *z-Tree - Zurich Toolbox for Ready-made Economic Experiments //* Experimental Economics. – 2007. – Vol.10, №2. – P. 171-178.
16. GOETZ R., MARTINEZ Y., AND JOFRE, R. *Water allocation by social choice rules: The case of sequential rules* // Ecological Economics. – 2008. – №65 (2). – P.304–314.
17. GROVES T., LEDYARD J. O. *Optimal allocation of public goods: A solution to the ‘freerider’ problem* // Econometrica. – 1977. – № 45. – P. 783–809.
18. HEALY P., MATHEVET L. *Designing stable mechanisms for economic environments," Theoretical Economics* // Econometric Society. – (в печати).

19. HURWICZ L. *Outcome functions yielding Walrasian and Lindahl allocations at Nash equilibrium points* // Review of Economic Studies. – 1979. – № 46. – P. 217–225.
20. JAIN R., WALRAND J. *An efficient nash-implementation mechanism for divisible resource allocation* // Automatica. – 2010. – Vol.46, № 8. – P.1276 -1283.
21. JOHARI R., TSITSIKLIS J.N. *Efficiency of Scalar-Parameterized Mechanisms //*Operations Research. – 2009. – № 57. – P. 823-839.
22. KAKHBOD A., TENEKETZIS D. *An efficient game form for unicast service provisioning //* IEEE Trans. Autom. Control. – 2012. – Vol. 57, № 2. – P. 392 -404.
23. LEFEBVRE M. *Sharing Rules for Common-Pool Resources when Self-insurance is Available: an Experiment* // Working Papers 11-22, LAMETA, Universtiy of Montpellier. – 2012. – P.42.
24. MASKIN E. *The Theory of Nash Equilibrium: A Survey* // Hurwicz L., Schmeidler D., Sonnenschein H. Social Goals and Social Organization (Cambridge: Cambridge University Press. – 1985. – P. 173-204.
25. MATHEVET L. *Supermodular mechanism design* // Theoretical Economics, Econometric Society. – 2010. – Vol.5(3). – P.403–443.
26. MOULIN H. *An efficient and almost budget balanced cost sharing method* // Games and Economic Behavior. – 2010. – Vol.70,Issue 1. – P.107–131.
27. SPRUMONT Y. *The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform rule* // Econometrica. – 1991. – Vol.59. – P.509–519.
28. VAN ESSEN M. *A note on the stability of Chen's Lindahl mechanism* // Social Choice and Welfare, Springer. – 2012. – Vol.38(2). – P.365-370.
29. WALKER M. *A simple incentive compatible scheme for attaining Lindahl allocations* // Econometrica. – 1981. – № 49. – P. 65–71.

EFFICIENT SOLUTION OF ALLOTMENT PROBLEM ON THE BASIS OF GROVES-LEDYARD MECHANISM WITH TRANSFERABLE UTILITY

Korgin Nikolay, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., leading scientist, Moscow Institute of Physics and Technology, associate professor (nkorgin@ipu.ru).

Korepanov Vsevolod, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior scientist

Abstract: We design the mechanism, which implements Pareto efficient allocation of limited amount of infinitely divisible good among finite number of agents with transferable utility as Nash equilibrium of the game, induced by it. This mechanism is adaptation of Groves-Ledyard "quadratic government", that was initial offered for solution of public good problem.

Keywords: mechanism design, Nash implementation, allotment problem.