УДК 519.86
ББК 65с

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЦЕЛЕВОГО И НЕЦЕЛЕВОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ В ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Горбанева О.И.[2], Угольницкий Г.А.[3]
(*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*)

В статье рассматривается система, состоящая из двух уровней: верхнего и нижнего. Каждый из двух участников имеет общесистемные интересы, которые мы назовем целевыми, и свои частные интересы, которые мы назовем нецелевыми. Исследуется модель распределения ресурсов между целевым и нецелевым направлениями для различных классов функций выигрыша. Задача представлена в виде иерархической игры, в которой находилось равновесие по Штакельбергу.

Ключевые слова: распределение ресурсов, целевые интересы, нецелевые интересы, равновесие по Штакельбергу.

1. Введение

Множество задач социально-экономического развития решается благодаря бюджетному финансированию. Последнее

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проекты №* *12-01-00017, 12-01-31287*) *и Южного федерального университета.*
[2] *Ольга Ивановна Горбанева, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель* (gorbaneva@mail.ru).
[3] *Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор* (ougoln@mail.ru).

осуществляется в различных формах (дотации, субвенции, субсидии, ассигнования, кредиты) и всегда носит строго целевой характер, т.е. выделенные средства должны расходоваться только на указанные нужды. Статья 289 Бюджетного кодекса РФ и статья 15.14 Кодекса РФ об административных правонарушениях предусматривают ответственность за нецелевое использование бюджетных средств. Тем не менее, нецелевое использование бюджетного финансирования широко распространено на практике и может рассматриваться как разновидность оппортунистического поведения, отвечающего частным интересам активных агентов [8].

Нецелевое использование ресурсов тесно связано с коррупцией, в особенности с так называемыми «откатами», когда бюджетные средства по тем или иным программам выделяются в обмен на взятку и лишь частично используются по назначению, а в значительной степени расходуются в личных интересах агентов-взяткодателей.

Проблему нецелевого использования ресурсов естественно трактовать с точки зрения согласования интересов в иерархических системах управления. Это позволяет использовать математический аппарат теории иерархических игр [9], теории контрактов [10], информационной теории иерархических систем [3], теории активных систем [1] и теории организационных систем [7]. В то же время, собственно модели распределения ресурсов в иерархических системах с учетом их нецелевого использования мало изучены (в определенной степени можно сослаться на пионерскую работу [2]) и анализируются в авторской линии исследований [4-6].

Основное внимание в настоящей статье уделяется вопросу о том, как зависит распределение ресурсов между целевым и нецелевым направлениями для различных классов функций выигрыша, характеризующих общий (общественный) интерес и частные интересы распорядителя и получателя ресурсов.

2. Структура исследования

Будем рассматривать двухуровневую систему управления, состоящую из одного элемента верхнего уровня А1 (распорядителя ресурсов) и одного элемента нижнего уровня А2 (получателя ресурсов). Верхний уровень имеет некоторое количество ресурсов, которое без ограничения общности примем за единицу. Часть средств распорядитель передает получателю для целевого использования, оставшуюся часть оставляет себе на нецелевые расходы. В свою очередь, нижний уровень забирает часть средств на свои нужды (нецелевое использование), а остальная часть расходуется на общие цели (целевое использование). Оба уровня участвуют в доходе от целевой деятельности и имеют свои функции выигрыша (рис.1).

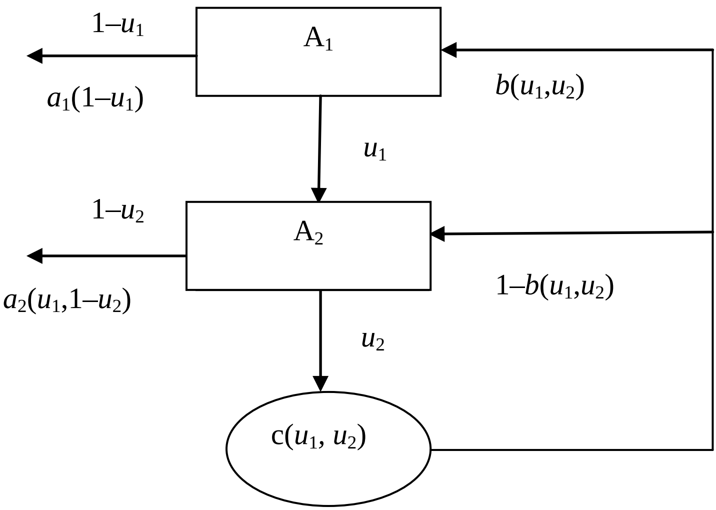

Рис. 1.Структура моделируемой системы

Модель строится в виде иерархической игры двух лиц, в которой ищется равновесие по Штакельбергу [9]. В функцию выигрыша каждого игрока включаются два слагаемых: доход от нецелевой деятельности и соответствующая доля дохода от целевой деятельности системы. Функции выигрыша имеют следующий вид:

$$g_1(u_1,u_2) = a_1(1-u_1) + b_1(u_1,u_2)c(u_1,u_2) \to \max_{u_1},$$

$$g_2(u_1,u_2) = a_2(u_1,1-u_2) + b_2(u_1,u_2)c(u_1,u_2) \to \max_{u_2}$$

при ограничениях

$$0 \le u_i \le 1$$

и условиях на функции a, b и c

$$a_i \ge 0,\ \frac{\partial a_i}{\partial u_i} \le 0,\ \frac{\partial a_i}{\partial u_{j\ne i}} \ge 0,\ b_i \ge 0,\ \frac{\partial b_i}{\partial u_i} \ge 0,\ \frac{\partial c}{\partial u_i} \ge 0,\ i=1, 2.$$

Здесь индекс 1 относится к характеристикам верхнего уровня (ведущего игрока), индекс 2 относится к характеристикам нижнего уровня (ведомого игрока);

u_i – доля ресурсов, выделенных i-м уровнем на целевое использование (соответственно, $1-u_i$ остается на нецелевое использование ресурсов в личных интересах);

g_i – функция выигрыша i-го уровня;

a_i – функция частного интереса i-го уровня;

b_i– доля дохода от целевой деятельности, получаемая i-м уровнем;

c – функция целевого дохода системы (общества, организации).

В качестве функций a и c рассматриваются степенные, линейные, показательные и логарифмические функции относительно переменных u_1 и u_2, кумулятивные по их совокупности, т.е. $a_1=a_1(1-u_1)$, $a_2=a_2(u_1\ (1-u_2))$, $c=c(u_1u_2)$. В этом случае на общие цели расходуется доля ресурсов в размере u_1u_2.

Соотношения $a_1=a_1(1-u_1)$, $a_2=a_2(u_1\ (1-u_2))$ отражают иерархическую структуру системы. Доход от нецелевой деятельности верхнего уровня не зависит от того, какую часть средств нижний уровень направит на общие цели, а вот доход от нецелевой деятельности нижнего уровня зависит от того, какую часть средств передаст ему верхний уровень на общие цели.

Рассматриваются следующие виды распределений целевого дохода b:

1) равномерное, при котором доли участия в доходе от целевой деятельности одинаковы для обоих игроков, в частности, при n=2

$$b_i = \frac{1}{2},\ i = 1, 2.$$

2) пропорциональное, при котором доли участия пропорциональны долям, выделенным соответствующим уровнем на общие цели, т.е.

$$b_1 = \frac{u_1}{u_1 + u_2},\quad b_2 = \frac{u_2}{u_1 + u_2}.$$

В данной работе рассматривается случай, когда весь доход без остатка распределен между игроками системы:

$$b_1 + b_2 = 1.$$

Стратегией игрока является доля u_i от имеющихся у него средств, направляемых на общие цели. Право первого хода принадлежит игроку верхнего уровня, который выбирает и сообщает игроку нижнего уровня значение u_1, после чего второй игрок, зная решение первого, выбирает оптимальное для себя значение u_2.

Целью исследования является изучение влияния соотношения функций a_1, a_2, b_1, b_2, c на решение игры (равновесие по Штакельбергу).

В качестве функций нецелевого использования ресурсов брались:

- степенная с показателем меньше единицы ($a(x)=ax^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, $a>0$),

- линейная ($a(x)=ax$, которая является частным случаем степенной с показателем, равным 1),

- степенная с показателем больше единицы, ($a(x)=ax^k$, $k>1$, $a>0$);

- экспоненциальная ($a(x)=a(1-e^{-\lambda x})$, $\lambda>0$, $a>0$);

- логарифмическая ($a(x)=a\log_2(1+x)$, $a>0$).

Как правило, функции выбирались с условиями $\partial a/\partial x\geq 0$, $\partial^2 a/\partial x^{2\leq}0$. Первому условию подходят все функции, второму условию не подходит только функция $a(x)=ax^k$, $k>1$. Первые две функции являются производственными. Последние две функции не являются таковыми, так как для них не выполняется свойство отдачи от расширения масштабов производства.

Аналогично, в качестве функций целевого использования ресурсов брались функции:

- степенная с показателем меньше единицы ($c(x)=cx^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, $c>0$);
- линейная ($c(x)=cx$);
- степенная с показателем больше единицы, ($c(x)=cx^{k}$, $k>1$, $c>0$);
- экспоненциальная ($c(x)=c(1–e^{-\lambda x})$, $\lambda>0$, $c>0$);
- логарифмическая ($c(x)=c\log_2(1+x)$, $c>0$).

Из возможных комбинаций функций *a* и *c* (двадцати пяти вариантов) аналитически исследованы тринадцать, а именно:

1) случаи сочетания однотипных функций, когда в качестве *a* и *c* брались либо только степенные, либо только экспоненциальные, либо только логарифмические;

2) случаи сочетания любой функции нецелевого использования с линейной функцией целевого использования;

3) случаи сочетания линейной функции нецелевого использования с любой функцией целевого использования.

Шесть из оставшихся двенадцати случаев исследованы численно.

3. Аналитическое исследование различных классов моделей

Рассмотрим случай, когда функция дохода от нецелевой деятельности линейна, функция дохода от целевой деятельности логарифмическая, доля дохода от целевой деятельности, которая идет верхнему уровню, постоянна, т.е.

$$a_1(u_1,u_2)=a_1(1-u_1),$$

$$a_2(u_1,u_2)=a_2u_1(1-u_2),$$

$$c(u_1,u_2)=c\log_2(1+u_1u_2),$$

$$b_1=b,\ b_2=1-b.$$

В этом случае функции выигрыша имеют вид

(1) $$g_1(u_1,u_2) = a_1(1 - u_1) + bc\log_2(1 + u_1u_2),$$

(2) $$g_2(u_1,u_2) = a_2u_1(1 - u_2) + (1 - b)c\log_2(1 + u_1u_2)$$

при ограничениях

$$0 \le u_i \le 1,\ i=1,2.$$

Найдем равновесие по Штакельбергу. Нахождение равновесия разобьем на два этапа и опишем в этом случае подробно.

1) Сначала решим задачу оптимизации нижнего уровня, предполагая значение u_1 известным.

Найдем производную функции g_2 по переменной u_2 и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1,u_2) = -a_2u_1 + \frac{(1-b)cu_1}{(1+u_1u_2)\ln 2} = 0.$$

Решим полученное уравнение. Случай u_1=0 не представляет собой практического интереса, поэтому на u_1 можно поделить обе части уравнения и выразить u_2:

$$u_2^* = \frac{1}{u_1}\left(\frac{(1-b)c}{a_2\ln 2} - 1\right).$$

Найдя вторую производную функции g_2 по переменной u_2, убеждаемся, что точка u_2^* является точкой максимума:

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial u_2^2}(u_1,u_2) = -\frac{(1-b)cu_1^2}{(1+u_1u_2)^2\ln 2} < 0.$$

Учитывая ограничение на u_2, заметим, что окончательный вид оптимальной стратегии игрока нижнего уровня

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & a_2\ln 2 \ge (1-b)c, \\ \dfrac{1}{u_1}\left(\dfrac{(1-b)c}{a_2\ln 2} - 1\right), & 0 < \dfrac{1}{u_1}\left(\dfrac{(1-b)c}{a_2\ln 2} - 1\right) < 1, \\ 1, & \dfrac{(1-b)c}{a_2\ln 2} \ge 1 + u_1. \end{cases}$$

2) Решим задачу верхнего уровня, зная оптимальную реакцию нижнего уровня в ответ на его решение u_1. Рассмотрим три случая:

а) $u_2^*=0$.

В этом случае $g_1(u_1,0) = a_1(1–u_1) + bc\log_2(1) = a_1(1–u_1)$. Так как функция g_1 убывает по u_1, то оптимальная стратегия для элемента верхнего уровня $u_1^*=0$, т.е. если верхний уровень знает, что нижний уровень все полученные от него ресурсы потратит на частные цели, то он ничего нижнему уровню и не передаст, а потратит эти ресурсы на свои частные цели.

б) $u_2^* = \frac{1}{u_1}\left(\frac{(1-b)c}{a_2\ln 2} - 1\right)$.

В этом случае $g_1(u_1,u_2^*) = a_1(1-u_1) + bc\log_2\frac{(1-b)c}{a_2\ln 2}$.

Здесь, аналогично предыдущему случаю, функция g_1 убывает по u_1. Заметим, что здесь нижний уровень подбирает свою стратегию так, что на общие цели идет постоянная величина. Следовательно, чем больше выделено ресурсов верхним уровнем, тем больше ресурсов нижний уровень может направить на свои частные цели (как разность между тем, что передал верхний уровень, и постоянной величиной $u_1u_2=(1–b)c/(a_2\ln2)-1$, которую нижний уровень направляет на общие цели). И наоборот, чем меньше выделено ресурсов верхним уровнем, тем меньше ресурсов нижний уровень может направить на свои частные цели. Следовательно, учитывая убывание функции по u_1, верхнему уровню выгодно как можно меньше ресурсов потратить на общие цели, чтобы нижний уровень как можно меньше ресурсов выделил на свои частные цели. Итак, верхнему уровню выгодно пустить на общие цели ровно столько ресурсов, сколько нижний центр направляет на общие цели, то есть $u_1^*=(1–b)c/(a_2\ln2)-1$, тем самым заставляя нижний уровень все эти ресурсы потратить на общие цели, т.е. $u_2=1$.

в) $u_2^*=1$. В этом случае $g_1(u_1,1) = a_1(1–u_1) + bc\log_2(1+u_1)$. Максимизируем эту функцию с учетом условия $0\le u_1\le 1$.

Найдем производную функции g_1 по переменной u_1 и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u_1,1) = -a_1 + \frac{bc}{(1+u_1)\ln 2} = 0 .$$

Решим полученное уравнение:

$$u_1^* = \frac{bc}{a_1 \ln 2} - 1 .$$

Найдя вторую производную функции g_1 по переменной u_1, убеждаемся, что точка u_1^* является точкой максимума.

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_1^2}(u_1, u_2^*(u_1)) = -\frac{bc}{(1+u_1)^2 \ln 2} < 0 .$$

Учитывая ограничение на u_1, получаем окончательный вид оптимальной стратегии нижнего уровня

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & a_1 \ln 2 \geq bc, \\ \dfrac{bc}{a_1 \ln 2} - 1, & 0 < \dfrac{bc}{a_1 \ln 2} - 1 < 1, \\ 1, & \dfrac{bc}{a_1 \ln 2} - 1 \geq 1. \end{cases}$$

Как видно, если нижнему уровню выгодно хоть какую-то долю выделить на общие цели, верхний уровень может заставить нижний потратить все средства на общие цели. Иначе говоря, нижний уровень все доставшиеся ему от верхнего уровня ресурсы направляет либо только на общие цели, либо только на частные.

Рассмотрим каждую ветвь равновесия по Штакельбергу в отдельности:

I. $u = (0;0)$, если $a_2 > (1–b)c/\ln 2$ либо $a_1 > bc/\ln 2$ (рис.2), т.е. кому-то из игроков значительно больший доход приносит частная деятельность, чем общая, и ему невыгодно вкладывать ресурсы в общее дело, а, следовательно, и другому игроку тогда либо незачем передавать ресурсы на общие цели (в случае верхнего уровня), либо они ему просто не достаются (в случае нижнего уровня). Выигрыши игроков в данном случае: $g_1=a_1$, $g_2=0$.

I. II. $u=(1;1)$, если $a_2 < (1–b)c / 2\ln2$ и $a_1 < bc/2\ln2$ (рис.2), т.е. обоим игрокам значительно больший доход приносит общая деятельность, чем частная, и каждый из них все ресурсы пускает на общие цели. Выигрыши игроков: $g_1=bc$, $g_2= (1–b)c$.

III. $u = (bc/(a_1\ln2)–1;1)$, если выполняются условия $bc/2\ln2<a_1<bc/\ln2$ и $a_2<a_1(1–b)/b$ (рис.2), т.е. верхнему уровню выгодно лишь часть ресурсов потратить на общие цели, так как его доходы от обоих видов деятельности сравнимы, в то время как нижнему уровню выгодно все доставшиеся от верхнего уровня ресурсы потратить на общие цели. Выигрыши игроков:

$$g_1 = 2a_1 - \frac{bc}{\ln 2} + bc\log_2\left(\frac{bc}{a_1\ln 2}\right),$$

$$g_2 = (1-b)c\log_2\left(\frac{bc}{a_1\ln 2}\right).$$

IV. $u = ((1–b)c/(a_2\ln2)–1;1)$, если $(1–b)c/2\ln2<a_2<(1–b)c/\ln2$ и $a_2>a_1(1–b)/b$ (рис.2), т.е. как верхнему уровню, так и нижнему уровню выгодно лишь часть ресурсов потратить на общие цели, так как их доходы от обеих видов деятельности сравнимы, причем нижний уровень планирует направить на общую долю фиксированную величину, а излишки потратить на частные цели. Но верхний уровень выделяет нижнему уровню ровно ту фиксированную величину ресурсов, которую тот планировал потратить на общие цели, следовательно, заставляя нижний уровень отказаться от частных интересов и все средства потратить на общие цели. Выигрыши игроков

$$g_1 = 2a_1 - \frac{a_1(1-b)c}{a_2\ln 2} + bc\log_2\left(\frac{(1-b)c}{a_2\ln 2}\right),$$

$$g_2 = (1-b)c\log_2\left(\frac{(1-b)c}{a_2\ln 2}\right).$$

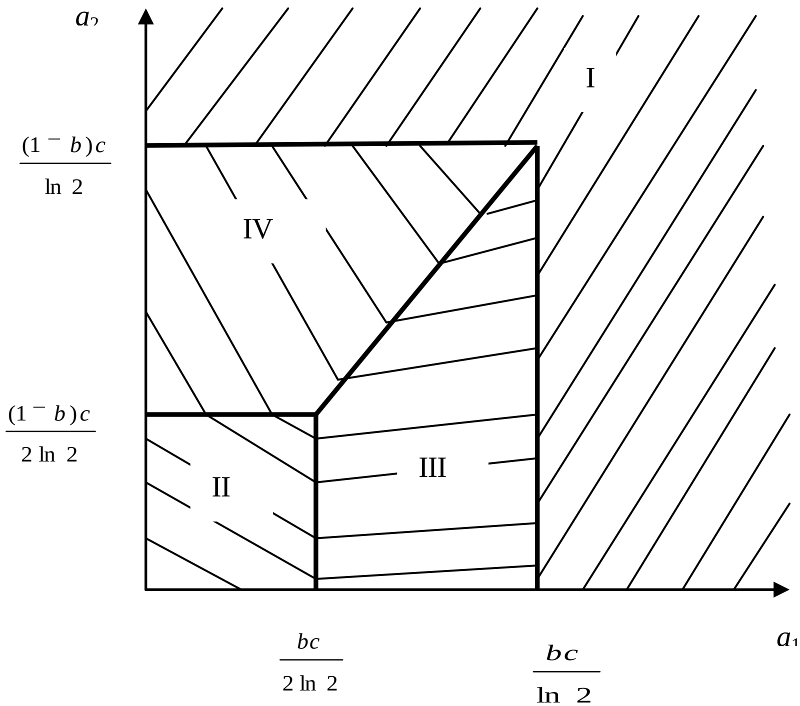

Рис.2. Исходы игры (*1*) –(*2*)

Теперь рассмотрим случай, когда функция нецелевой деятельности степенная с показателем, большим единицы, функция целевой деятельности линейная:

$$a_1(u_1,u_2) = a_1(1-u_1)^k\,,$$

$$a_2(u_1,u_2) = a_2\left(u_1(1-u_2)\right)^k,$$

$$c(u_1,u_2) = c(u_1 u_2)\,,$$

$$b_1 = b\,,\ b_2 = 1-b\,.$$

В этом случае функции выигрыша имеют вид

(3) $$g_1(u_1,u_2) = a_1(1-u_1)^k + bc(u_1 u_2) \to \max_{u_1}\,,$$

(4) $$g_2(u_1,u_2) = a_2\left(u_1(1-u_2)\right)^k + (1-b)c(u_1 u_2) \to \max_{u_2}$$

при ограничениях $0 \le u_i \le 1$, $i = 1, 2$.

Действуя аналогично предыдущему случаю, находим равновесие по Штакельбергу в следующем виде (рис.3):

$$\bar{u} = \begin{cases} (1;1), & (a_1 < bc)\ \&\ (a_2 < (1-b)c) \\ (0;0), & (a_1 > bc) \vee (a_2 > (1-b)c) \end{cases}.$$

Рассмотрим каждый случай в отдельности (рис.3):

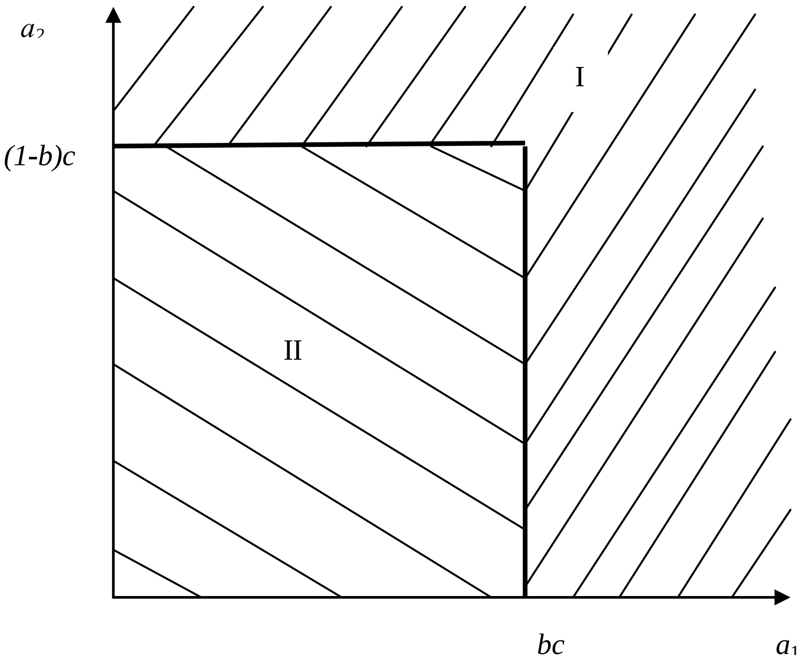

Рис.3. Исходы игры (3) – (4)

I. u=(0;0), если $a_2>(1–b)c$ либо $a_1>bc$, то есть кому-то из игроков значительно больший доход приносит частная деятельность, чем общая, поэтому ему невыгодно вкладывать ресурсы в общее дело. Выигрыши игроков: $g_1=a_1$, $g_2=0$.

II. u=(1;1), если $a_2<(1–b)c$ и $a_1<bc$, т.е. обоим игрокам значительно больший доход приносит общая деятельность, чем

частная, поэтому каждый из них все ресурсы пускает на общие цели. Выигрыши игроков: $g_1=bc$, $g_2=(1–b)c$.

Когда хотя бы одна из функций целевого или нецелевого использования ресурсов является степенной с показателем, большим единицы (а другая может быть либо также степенной с показателем, большим единицы, либо линейной), игрокам выгодно ассигновать ресурсы либо только на частные цели (стратегия «эгоизма»), либо только на общие цели (стратегия «альтруизма»).

Рассмотрим случай, когда функции целевой и нецелевой деятельности экспоненциальные и доля дохода от целевой деятельности, которая идет верхнему уровню, постоянна, т.е.

$$a_1(u_1,u_2) = a_1(1-e^{-\lambda(1-u_1)}),$$

$$a_2(u_1,u_2) = a_2(1-e^{-\lambda u_1(1-u_2)}),$$

$$c(u_1,u_2) = c(1-e^{-\lambda u_1 u_2}),$$

$$b_1 = b,\ b_2 = 1-b.$$

Тогда функции выигрыша имеют вид

(5) $$g_1(u_1,u_2) = a_1(1-e^{-\lambda(1-u_1)}) + bc(1-e^{-\lambda u_1 u_2}),$$

(6) $$g_2(u_1,u_2) = a_2(1-e^{-\lambda u_1(1-u_2)}) + (1-b)c(1-e^{-\lambda u_1 u_2})$$

при ограничениях $0\le u_i\le 1$, i = 1, 2.

Рассмотрим каждый случай равновесия по Штакельбергу в отдельности (рис.4):

I. $u=(0;0)$, если $(a_1>bce^{\lambda})\&(a_1>(1-b)c)$ либо $a_1 > bce^{\lambda}\sqrt{\dfrac{a_2}{(1-b)c}}$, т.е. кому-то из игроков значительно больший доход приносит частная деятельность, чем общая, поэтому ему невыгодно вкладывать ресурсы в общее дело. Выигрыши игроков равны: $g_1=a_1(1-e^{-\lambda})$, $g_2=0$.

II. $u=(1;1)$, если $a_1<bce^{-\lambda}$ и $a_2<(1-b)ce^{-\lambda}$, т. е. обоим игрокам значительно больший доход приносит общая деятельность, чем частная, поэтому каждый из них все ресурсы пускает на общие цели. Выигрыши игроков в данном случае: $g_1=bc(1-e^{-\lambda})$, $g_2=(1-b)c(1-e^{-\lambda})$.

III. $u=\left(1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{a_2}{(1-b)c}\right)$ при условиях $a_1<\frac{b}{2}\sqrt{\frac{a_2c}{1-b}}e^{-\frac{\lambda}{2}}$ и $(1–b)ce^{-\lambda}<a_2<(1–b)ce^{\lambda}$, т. е. верхнему уровню выгодно все ресурсы потратить на общие цели, в то время как нижнему уровню выгодно лишь часть полученных ресурсов направить на общие цели, а другую часть на частные.

Выигрыши игроков в данном случае:

$$g_1=bc\left(1-e^{-\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{a_2}{(1-b)c}\right)}\right)=b\left(1-e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)\sqrt{\frac{a_2c}{(1-b)}},$$

$$g_2=(1-b)\left(1-e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)\sqrt{\frac{a_2c}{(1-b)}}.$$

IV. $u=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{a_1}{bc};1\right)$, если $bce^{-\lambda}<a_1<bce^{\lambda}$ и $a_2<(1-b)\sqrt{\frac{bc}{a_1}}ce^{\frac{\lambda}{2}}$, т.е. верхнему уровню выгодно лишь часть ресурсов потратить на общие цели, а нижнему уровню - все. Выигрыши игроков в данном случае:

$$g_1=a_1-a_1e^{-\frac{\lambda}{2}}\sqrt{\frac{bc}{a_1}}+bc-e^{-\frac{\lambda}{2}}\sqrt{bca_1},$$

$$g_2=(1-b)c\left(1-e^{-\frac{\lambda}{2}}\sqrt{\frac{a_1}{bc}}\right).$$

V. $u=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3\lambda}\ln\frac{2a_1}{b}\sqrt{\frac{1-b}{a_2c}};\frac{\lambda-\ln\frac{2a_1a_2}{b(1-b)c}}{2\left(\lambda-\ln\frac{2a_1}{b}\sqrt{\frac{1-b}{a_2c}}\right)}\right)$, если выполняются соотношения $\frac{b}{2}\sqrt{\frac{a_2c}{1-b}}e^{-\frac{\lambda}{2}}<a_1<\frac{b}{2}\sqrt{\frac{a_2c}{1-b}}e^{\lambda}$ и

$(1-b)\sqrt{\frac{2a_1}{bc}}e^{-\frac{\lambda}{2}} < a_2 < \frac{bc^2}{2a_1(1-b)}e^{\lambda}$, то есть как верхнему, так и нижнему уровню выгодно лишь часть ресурсов потратить на общие цели, так как их доходы от обоих видов деятельности сравнимы. Выигрыши игроков в данном случае опустим ввиду их громоздкости.

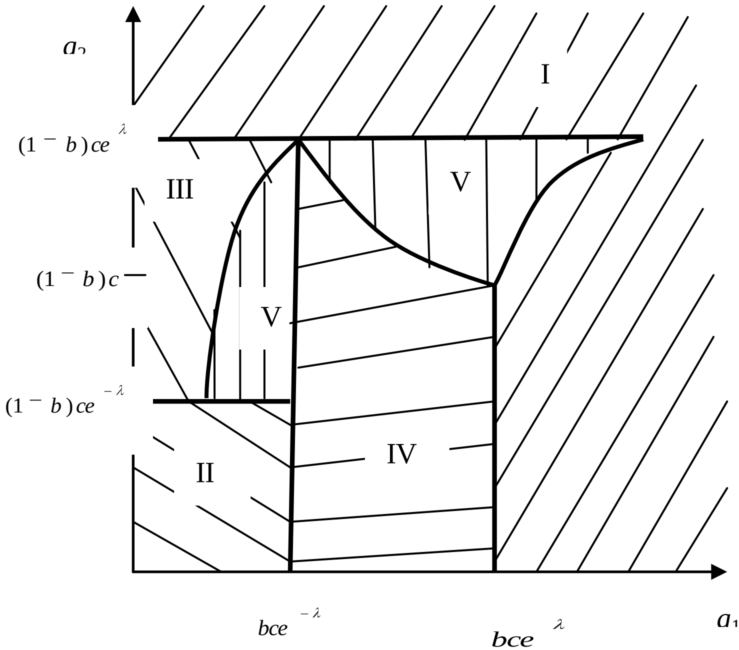

Рис. 4. Исход игры (5) – (6)

Теперь рассмотрим случай, когда функция дохода от нецелевой деятельности линейная, а функция дохода от целевой деятельности степенная с показателем, меньшим единицы:

$$a_1(u_1, u_2) = a_1(1-u_1),$$

$$a_2(u_1, u_2) = a_2\, u_1 (1-u_2),$$

$$c(u_1, u_2) = c(u_1 u_2)^{\alpha},$$
$$b_1 = b,\ b_2 = 1 - b.$$

Тогда функции выигрыша имеют вид

(7) $$g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1) + bc(u_1 u_2)^{\alpha} \to \max_{u_1},$$

(8) $$g_2(u_1, u_2) = a_2 u_1(1 - u_2) + (1 - b)c(u_1 u_2)^{\alpha} \to \max_{u_2}$$

Равновесие по Штакельбергу выписывается следующим образом (рис.5):

$$\bar{u} = \begin{cases} (1;1), & (a_1 < bc^{\alpha})\ \&\ (a_2 < (1-b)c^{\alpha}), \\ \left(\sqrt[1-\alpha]{\dfrac{\alpha bc}{a_1}};1\right), & (a_1 > bc^{\alpha})\ \&\ (a_2 < a_1), \\ \left(\sqrt[1-\alpha]{\dfrac{(1-b)c^{\alpha}}{a_2}};1\right), & (a_2 > (1-b)c^{\alpha})\ \&\ (a_2 > a_1). \end{cases}$$

Заметим, что здесь ни одному игроку не выгодна стратегия «эгоизма». Кроме того, верхний уровень всегда может заставить нижний уровень тратить все ресурсы на общие цели. Рассмотрим каждую ветвь (рис.5):

I. u=(1;1), если a_2<(1–b)$c\alpha$ и a_1<$bc\alpha$, т. е. обоим игрокам значительно больший доход приносит общая деятельность, чем частная, поэтому каждый из них все ресурсы пускает на общие цели. Здесь

$$g_1 = bc,\ g_2 = (1 - b)c.$$

II. $u = \left(\sqrt[1-\alpha]{\dfrac{\alpha bc}{a_1}};1\right)$, если a_1>$bc\alpha$ и a_2<a_1 , т. е. верхнему уровню выгодно лишь часть ресурсов потратить на общие цели, так как его доходы от обоих видов деятельности сравнимы, в то время как нижнему уровню выгодно все доставшиеся от верхнего уровня ресурсы потратить на общие цели. Выигрыши игроков равны:

$$g_1 = a_1 + (1-\alpha)\left(\frac{bc\,\alpha^{\alpha}}{a_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \; g_2 = (1-b)\left(\frac{b^{\alpha}c\,\alpha^{\alpha}}{a_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

III. $u = \left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-b)c\alpha}{a_2}};1\right)$ в случае, если $a_2>(1–b)c\alpha$ и $a_2>a_1$,

т.е. обоим уровням выгодно лишь часть ресурсов потратить на общие цели, так как их доходы от обеих видов деятельности сравнимы, причем нижний уровень планирует направить на общую долю фиксированную величину, а излишки потратить на частные цели. Но верхний уровень выделяет нижнему ровно ту фиксированную величину ресурсов, которую тот планировал потратить на общие цели, заставляя тем самым нижний уровень отказаться от частных интересов и все средства потратить на общие цели.

Выигрыши игроков в данном случае:

$$g_1 = a_1 - a_1\left(\frac{\alpha(1-b)}{a_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + b\left(\frac{\alpha^{\alpha}(1-b)^{\alpha}c}{a_2^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$g_2 = \left(\frac{\alpha^{\alpha}(1-b)c}{a_2^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Когда функция целевого использования ресурсов является линейной, а функция нецелевого использования ресурсов является степенной с показателем, меньшим единицы, нижнему игроку выгодна стратегия чистого «альтруизма». Ни одному игроку не выгодна стратегия крайнего «эгоизма».

Наконец, рассмотрим случай, когда функции дохода от целевой и нецелевой деятельности степенные с показателем, меньшим единицы, т.е.

$$a_1(u_1,u_2) = a_1(1-u_1)^{\alpha},$$

$$a_2(u_1,u_2) = a_2 u_1(1-u_2)^{\alpha},$$

$$c(u_1,u_2) = c(u_1u_2)^{\alpha},$$

$$b_1 = b, \; b_2 = 1-b.$$

В этом случае функции выигрыша имеют вид

(9) $$g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1)^{\alpha} + bc\,(u_1 u_2)^{\alpha} \to \max_{u_1},$$

(10) $$g_2(u_1, u_2) = a_2\left(u_1(1 - u_2)\right)^{\alpha} + (1 - b)c(u_1 u_2)^{\alpha} \to \max_{u_2}$$

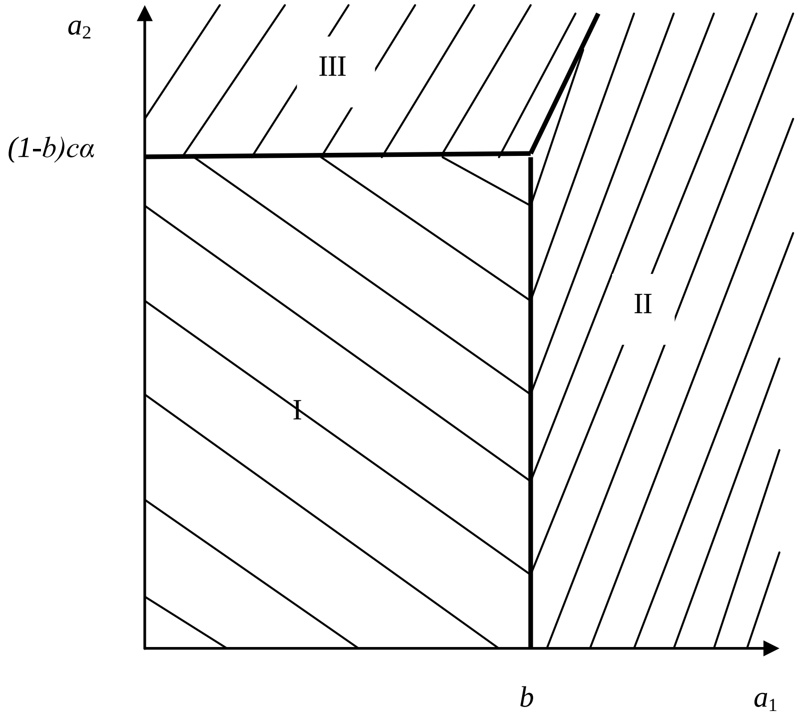

Рис. 5. Исходы игры (*7*) –(*8*)

Равновесие по Штакельбергу имеет вид:

$$u_1 = \frac{\sqrt[1-\alpha]{b(1-b)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, c^{\frac{1}{1-\alpha}}}}{\sqrt[1-\alpha]{a_1\left(\sqrt[1-\alpha]{(1-b)c} + \sqrt[1-\alpha]{a_2}\right)^{\alpha}} + \sqrt[1-\alpha]{b(1-b)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, c^{\frac{1}{1-\alpha}}}};$$

$$u_2 = \frac{\sqrt[1-\alpha]{(1-b)c}}{\sqrt[1-\alpha]{(1-b)c} + \sqrt[1-\alpha]{a_2}}.$$

Выигрыши игроков в данном случае также опустим.

Все тринадцать рассмотренных случаев удалось сгруппировать по совокупности равновесных исходов игры:

С одним исходом, когда функции частных и общих интересов степенные с показателем, меньшим единицы. В этом случае участникам выгодно часть средств потратить на личные цели, а другую часть на общие.

С двумя исходами (0; 0) и (1;1) (рис.3), когда:

- Функция частных интересов степенная с показателем, меньшим единицы, а функция общих интересов линейна;
- Функции частных и общих интересов линейны или степенные с показателем, большим единицы, в любой комбинации.
- С тремя исходами (рис.5), когда функция частных интересов линейна, а функция общих интересов степенная с показателем, меньшим единицы. В этом случае хотя бы одному игроку выгодно потратить все средства на общие цели.
- С четырьмя исходами (рис.2) в случаях, когда одна из двух функций (либо функция частных интересов, либо функция общих интересов) линейна, а другая логарифмическая.
- С пятью исходами (рис.4, рис. 6), когда
  - Функции частных и общих интересов линейны или экспоненциальные в любой комбинации, кроме случая, когда они одновременно линейны.
  - Функции частных и общих интересов логарифмические.

4. Численное исследование

Исследуем численно несколько оставшихся случаев.

Пусть функция целевой деятельности экспоненциальная, а функция нецелевой деятельности степенная с показателем, меньшим 1, доля дохода от целевой деятельности, которая идет верхнему уровню, постоянна:

$$a_1(u_1,u_2) = a_1(1 - u_1)^{\alpha},$$
$$a_2(u_1,u_2) = a_2\left(u_1(1 - u_2)\right)^{\alpha},$$
$$c(u_1,u_2) = c(1 - e^{-\lambda u_1 u_2}),$$
$$b_1 = b,\ b_2 = 1 - b.$$

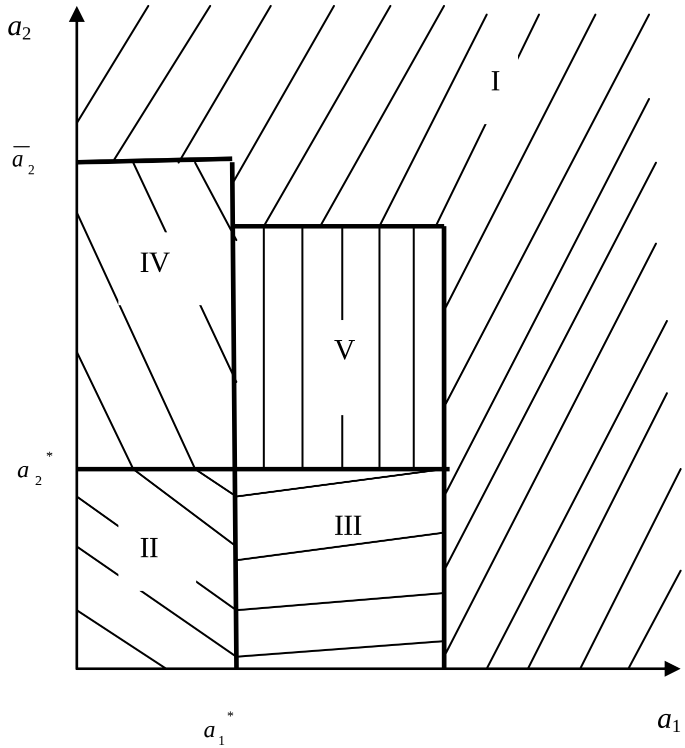

Рис. 6. Один из возможных случаев игры с пятью исходами

В этом случае функции выигрыша имеют вид

(11) $$g_1(u_1,u_2) = a_1(1 - u_1)^{\alpha} + bc(1 - e^{-\lambda u_1 u_2}) \to \max_{u_1},$$

(12) $$g_2(u_1,u_2) = a_2\left(u_1(1 - u_2)\right)^{\alpha} + (1 - b)c(1 - e^{-\lambda u_1 u_2}) \to \max_{u_2},$$

Для решения оптимальной стратегии нижнего уровня найдем производную функции g_2 по переменной u_2 и приравняем ее к нулю.

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1,u_2) = -\frac{a_2\alpha u_1^{\alpha}}{(1-u_2)^{1-\alpha}} + \lambda u_1(1-b)ce^{-\lambda u_1 u_2} = 0\,. \tag{13}$$

Докажем, что для решения (13) применим метод половинного деления. Заметим, что вторая производная функции g_2 по переменной u_2 отрицательна,

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial u_2^2}(u_1,u_2) = \frac{a_2\alpha(1-\alpha)u_1^{\alpha}}{(1-u_2)^{2-\alpha}} - \lambda^2 u_1^2(1-b)ce^{-\lambda u_1 u_2} < 0\,,$$

что говорит о монотонности функции $\partial g_2/\partial u_2$.

Теперь найдем знаки $\partial g_2/\partial u_2$ на концах отрезка [0;1].

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1,0) = -a_2\alpha u_1^{\alpha} + \lambda u_1(1-b)c\,. \tag{14}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1,u_2) \underset{u_2\to 1_-}{\to} -\frac{a_2\alpha u_1^{\alpha}}{0_+} + \lambda u_1(1-b)ce^{-\lambda u_1 u_2} \underset{u_2\to 1_-}{\to} -\infty \tag{15}$$

Если (14) положительно, то уравнение можно решить методом половинного деления, причем полученное решение будет точкой максимума в силу отрицательности второй производной. Если же (14) отрицательно, то метод половинного деления не подходит, но так как левая часть уравнения монотонна, то можно сделать вывод, что она отрицательная на отрезке [0; 1], а, следовательно, функция g_2 убывает, откуда следует, что точка максимума u_2=0.

То есть,

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & -a_2\alpha u_1^{\alpha} + \lambda u_1(1-b)c < 0, \\ \in(0;1), & -a_2\alpha u_1^{\alpha} + \lambda u_1(1-b)c > 0. \end{cases}$$

Верхний уровень может использовать эту информацию для того, чтобы побудить нижний уровень выбрать ненулевую стратегию. Чтобы нижний уровень выбрал стратегию u_2>0, нужно, чтобы $-a_2\alpha u_1^{\alpha}+\lambda u_1(1-b)c>0$. Решив полученное неравенство относительно u_1, получим $u_1 > \sqrt[1-\alpha]{\frac{a_2\alpha}{\lambda(1-b)c}}$.

Итак, для того, чтобы нижний уровень не потратил все ресурсы на частные цели, верхнему уровню рекомендуется выбрать стратегию $u_1 > \sqrt[1-\alpha]{\frac{a_2\alpha}{\lambda(1-b)c}}$. Понятно, что сделать он это сможет только, если $\sqrt[1-\alpha]{\frac{a_2\alpha}{\lambda(1-b)c}} < 1$, что равносильно $a_2 < \left(\frac{\lambda(1-b)c}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$.

Если же верхний уровень не может назначить такую стратегию или она ему не выгодна, то нижний уровень выбирает стратегию u_2=0. Найдем в этом случае оптимальное поведение и выигрыш верхнего уровня

$$g_1(u_1,0) = a_1(1-u_1)^{\alpha},$$

откуда видно, что функция g_1 убывает по u_1, следовательно, u_1=0.

Подведем некоторые итоги:

1. Если $a_2 > \left(\frac{\lambda(1-b)c}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$, то верхний уровень не может повлиять на нижний, в этом случае u_2=0, а значит u_1=0. Это происходит, когда производственная мощность нецелевой деятельности нижнего уровня значительно больше производственной мощности целевой деятельности.

2. Если $a_2 < \left(\frac{\lambda(1-b)c}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$, то верхний уровень может заставить нижний уровень потратить какую-то часть ресурсов на общие цели, назначив $u_1 > \sqrt[1-\alpha]{\frac{a_2\alpha}{\lambda(1-b)c}}$.

Это происходит, когда производственная мощность целевой деятельности нижнего уровня значительно больше производственной мощности нецелевой деятельности.

Аналогично рассматривается случай, когда функция целевой деятельности степенная с показателем, меньшим 1, а функция нецелевой деятельности логарифмическая, доля от целевой деятельности, которая идет верхнему уровню, постоянна, т.е.

$$a_1(u_1,u_2)=a_1\log_2(2-u_1),$$

$$a_2(u_1,u_2)=a_2\log_2(1+u_1(1-u_2)),$$

$$c(u_1,u_2)=c(u_1u_2)^{\alpha},\ b_1=b,\ b_2=1-b.$$

Тогда функции выигрыша имеют вид

(16) $$g_1(u_1,u_2)=a_1\log_2(2-u_1)+bc(u_1u_2)^{\alpha},$$

(17) $$g_2(u_1,u_2)=a_2\log_2(1+u_1(1-u_2))+(1-b)c(u_1u_2)^{\alpha},$$

Результаты анализа приведены на рис. 7.

Если $a_1<\alpha bc\ln 2$ и $a_2>\alpha(1-b)c\ln 2$, то $u_1=\sqrt[1-\alpha]{\dfrac{(1-b)c^{\alpha}\ln 2}{a_2}}$, $u_2=1$.

Выигрыши участников в этом случае:

$$g_1\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-b)c^{\alpha}\ln 2}{a_2}},1\right)=a_1\log_2\left(2-\sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-b)c^{\alpha}\ln 2}{a_2}}\right)+$$

$$+bc\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-b)c^{\alpha}\ln 2}{a_2}}\right)^{\alpha},$$

$$g_2\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-b)c^{\alpha}\ln 2}{a_2}},1\right)=(1-b)c\left(\frac{(1-b)c^{\alpha}\ln 2}{a_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Если $a_1<\alpha bc\ln 2$ и $a_2<\alpha(1-b)c\ln 2$, то обоим уровням выгодно все ресурсы тратить на общие цели. Они могут побудить друг друга потратить какую-то часть ресурсов на общие цели, назначив соответственно $u_1=1$, $u_2=1$.

Выигрыши участников в этом случае: $g_1(1,1)=bc$, $g_2(1,1)=$ $=(1-b)c$.

Если $a_1 > \alpha bc\ln 2$, то верхнему уровню выгодно на общие цели потратить лишь часть средств $u_1 \in \left(0; \min\left\{\sqrt[1-\alpha]{\frac{(1-b)c^{\alpha}\ln 2}{a_2}}; 1\right\}\right)$.

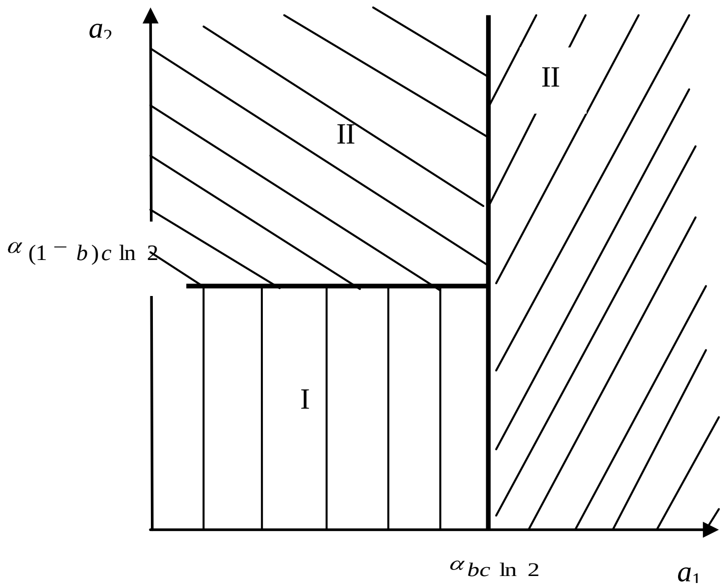

Рис. 7. Возможные исходы игры (*16*) – (*17*)

Рассмотрим также случай, когда функция нецелевой деятельности экспоненциальная, функция целевой деятельности логарифмическая, доля от целевой деятельности, которая идет верхнему уровню, постоянна, т.е.

$$a_1(u_1, u_2) = a_1(1 - e^{-\lambda(1-u_1)}),$$

$$a_2(u_1, u_2) = a_2(1 - e^{-\lambda u_1(1-u_2)}),$$

$$c(u_1, u_2) = c\log_2(1 + u_1 u_2),\ b_1 = b,\ b_2 = 1 - b.$$

Здесь функции выигрыша имеют вид

(18) $\quad g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - e^{-\lambda(1-u_1)}) + bc\log_2(1 + u_1 u_2),$

(19) $$g_2(u_1,u_2) = a_2(1 - e^{-\lambda u_1(1-u_2)}) + (1-b)c\log_2(1+u_1u_2).$$

Для решения задачи нижнего уровня найдем производную функции g_2 по переменной u_2 и приравняем ее к нулю.

(20) $$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1,u_2) = -\lambda a_2 u_1 e^{-\lambda u_1(1-u_2)} + \frac{(1-b)cu_1}{(1+u_1u_2)\ln 2} = 0.$$

Найдя вторую производную функции g_2 по переменной u_2, убеждаемся, что она отрицательна на всей своей области определения, следовательно, $\partial g_2/\partial u_2$ убывает.

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial u_2^2}(u_1,u_2) = -\lambda^2 a_2 u_1^2 e^{-\lambda u_1(1-u_2)} - \frac{(1-b)cu_1^2}{(1+u_1u_2)^2\ln 2} < 0$$

Найдем знаки левой части уравнения на концах отрезка [0;1]:

(21) $$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1,0) = -\lambda a_2 u_1 e^{-\lambda u_1} + \frac{(1-b)cu_1}{\ln 2},$$

(22) $$\frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1,1) = -\lambda a_2 u_1 + \frac{(1-b)cu_1}{(1+u_1)\ln 2}.$$

Учитывая, что $\partial g_2/\partial u_2$убывает, если (21) отрицательно, то значение левой части уравнения на обоих концах отрицательно, значит, функция g_2 на этом отрезке убывает, следовательно, максимальное значение функции достигается при u_2=0.

Если (22) положительно, то значение левой части уравнения на обоих концах положительно, значит, функция g2 на этом отрезке возрастает, следовательно, максимальное значение функции достигается при u_2=1.

Если же (21) положительно, а (22) отрицательно, то значение левой части уравнения на обоих концах принимает разные знаки, значит, оптимальное u_2, которое находится внутри интервала (0;1), можно найти методом дихотомии.

Верхний уровень может использовать эту информацию при выборе своей стратегии. Чтобы побудить нижний уровень выбрать стратегию u_2=1, верхнему уровню нужно выбрать стратегию, удовлетворяющую условиям $-\lambda a_2 u_1 + \frac{(1-b)cu_1}{(1+u_1)\ln 2} > 0$ и $-\lambda a_2 u_1 e^{-\lambda u_1} + \frac{(1-b)cu_1}{\ln 2} > 0$, а это возможно при

$$\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda a_2 \ln 2}{(1-b)c} < u_1 < \frac{(1-b)c}{\lambda a_2 \ln 2} - 1 .$$

Выбрать эту стратегию можно, только если $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda a_2 \ln 2}{(1-b)c} < \frac{(1-b)c}{\lambda a_2 \ln 2} - 1$.

Чтобы побудить нижний уровень выбрать стратегию u2=0, верхнему уровню нужно выбрать стратегию, удовлетворяющую $-\lambda a_2 u_1 + \frac{(1-b)cu_1}{(1+u_1)\ln 2} < 0$ и $-\lambda a_2 u_1 e^{-\lambda u_1} + \frac{(1-b)cu_1}{\ln 2} < 0$, а это возможно при

$$\frac{(1-b)c}{\lambda a_2 \ln 2} - 1 < u_1 < \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda a_2 \ln 2}{(1-b)c} .$$

Выбрать эту стратегию можно только, если

$$\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda a_2 \ln 2}{(1-b)c} > \frac{(1-b)c}{\lambda a_2 \ln 2} - 1 .$$

При оставшихся стратегиях верхнего уровня нижний уровень выбирает стратегию из интервала (0;1).

Рассмотрим задачу верхнего уровня, зная оптимальную стратегию нижнего уровня в ответ на его решение u_1.

В случае $u_2^*=0$ $g_1(u_1,0) = a_1(1 - e^{-\lambda(1-u_1)}) \to \max_{u_1}$. Так как функция убывает по u_1, то оптимальная стратегия для элемента верхнего уровня $u_1^*=0$, что говорит о том, что если верхний уровень знает, что нижний уровень все полученные от него ресурсы потратит на частные цели, то он ничего нижнему уровню и не передаст, а просто потратит эти ресурсы на свои частные цели.

В случае $u_2^*=1$ $g_1(u_1,1) = a_1(1 - e^{-\lambda(1-u_1)}) + bc\log_2(1 + u_1)$ Максимизируем эту функцию с учетом условия $0 \le u_1 \le 1$.

Найдем производную функции g_1 по переменной u_1 и приравняем ее к нулю.

(23) $$\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u_1,1) = -a_1\lambda e^{-\lambda(1-u_1)} + \frac{bc}{(1+u_1)\ln 2} = 0\,.$$

Найдя вторую производную функции g_1 по переменной u_1, убеждаемся, что она отрицательна, следовательно, $\partial g_1/\partial u_1(u_1,1)$ возрастает.

Вычислим знаки левой части уравнения (23) на концах отрезка [0; 1].

(24) $$\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(0,1) = -a_1\lambda e^{-\lambda} + \frac{bc}{\ln 2},$$

(25) $$\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(1,1) = -a_1\lambda + \frac{bc}{2\ln 2}\,.$$

Если (24) отрицательно, то значение левой части уравнения на обоих концах отрицательно, значит, функция g_1 на этом отрезке убывает, следовательно, максимальное значение функции достигается при $u_1=0$.

Если (25) положительно, то значение левой части уравнения на обоих концах положительно, значит, функция g_1 на этом отрезке возрастает, следовательно, максимальное значение функции достигается при $u_1=1$.

Если же (24) положительно, а (25) отрицательно, то значение левой части уравнения на обоих концах принимает разные знаки, значит оптимальное u_1, которое находится внутри интервала (0;1) можно найти методом дихотомии. Итак,

$$u_1^* = \begin{cases} 0, & -a_1\lambda e^{-\lambda} + \dfrac{bc}{\ln 2} < 0, \\ \in (0;1), & \left(-a_1\lambda + \dfrac{bc}{2\ln 2} < 0\right) \,\&\, \left(-a_1\lambda e^{-\lambda} + \dfrac{bc}{\ln 2} > 0\right), \\ 1, & -a_1\lambda + \dfrac{bc}{2\ln 2} > 0. \end{cases}$$

Чтобы верхний уровень выбрал стратегию $u_1=1$, нужно, чтобы $a_1<bc/(2\lambda\ln2)$. Чтобы верхний уровень выбрал стратегию $u_1=0$, нужно, чтобы $a_1>e^{\lambda}bc/(\lambda\ln2)$. Если же $bc/(2\lambda\ln2)<a_1<e^{\lambda}bc/(\lambda\ln2)$, то $u_1 \in (0;1)$.

5. Заключение

В настоящей статье проблема нецелевого использования ресурсов трактуется с точки зрения анализа свойств механизмов управления, обеспечивающих согласование интересов в иерархических (двухуровневых) системах. Интересы субъектов описываются их функциями выигрыша, включающими две составляющие – выгоду от целевого и нецелевого использования ресурсов соответственно. Рассмотрены различные классы таких функций. Субъект верхнего уровня (распорядитель ресурсов) трактуется как ведущий игрок, а субъект нижнего уровня (получатель ресурсов) – как ведомый, что приводит к концепции равновесия по Штакельбергу. Проведенное аналитическое и численное исследование позволяет сделать следующие выводы.

В случае, когда функции дохода от целевого и нецелевого использования ресурсов являются степенными с показателем, меньшим единицы, игрокам выгодно вкладывать некоторую долю средств в достижение общих целей, а оставшуюся часть в реализацию частных интересов.

В случае, когда одна хотя бы одна из функций дохода от целевого или нецелевого использования ресурсов является степенной с показателем, большим единицы, а другая либо также степенная с показателем, большим единицы, либо линейная, игрокам выгодно ассигновать ресурсы либо только на частные цели (стратегия «эгоизма»), либо только на общие цели («стратегия альтруизма»).

В остальных случаях могут возникать следующие ситуации:

А) когда эффект от частной деятельности какого-либо игрока значительно больше эффекта от общей деятельности, то выгодна стратегия чистого «эгоизма»;

Б) когда эффект от частной деятельности обоих игроков намного меньше эффекта от общей деятельности, то выгодно применить стратегию чистого «альтруизма»;

В) когда эффекты от частной и общей деятельности игроков сравнимы, то выгодно часть средств направить на общие цели, а другую часть на частные.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М., 1999. – С. 161.
2. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б., ВАТЕЛЬ И.А. *Игры с иерархическим вектором интересов* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – №3. – С.54-69.
3. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М., 1991. – С. 288.
4. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 26. – С. 64-80.
5. ГОРБАНЕВА О.И. *Игровые модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды.* // Математическая теория игр и ее приложения. – Т.2. – Вып.1.– 2010. – С.27-46.
6. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А. *Статические модели учета фактора коррупции при распределении ресурсов в трехуровневых системах управления* // Управление большими системами. – 2013. – Вып.42. С.195-216.
7. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М., 2005. – С. 584.
8. УИЛЬЯМСОН О. *Фирмы и рынки* // Современная экономическая мысль. – М., 1981. – С.211-297.
9. BASAR T., OLSDER G.Y. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. – SIAM, 1999. – P. 536.

10. LAFFONT J.-J., MARTIMORT D. *The Theory of Incentives. The Principal-Agent Model.* – Princeton, 2002. – P. 421.

STATIC PURPOSE AND NON-PURPOSE RESOURCE USE MODELS IN TWO-LEVEL CONTROL SYSTEMS

Gorbaneva Olga Ivanovna, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Cand.Sc., Assistant Professor (gorbaneva@mail.ru).
Ougolnitsky Gennady Anatolyevich, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Professor (ougoln@mail.ru).

Abstract: In the article a two-level control system consisting of one element in top level and one element in bottom level is considered. Both levels have purpose use and non-purpose use interests. The model of resource allocation between purpose and non-purpose use interests for different payoff functions classes is investigated. The model is built as a two players game where the Stackelberg equilibrium is found.

Keywords: resource allocation, purpose use interests, non-purpose use interests, Stackelberg equillibrium.