

МНОГОШАГОВЫЕ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С ПРИНЯТИЕМ РЕШЕНИЙ НА КАЖДОМ ШАГЕ ПРИ АГРЕГИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЫБОРЕ «ОСТОРОЖНОГО» ВТОРОГО ИГРОКА

Алиев В.С.¹

(ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации», Москва)

Рассматривается многошаговая игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при информации на каждом ходу о сложившейся к моменту принятия решения предыстории игры и агрегированной информации о выборе игрока 2 на этом ходу. Игрок 1, обладая на каждом шаге этой информацией, первым выбирает на этом шаге свою стратегию и сообщает её второму только на очередной ход. Игрок 2, получая информацию о выборе игрока 1, действует осторожно, т.е. выбором стратегии на этом ходе стремиться к увеличению своей функции выигрыша. Найдены максимальные гарантированные результаты и соответствующие оптимальные (эпсилон оптимальные) стратегии первого игрока на каждом шаге.

Ключевые слова: игра, агрегирование, оптимальная стратегия, максимальный гарантированный результат.

1. Введение

При решении адекватных математических моделей социально-экономических систем одним из методов преодоления трудностей, связанных с большой размерностью является замена исходной задачи другой задачей, более агрегированной (укрупненной). Здесь агрегированием называется переход от неко-

¹ Алиев Вагиф Судеиф оглы, доцент, кандидат физико - математических наук (Aliiev_VS@mail.ru, тел. 8-499-760-96-22).

торого вектора экономических показателей к вектору интегральных показателей гораздо меньшей размерности.

В результате решения агрегированной задачи определяются значения укрупненных переменных, которые обычно не совпадают со значениями аналогичных агрегатов, получаемых при укрупнении точного решения первоначальной задачи. Разность между укрупненными переменными решения агрегированной задачи и значениями аналогичных агрегатов, получаемых при укрупнении точного решения первоначальной задачи, называется *ошибкой агрегирования*. Классическая теория агрегирования изучает методы нахождения наилучшего способа агрегирования, которые максимально уменьшали бы ошибку агрегирования.

Методы классического агрегирования применялись для решения весьма широкого круга задач. Однако, несмотря на это, теория классического агрегирования, за исключением конкретных случаев, не решила проблемы устранения ошибки агрегирования и, главное, — проблемы дезагрегирования, т.е. получить решения исходной задачи. Для устранения этих недостатков в экономико-математических исследованиях появились методы итеративного агрегирования, позволяющие получать значения укрупненных и детализированных показателей плана с любой заранее заданной точностью.

Исследование социально-экономических систем и моделей с помощью теории агрегирования и теории игр, как аппарат анализа иерархических систем управления, велось параллельно, независимо друг от друга.

Вопросы агрегирования, исследованные для управляемых динамических системах, оптимизационных задач, активных систем можно рассматривать как продукт синтеза этих двух направлений решения задач с большой размерностью. Однако ни в классической теории игр, ни в дифференциальных играх и играх с противоположными интересами, вопросы агрегирования не рассматривались. Впервые вопросы агрегирования в игровых задачах рассматривались автором в работах [1–7].

Настоящая работа посвящена вопросам принятия решений в многошаговых играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе игро-

ка 2 на этом ходу и информации о сложившейся к моменту принятия решения предыстории игры. Она отличается от игры, рассмотренной в [7] тем, что игрок 1 сообщает второму свою стратегию последовательно, т.е. только на очередной ход. В этой игре процедура принятия решений для каждого из игроков существенно многошаговая.

2. Постановка задачи

Рассматривается многошаговая игра двух лиц. Функции выигрыша игроков, соответственно, $f_i(x, v)$, $i=1, 2$, к увеличению значения которых каждый из них стремится, предполагаются непрерывными, а x, v выбираются из соответствующих множеств

$$X = \prod_{i=1}^n X_i \subset E^k, \quad V = \prod_{i=1}^n V_i \subset E^m,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $x_i \in X_i \subset E^{k_i}$, $v_i \in V_i \subset E^{m_i}$, $i = \overline{1, n}$, $n < m$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$, $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$; X, V, X_i, V_i , $i = 1, \dots, n$ — компактные множества; $E^k, E^m, E^{k_i}, E^{m_i}$, $i = 1, \dots, n$ — евклидовы пространства соответствующей размерности.

В отличие от [6], [7] будем предполагать, что агрегированный вектор выбора игрока 2 $y = (y_1, \dots, y_n) = (T_1(v_1), \dots, T_n(v_n))$, при отсутствии информации о выборе v , будет известен игроку 1 последовательно в n шагов, где

$$v_i \in V_i, y_i \in E^{r_i}, r_i < m_i, i = 1, \dots, n, \text{ а } T_i(\cdot) : E^{m_i} \rightarrow E^{r_i} \text{ —}$$

известные игрокам непрерывные на V_i , $i = 1, \dots, n$, операторы.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i), \quad \bar{y}_i = (y_1, \dots, y_i), \quad \bar{v}_i = (v_1, \dots, v_i),$$

$$\bar{T}_i(\bar{v}_i) = (T_1(v_1), \dots, T_i(v_i)), \quad \bar{x}_i(\bar{T}_i(\bar{v}_i)) = (x_1(\bar{T}_1(\bar{v}_1)), \dots, x_i(\bar{T}_i(\bar{v}_i)));$$

$$Y_i(T_i) = T_i(V_i) \text{ — образ множества } V_i,$$

$$V_i(y_i, T_i) = T_i^{-1}(y_i) \cap V_i \text{ — пересечение прообраза } y_i \in Y_i(T_i) \text{ с множеством } V_i,$$

$$\bar{V}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i) = \prod_{k=1}^i V_k(y_k, T_k), \quad \bar{V}_i = \prod_{k=1}^i V_k,$$

$$\bar{X}_i = \prod_{k=1}^i X_k, \quad \bar{Y}_i(\bar{T}_i) = \prod_{k=1}^i Y_k(T_k), \quad i = 1, \dots, n;$$

$$T(\cdot) = (T_1(\cdot), \dots, T_n(\cdot)), \quad V(y, T) = \prod_{i=1}^n V_i(y_i, T_i).$$

Будем предполагать, что множеством стратегий игрока 1 на i -м ходу является множество произвольных функций $\tilde{x}_i(\cdot)$, аргументами, которых являются сложившаяся к моменту принятия решения агрегированная предыстория $\bar{x}_{i-1}$, $\bar{y}_{i-1}$ и агрегированный выбор игрока 2 на i -м ходу y_i где $\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}) \in X_i$. Обозначим это множество через $\tilde{X}_i$.

Стратегией игрока 2 на i -м ходу ($1 \leq i \leq n$) является $v_i \in V_i$, а агрегированной стратегией $y_i \in Y_i(T_i)$.

Введем следующие обозначения:

$$v_i(y_i, T_i) = v_i = V_i(y_i, T_i), \quad y_i \in Y_i(T_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$L_n^n(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n), T_{n+1,n}) = f_2(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n)),$$

$$(1) \quad F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}) = \\ = \max_{v_i \in V_i(y_i, T_i)} L_i^n(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, \bar{T}_{i+1,n}),$$

$$(2) \quad L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), \bar{T}_{i,n}) = \\ = \max_{y_i \in Y_i(T_i)} \min_{x_i \in X_i} F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}), \\ T_{i,n} = (T_i, \dots, T_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

В нашем изложении обозначение $T_{n+1,n}$, z_0 означают отсутствие таких аргументов.

Рассмотрим агрегированный аналог игры, исследованный в [8], и назовем его игрой $\Gamma_2^n(T)$.

В отличие от игры, рассмотренной в [7], будем предпола-

гать, что игрок 1 сообщает второму свои стратегии $x_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$, последовательно, т.е. только на очередной ход. Кроме того, предположим, что игрок 2 не знает интересов игрока 1 и на каждом i -м ходе ($1 \leq i \leq n$), получая информацию о выборе $x_i(\cdot)$ игрока 1, не имея информации о намерениях и последующих стратегиях его, будет действовать осторожно, т.е. выбором стратегии на i -м ходе стремиться к увеличению агрегированную функцию выигрыша для i -го хода $F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n})$. Такая информированность и поведение игрока 2 известна первому.

На i -м ходу ($1 \leq i \leq n$) игрок 2 в соответствии со своим правилом поведения стратегию v_i он выбирает из множества

$$\begin{aligned} R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}) = \\ = \{v_i \in V_i \mid L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, \bar{T}_{i+1,n}) = \\ = F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}) \geq \\ \geq \max \{L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}); \\ \sup_{v_i \in V_i} L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}) - \\ - \delta_i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n})\} \}, \end{aligned}$$

где $\delta_i(\cdot)$ известный игроку 1 функционал, причем $\delta_i(\cdot) = 0$, если в определении $R_i^n(\cdot)$ супремум достигается, и равен числу $\delta_i > 0$ в противном случае.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_n^n(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n), T_{n+1,n}) = f_1(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n)); \\ \gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}) = \\ = \sup_{\tilde{x}_i(\cdot) \in \tilde{X}_i} \inf_{v_i \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i), T_{i,n})} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\ \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}), i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь $\gamma_i^n(\bar{x}_i, \bar{v}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i), T_{i+1,n}^-)$ является промежуточной функцией выигрыша, а $\gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ максимальным гарантированным результатом игрока 1 на i -м ходу, $i = 1, \dots, n$.

В соответствии с [2, 6, 7], введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
X_i^{n,\mu}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) &= \text{Arg} \min_{x_i \in X_i} F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\
V_i^{n,+}(\bar{x}_i, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) &= \text{Arg} \max_{v_i \in V_i(y_i, T_i)} L_i^n(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-), \\
E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \text{Arg} \max_{y_i \in Y_i(T_i)} \min_{x_i \in X_i} F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\
f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n), T_{n+1,n}^-) &= f_1(\bar{x}_n, \bar{v}_n(\bar{y}_n, \bar{T}_n)), \\
F_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) &= \\
= \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)} f_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i,n}^-), \\
M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \\
= \inf_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} \sup_{x_i \in X_i} F_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\
D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \\
= \{(x_i, y_i) \in X_i \times Y_i(T_i) \mid F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) > L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)\}, \\
K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \\
= \sup_{(x_i, y_i) \in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} F_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\
f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) &= \\
= \max \{ K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \}, i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Введем малые числа ε_i ($\varepsilon_i > 0$) и определим точки

$$(x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)),$$

$$x_i^{a, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \quad x_i^{h, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-),$$

$i = 1, \dots, n$, следующим образом:

$$\begin{aligned}
& (x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)) \in \\
& D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-): \\
& F_1^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-) \geq \\
& \geq K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) - \varepsilon_i, \\
& x_i^{a, \varepsilon_i}(\cdot) \in \tilde{X}_i^i: F_1^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \geq \\
& \geq \sup_{x_i \in X_i} F_1^i(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) - \varepsilon_i, \\
& x_i^{h, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \in X_i^{n, h}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-): \\
& F_1^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{h, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \geq \\
& \geq \sup_{x_i \in X_i^{n, h}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)} F_1^i(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) - \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем везде принято соглашение, что для любой функции $\psi(\cdot)$ выполняются следующие равенства:

$$\max_{u \in \emptyset} \psi(u) = \sup_{u \in \emptyset} \psi(u) = -\infty, \quad \min_{u \in \emptyset} \psi(u) = \inf_{u \in \emptyset} \psi(u) = +\infty,$$

где $\emptyset$ — пустое множество.

Точно так же, как лемму 1 из [6], можно доказать следующую лемму.

Л е м м а . Множества $V_i(y_i, T_i)$, $V_i^{n, +}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)$, $Y_i(T_i)$, $i = 1, \dots, n$ являются компактными; функции $F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны по $(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1})$ и полунепрерывны сверху по y_i соответственно на множествах $\bar{X}_i \times \bar{V}_{i-1}$ и $Y_i(T_i)$; максимумы и минимумы в (1), (2) достигаются.

Теорема. В сформулированных условиях максимальный гарантированный результат $\gamma_0^n(T)$ игрока 1 в игре $\Gamma_2^n(T)$ равен

$\gamma_0^n(T) = f_1^0(T) = \max \{ K_1^n(T), M_1^n(T) \}$, при этом его максимальный гарантированный результат на i -м ходу равен

$$\gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) =$$

$$\max [K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)],$$

$i = 1, \dots, n$. Эти результаты на i -м ходу гарантируют ему (может быть, с ε_i -точностью) стратегии:

$$\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-) = \begin{cases} x_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \\ \text{если } y_i = y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \\ \text{и } K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-); \\ x_i^{a, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \\ \text{если } y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \\ \text{и } K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) < M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-); \\ x_i^{n, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$.

Доказательство теоремы. Сначала докажем некоторые соотношения, которые необходимо будут для доказательства того, что при достаточно малых положительных чисел $\varepsilon_i > 0$, стратегия $\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot)$ гарантирует игроку 1 выигрыш $\max [K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)] - \varepsilon_i$.

Пусть $K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, тогда стратегия $\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot)$ гарантирует использование игроком 2 такой стратегии $v_i \in V_i$, что выполняются условия

$$y_i = y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}, T_{i,n}^-).$$

Действительно, в этом случае он получит выигрыш

$$\begin{aligned} L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) = \\ = F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

А при выборе $v_i \in V_i \setminus V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)$ игрок 2 может обеспечить себе лишь выигрыш

$$L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) < \\ < F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-).$$

В самом деле, при $y_i = y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, $v_i \in V_i(y_i^{\varepsilon_i}, T_i) \setminus V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}, T_{i,n}^-)$ игрок 2 может обеспечить себе выигрыш

$$L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) < \\ < F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-),$$

а при $y_i \neq y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, $v_i \in V_i(y_i, T_i)$ выигрыш

$$L_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{n,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \leq \\ \leq F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{n,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \leq \\ \leq L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) < \\ < F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-).$$

Получаем, что в случае $K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$\delta_i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = 0, \\ R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) = \\ = V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-), \\ (3) \quad \gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq \\ \geq \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), T_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \bar{v}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i), T_{i+1,n}^-).$$

Если же, $K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) < M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, тогда стратегия $\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot)$ гарантирует использование игроком 2 стратегии

$$v_i \in \bigcup_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-).$$

Действительно, в этом случае ему обеспечивается выигрыш

$$\begin{aligned} & L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) = \\ & = F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \geq \\ & \geq L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

При выборе стратегию

$$v_i \in \bigcup_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} V_i(y_i, T_i) \setminus V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-)$$

игрок 2 может получить выигрыш

$$\begin{aligned} & L_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) < \\ & < F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \end{aligned}$$

в противном случае выигрыш

$$\begin{aligned} & L_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{h,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \leq \\ & \leq F_2^i(\bar{x}_{i-1}, x_i^{h,\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) < \\ & < L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

Поэтому, в силу определения множества, получаем, что при $K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) < M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}^-) \subseteq \\ & \subseteq \bigcup_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \end{aligned}$$

$$(4) \quad \gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq \inf_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \\ \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, x_i^{a, \varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \\ \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_i(\bar{y}_i, \bar{T}_i), T_{i+1,n}^-).$$

Теперь докажем тоже некоторые соотношения, которые необходимо будут для доказательства того, что игрок 1 при любой стратегии $\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i) \in \tilde{X}_i$ не может гарантированно получить выигрыш более чем

$$\max[K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)].$$

Предположим, что

$$\sup_{y_i \in Y_i(T_i)} F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) > \\ > L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-).$$

Тогда существует такая агрегированная стратегия $y' \in Y_i(T_i)$, что

$$F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y', T_{i,n}^-) > \\ > L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$$

$$\text{и такая стратегия } v_i^* \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y', T_{i,n}^-),$$

что справедливо включение

$$(\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), T_i(v_i^*)) \in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-).$$

Действительно, в противном случае для любых

$$v_i^* \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y', T_{i,n}^-) \text{ и}$$

$$v_i' \in V_{i-1}^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y', T_{i,n}^-) \text{ справедливы}$$

следующие соотношения:

$$L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i'), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i', T_{i+1,n}^-) = \\ = F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y', T_{i,n}^-) \geq \\ \geq L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), T_{i,n}^-) = \\ &= L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i^*, T_{i+1,n}^-). \end{aligned}$$

Таким образом, можно делать вывод, что

$$\begin{aligned} &V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', T_{i,n}^-) \subseteq \\ &\subseteq R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', \bar{T}_{i,n}^-) \end{aligned}$$

и для любого $v_i' \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i', T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i', T_{i,n}^-)$ справедливо включение

$$(\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, y_i', T_{i,n}^-), y_i') \in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-).$$

Полученное противоречие показывает, что такая стратегия v_i^* существует и справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (5) \quad &V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), T_{i,n}^-) \subseteq \\ &\subseteq R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), \bar{T}_{i,n}^-); \\ &\inf_{v_i \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), \bar{T}_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\ &\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \leq \\ &\leq \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i^*), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i(v_i^*), T_{i,n}^-)} \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\ &\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-)). \end{aligned}$$

Теперь предположим, что

$$\begin{aligned} &\sup_{y_i \in Y_i(T_i)} F_2^i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) = \\ &= L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-). \end{aligned}$$

(по определению $L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, здесь знак больше ($>$) не может быть). Тогда для любого $y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{v_i \in V_i} L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, \bar{T}_{i+1,n}^-) \geq \\
&\geq \sup_{v_i \in V_i(y_i, T_i)} L_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, \bar{T}_{i+1,n}^-) \geq \\
&\geq \min_{x_i \in X_i} F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) = L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что в этом случае для любого $y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\delta_i(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = 0, \\
&V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \subseteq \\
&\subseteq R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}^-), \\
&\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-) \in X_i^{n,u}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-).
\end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
(6) \quad &v_i \in R_i^n(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\cdot), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, \bar{T}_{i,n}^-) \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\
&\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-) \leq \\
&\leq \inf_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, v_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)} \\
&v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_{i-1}, \tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), T_{i,n}^-), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n}^-) \gamma_i^n(\bar{x}_{i-1}, \\
&\tilde{x}_i(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}, T_i(v_i), \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}^-).
\end{aligned}$$

Пусть $i=n$. Сначала докажем, что при достаточно малых чисел $\varepsilon_n > 0$ стратегия $\tilde{x}_n^{\varepsilon_n}(\cdot)$ гарантирует игроку 1 выигрыш $\max[K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)] - \varepsilon_n$.

Из (3) получим

$$\begin{aligned}
(7) \quad &\gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) \geq \\
&\geq \inf_{v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n^{\varepsilon_n}, T_{n,n}^-)} f_1^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n), T_{n,n}^-), \\
&\bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) =
\end{aligned}$$

$$= F_1^n(\bar{x}_{i-1}, x_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), T_{n,n}^-) \geq K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) - \varepsilon_n.$$

А из (4) получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} (8) \quad & \gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) \geq \\ & \geq \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, v_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)} \inf_{v_n \in V_{n,n}^{+,*}(\bar{x}_{n-1}, x_n^{a,\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_n)} f_1^n(\bar{x}_{n-1}, \\ & x_n^{a,\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) = \\ & = \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, v_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n)} F_1^n(\bar{x}_{i-1}, x_n^{a,\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-) \geq \\ & \geq M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) - \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Из (7) и (8) получим

$$\begin{aligned} (9) \quad & \gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) \geq \\ & \geq \max[K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)] - \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Учитывая (5), можно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} (10) \quad & \inf_{v_n \in R_n^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n(\cdot), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n(v_n^*), \bar{T}_{n,n}^-)} \gamma_n^n(\bar{x}_{n-1}, \\ & \tilde{x}_n(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) \leq \\ & \leq F_1^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n^*), T_{n,n}^-), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n(v_n^*), T_{n,n}^-) \leq \\ & \leq K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-). \end{aligned}$$

А если учесть (6), можно записать следующие неравенства

$$\begin{aligned} (11) \quad & \inf_{v_n \in R_n^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n(\cdot), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n(v_n^*), \bar{T}_{n,n}^-)} \gamma_n^n(\bar{x}_{n-1}, \\ & \tilde{x}_n(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_n(v_n), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-) \leq \\ & \leq \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, v_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)} F_1^n(\bar{x}_{n-1}, \tilde{x}_n(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, T_{n,n}^-), T_{n,n}^-), \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-) \leq \end{aligned}$$

$$\leq M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-).$$

В силу произвольности стратегии $\tilde{x}_n(\cdot)$ из (10), (11) получим

$$(12) \quad \gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) \leq \\ \leq \max[K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)].$$

В силу произвольности ε_n и выполнении соотношений (9), (12) получим

$$(13) \quad \gamma_{n-1}^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) = \max[K_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-), \\ M_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)] = f_1^{n-1}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-).$$

Это результат на n -м ходу гарантирует игроку 1 (может быть, с ε_n -точностью) стратегия $\tilde{x}_n^{\varepsilon_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_n, T_{n,n}^-)$, сформулированная в теореме 1.

Аналогично, выполняя процесс доказательства соотношений (7) - (13), для $i = n-1, n-2, \dots, 1$ получим

$$(14) \quad \gamma_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-) = \max[K_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \\ M_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)] = f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-), \quad i = 1, \dots, n.$$

Эти результаты на i -м ходу гарантируют игроку 1 (может быть, с ε_i -точностью) стратегии $\tilde{x}_i^{\varepsilon_i}(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_i, T_{i,n}^-)$, $i = 1, \dots, n$, сформулированные в теореме 1.

Более подробное описание для максимальных гарантированных результатов игрока 1 на i -м ходу $f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}^-)$, $i = 1, \dots, n$ выглядит следующим образом:

$$f_1^{n-1}(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-) = \max \left\{ \sup_{(x_n, y_n) \in D_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n)} \right. \\ \left. \inf_{v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}^-)} f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}^-), \right. \\ \left. \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n}^-)} \sup_{x_n \in X_n} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \left. v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n}) \right\} f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}) \Big\} ; \\
& f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n}) = \max \Big\{ \sup_{(x_i, y_i) \in D_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_i)} \\
& \quad \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n})} f_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}), \\
& \quad \inf_{y_i \in E_i^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), T_{i,n})} \sup_{x_i \in X_i} \\
& \quad \inf_{v_i \in V_i^{n,+}(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), y_i, T_{i,n})} f_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}, \bar{T}_{i-1}), v_i, T_{i+1,n}) \Big\} = \dots \\
& \dots = \max \Big\{ \sup_{(x_n, y_n) \in D_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_n)} \\
& \quad \inf_{v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n})} f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}), \\
& \quad \inf_{y_n \in E_n^n(\bar{x}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), T_{n,n})} \sup_{x_n \in X_n} \\
& \quad \inf_{v_n \in V_n^{n,+}(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), y_n, T_{n,n})} f_1^n(\bar{x}_n, \bar{v}_{n-1}(\bar{y}_{n-1}, \bar{T}_{n-1}), v_n, T_{n+1,n}) \Big\} , \\
& i = 1, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Аналогичная процедура, проведенная последовательно до $i=1$, дает $f_1^0(T) = \gamma_0^n(T) = \max[K_0^n(T), M_0^n(T)]$.

Теорема доказана.

3. Замечание

Отметим, что в игре $\Gamma_2^n(T)$, при рассмотрении задачи с конца, функции $L_i^n(\bar{x}_i, \bar{v}_i, T_{i+1,n})$ являются промежуточными функциями выигрыша, $F_2^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}, y_i, T_{i,n})$ — промежуточными агрегированными функциями выигрыша, а функции

$L_{i-1}^n(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}, T_{i,n}^-)$ — промежуточными максимальными гарантированными результатами игрока 2 на i -м ходу, $i = 1, \dots, n$.

Для игрока 1 соответственно функции $f_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_i, T_{i+1,n}^-)$ являются функциями выигрыша, $F_1^i(\bar{x}_i, \bar{v}_{i-1}, y_i, T_{i,n}^-)$ — агрегированными функциями выигрыша, а функции $f_1^{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \bar{v}_{i-1}, T_{i,n}^-)$ — максимальными гарантированными результатами на i -м ходу, $i = 1, \dots, n$.

Литература

1. АЛИЕВ В.С., КОНОНЕНКО А.Ф. *О принятии коллективных решений по агрегированной информации* / Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации (тезисы докладов). — Москва — Алма-Ата, 1981, С. 324–325.
2. АЛИЕВ В.С., ЦВЕТКОВ А.В. *Игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации* / Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах: Сб. трудов. М.: Институт проблем управления, 1985, С. 35–42.
3. АЛИЕВ В.С. *Динамические игры двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о текущем состоянии системы* / Неантагонистические дифференциальные игры и их приложения. Межвузовский сборник научных трудов. М.: всесоюзный заочный машиностроительный институт, 1986, С. 63–71.
4. АЛИЕВ В.С., КОНОНЕНКО А.Ф. *Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях* / Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
5. АЛИЕВ В.С., КОНОНЕНКО А.Ф. *Об условиях точного агрегирования информации в теоретико-игровых моделях* / сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1991.

6. АЛИЕВ В.С., КОНОНЕНКО А.Ф. *некоторые вопросы принятия решений в играх двух лиц при агрегированной информации* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997, Т. 37, № 10, С. 1163-1173.
7. АЛИЕВ В.С. КОНОНЕНКО А.Ф. *Многошаговые игры двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе партнера.* // Атоматика и телемеханика, 2005, № 2. С. 108-114.
8. ДАНИЛЬЧЕНКО Т.Н., МОСЕВИЧ К.К. *Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, Т. 14, № 5, С. 1323-1327.