

УДК 531.3:681

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗВУКОРЯДА<sup>1</sup>

Рудько И. М.<sup>2</sup>

(Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем управления РАН, Москва)

*Рассматриваются математические модели дискретных составляющих и звукорядов, содержащихся в энергетическом спектре шумоизлучения вращающихся механизмов и машин. На основе теории случайных функций предлагается стохастическая модель звукоряда, которая является более точной по сравнению с существующими эвристическими моделями. Предлагаемая стохастическая модель может найти применение при моделировании и разработке устройств обнаружения узкополосных шумовых сигналов и при исследовании, моделировании и разработке устройств виброгашения.*

Ключевые слова: дискретные составляющие, звукоряды, спектральная плотность мощности, теория случайных функций

### 1. Введение

Современные гидроакустические средства обнаружения и классификации морских судов работают в широкой полосе частот и производят обработку сигналов как во временной так и в частотной областях [1,2]. Однако низкочастотный диапазон частот является наиболее значимым, так как в энергетическом спектре этого диапазона наблюдаются узкие локальные максимумы – дискретные составляющие (ДС), обусловленные работой вала, гребного винта и наиболее шумящих механизмов и машин, несущие информацию о типе и режиме работы движи-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 13-08-00744А.

<sup>2</sup> Игорь Михайлович Рудько, кандидат технических наук, с.н.с.  
(igor-rudko@mail.ru).

теля судна, количестве лопастей у винта и т. д., на основании которой появляется возможность разделить морские суда на основные классы и определить параметры их движения.

Основными составляющими шумов судов и кораблей считаются [7]:

- собственный шум гребных винтов, включающий кавитационный шум, шум вращения винтов и вихревой шум;
- шум корпуса корабля, обусловленный его вибрацией под воздействием вращения гребных винтов, работы главных и вспомогательных механизмов, срывов вихрей с кормовой оконечности корабля и кавитацией на плохо обтекаемых частях корпуса;
- прочие шумы, в частности, шум, создаваемый пограничным слоем корпуса корабля, шум носового буруна и др.

Сплошная часть спектра шумов судна перекрывает диапазон от десятков до тысяч герц, дискретные спектральные составляющие обычно сосредоточены в области низких частот.

ДС, обусловленные вращением винтов, проявляются на частотах, кратных основной гармонике. ДС, связанные с работой механизмов, обычно кратны половине частоты сети электропитания (25 Гц при частоте сети 50 Гц и 30 Гц при частоте сети 60 Гц) [4].

На низких частотах, как правило, ширина дискретных составляющих существенно меньше, чем на высоких частотах. Обработка корабельных шумов с использованием аппаратуры сверхтонкого спектрального анализа показывает [4], что

- в диапазоне частот 10-60 Гц ширина дискретных составляющих может достигать до 0,025-0,05 Гц,
- в диапазоне частот 100-400 Гц – до 0,1 Гц,
- в диапазоне частот 400-1000 Гц – до 0,5-1,0 Гц.

Часто ДС, возбуждаемые от одного и того же источника, бывают синхронизированы между собой и образуют так называемые звукоряды (ЗР), т.е. наборы ДС, частоты которых кратны между собой. Такие ДС в литературе часто называют гармониками.

Так, например, вальный ЗР может содержать ДС на частотах, кратных частоте вращения вала:

$$(1) \quad f_{B_k} = \frac{k\nu}{60} = kf_{B_1}$$

где  $k=1, 2, 3, \dots$ ,  $K$  - номера гармоник;  $\nu$  – скорость вращения вала (об/мин);  $f_{B_1}$  – частота вращения вала (Гц).

Лопастной ЗР может содержать ДС на частотах, кратных произведению частоты вращения линии вала и числа лопастей винта:

$$(2) \quad f_{L_k} = z \frac{k\nu}{60} = zkf_{B_1}$$

где  $z$  - число лопастей винта.

Тональные компоненты ЗР являются высокостабильными и имеют очень узкие полосы частот [1,2,7]. Уместно заметить, что в отличие от отдельных ДС шум в виде ЗР, несмотря на то, что содержит узкополосные составляющие, в целом представляет собой широкополосный шумовой процесс.

Узкополосный гидроакустический шум (т.е. ДС общего суммарного шума) движущегося в воде объекта является полезным сигналом, обнаруживаемым на фоне помех, для узкополосных систем шумопеленгования.

Основной характеристикой, используемой для описания моделей ДС шума гидроакустических целей, является их спектральная плотность мощности (СПМ). При этом в известных способах и устройствах обнаружения узкополосных шумовых сигналов (при синтезе алгоритмов обработки) традиционно используются идеализированные модели СПМ ДС. Эти же способы и реализующие их устройства приема используются в настоящее время и для обнаружения широкополосных шумов в виде звукорядов из кратных гармоник (1),(2).

Наиболее часто СПМ отдельной ДС упрощенно представляется в виде абсолютно узкой  $\delta$  - функции, сдвинутой от начала координат («нулевой частоты») на значение центральной частоты ДС  $f_1$  [1,2,6]:

$$G_{ДС}(f) = A^2 \delta(f - f_1)$$

Соответственно, СПМ звукоряда из  $K$  ДС представляется в виде ряда  $\delta$ -функций, сдвинутых на кратные частотные интервалы  $kf_1$  [1,2,6]:

$$(3) \quad G_{ЗР}(f) = \sum_{k=1}^K A_k^2 \delta(f - kf_1)$$

В дальнейшем будем называть модель (3) – частотная модель (Ч-модель).

Как отмечается в работе [4], эффективная ширина полосы СПМ ДС  $\Delta f$  зависит от значения частоты, на которой она образуется. Причем она прямо пропорциональна центральной частоте ДС  $f=f_1$  и составляет (0,03-0,3)% от значения  $f_1$ .

Случайные искажения, вносимые гидроакустическим каналом при распространении сигнала, а также доплеровские преобразования, вызванные кинематикой шумящего объекта и носителя ГАС шумопеленгования, приводят к дополнительному уширению полосы  $\Delta f$  до  $\approx 0,5\%$  от значения  $f_1$ . Но при этом сохраняются масштабно-частотные свойства СПМ отдельных ДС или общей СПМ всего звукоряда. Т.е. относительная полоса СПМ каждой отдельной ДС (или ДС, входящих в состав звукоряда, образованного одним общим источником) всегда является постоянной величиной и имеет порядок:

$$(4) \quad \beta = \Delta f / f = 0,0003 \div 0,005.$$

Другими словами, эффективная полоса ДС является линейной функцией ее центральной частоты:

$$\Delta f = \beta f_1.$$

Соответственно, эффективная полоса каждой  $k$ -й гармоники в звукоряде также является линейной функцией частоты:

$$\Delta f_k = k \beta f_1.$$

а общая СПМ всего звукоряда из  $K$  ДС обладает масштабными (мультипликативными) свойствами в области частоты.

Данные соотношения положены в основу более точной масштабно-частотной модели (МЧ-модель) СПМ узкополосного шума в виде отдельной ДС или широкополосного шума в виде ЗР ДС, учитывающей масштабные свойства ДС [6].

СПМ отдельной ДС с центральной частотой  $f_1$  может быть представлена в виде:

$$G_{ДС}(f) = \alpha_0 G_0[\alpha_0(f - f_1)]$$

где  $G_0(f)$  - моделирующая СПМ, локализованная в области нулевой частоты (задающая общую форму СПМ ДС);

$\alpha_0$  – масштабный коэффициент, соответствующий мультипликативному преобразованию (сжатию) исходной СПМ  $G_0(f)$ ;

$f_1$  – сдвиг частоты, соответствующий конкретному значению центральной частоты ДС.

Выбранные значения  $\alpha_0$  и  $f_1$  однозначно определяют требуемую относительную полосу ДС –  $\beta$  (4).

Для широкополосного шума в виде звукоряда из  $K$  ДС масштабнo-частотная модель СПМ описывается путем представления общей СПМ ЗР в виде суммы расширяющихся в кратное число раз СПМ первой гармоники, где в качестве масштабного коэффициента выступает номер гармоники  $k$ :

$$(5) \quad G_{ЗР}(f) = \sum_{k=1}^K G_{ДС_k}(f) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{k} G_{ДС_1}\left(\frac{f}{k}\right) = \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_0}{k} G_0\left(\alpha_0\left(\frac{f}{k} - f_1\right)\right)$$

Масштабно-частотная модель (5) построена на основе экспериментальных данных и является эвристической. МЧ-модель является детерминированной моделью и только констатирует факт расширения дискретных составляющих звукоряда с ростом номера гармоники  $k$ . Ниже на основе теории случайных функций выведены соотношения, существенно уточняющие эту модель.

## 2. Стохастическая модель звукоряда

Рассмотрим гармонику (ДС) с фиксированной частотой  $\Omega$  и случайной фазой  $\Psi$ :

$$(6) \quad X_1(t) = A \cos(\Omega t + \Psi) = U \cos(\Omega t) + V \sin(\Omega t),$$

где  $X_1(t)$  – случайная функция от угла  $\Psi \in [-\pi, \pi]$ ,  $U$  и  $V$  – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и с одинаковыми дисперсиями, равными  $D$ ;  $t$  – время.

Используя формулу (6), сформируем звукоряд, состоящий из  $K$  гармоник и описываемый формулой:

$$(7) \quad X(t) = \sum_{k=1}^K (U_k \cos(k\Omega t) + V_k \sin(k\Omega t)),$$

где  $U_1, \dots, U_K, V_1, \dots, V_K$  – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями  $D(U_k) = D(V_k) = D_k$ . Случайная функция  $X(t)$  стационарна в широком смысле [5] и ее корреляционная функция определяется формулой

$$(8) \quad K_x(\tau) = \sum_{k=1}^K D_k \cos(k\Omega\tau).$$

На практике частота  $\Omega \neq \text{const}$ , а колеблется в определенном интервале частот, определяемом динамическими характеристиками шумоизлучающего механизма и параметрами системы стабилизации его частоты вращения.

Предположим, что в формуле (7) частота  $\Omega$  – случайная величина с плотностью вероятности  $p(\omega)$  заданной на пространстве  $\Omega = (0, \omega)$ . Таким образом, случайная функция  $X(t)$  стохастически зависит от  $\Omega$ . В дальнейшем будем называть эту модель – стохастическая модель (С-модель).

Корреляционная функция (8) для фиксированной частоты  $\Omega$  в случае, если  $\Omega$  – случайная величина с плотностью вероятности  $p(\omega)$ , преобразуется, с учетом формулы полной вероятности, к виду

$$K_x(\tau) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^K D_k p(\bar{\omega}) \cos(k\bar{\omega}\tau) d\bar{\omega} = \sum_{k=1}^K D_k \int_0^\infty p(\bar{\omega}) \cos(k\bar{\omega}\tau) d\bar{\omega}.$$

Для действительной стационарной случайной функции  $X(t)$  на основании формул Эйлера можно определить ее спектральную плотность [5] по формуле

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum_{k=1}^K D_k \left[ \int_0^\infty p(\bar{\omega}) \cos(k\bar{\omega}\tau) d\bar{\omega} \right] \cos(\omega\tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} p(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \sum_{k=1}^K D_k \int_0^{\infty} \cos(k\bar{\omega}\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \sum_{k=1}^K D_k \int_0^{\infty} [\cos(k\bar{\omega} - \omega)\tau + \cos(k\bar{\omega} + \omega)\tau] d\tau = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} p(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \sum_{k=1}^K D_k \int_0^{\infty} [e^{j(\omega-k\bar{\omega})\tau} + e^{-j(\omega-k\bar{\omega})\tau} + e^{j(\omega+k\bar{\omega})\tau} + e^{-j(\omega+k\bar{\omega})\tau}] d\tau = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^K D_k [\delta(\omega - k\bar{\omega}) + \delta(\omega + k\bar{\omega})] p(\bar{\omega}) d\bar{\omega} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^K \frac{D_k}{k} [\delta(\omega - \mu) + \delta(\omega + \mu)] p\left(\frac{\mu}{k}\right) d\mu = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{D_k}{k} p\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (-\infty < \omega < \infty)
 \end{aligned}$$

Для действительной стационарной случайной функции достаточно задать спектральную плотность в диапазоне положительных частот

$$(9) \quad G_x(\omega) = 2S_x(\omega) = \sum_{k=1}^K \frac{D_k}{k} p\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (0 \leq \omega < \infty)$$

Сравним формулы (3),(5) и (9). Формула (5) дает оценку общей СПМ ЗР в виде суммы расширяющихся в кратное число раз СПМ первой гармоники, ширина которой известна (или известна ее оценка). Формула (9) содержит два множителя:

- $D_k / k$ –дисперсия  $k$ -ой гармоники, которая, в отличие от Ч-модели и МЧ-модели нормируется номером гармоники  $k$ ;
- $p(\omega/k)$ – нормированная к номеру гармоники  $k$  плотность вероятности случайной величины  $\Omega$  (частота первой гармоники).

Таким образом, для С-модели ширина СПМ  $k$ -ой гармоники растет пропорционально  $k$ , а максимальное значение СПМ  $k$ -ой гармоники, в отличие от МЧ-модели, уменьшается пропорцио-

нально  $1/k^2$ . Это объясняет тот факт, что в ЗР не наблюдается высоких гармоник – они маскируются широкополосным шумом.

### 3. Результаты математического моделирования

Для подтверждения справедливости стохастической модели на языке MATLAB была создана программа, генерирующая звукоряд (7) с заданными  $D_k$ ,  $p(\omega)$  и частотой 1-ой гармоники. Для получения СПМ этого ЗР методом БПФ проводится его спектральный анализ. Ниже приведены результаты моделирования.

На рис.1 приведены временные реализации сигнала от одной ДС для Ч-модели и С-модели при условии, что центральная частота для С-модели совпадает с частотой Ч-модели, а  $D_1=A^2_1=1$ .

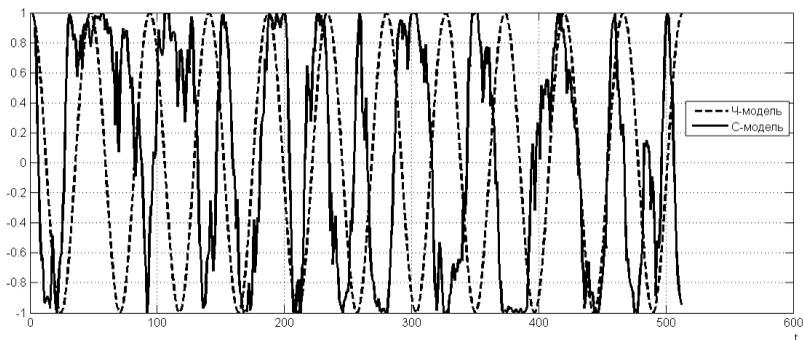


Рис. 1. Пример временных реализаций сигнала для Ч-модели и С-модели

На рис.2 для Ч-модели приведена СПМ звукоряда, состоящего из 4-х гармоник с одинаковыми амплитудами  $A_1=A_2=A_3=A_4=1$ , числом временных отсчетов  $n=8192$  и  $f_1=900$  у.е. (в единицах разрешения по частоте для БПФ)

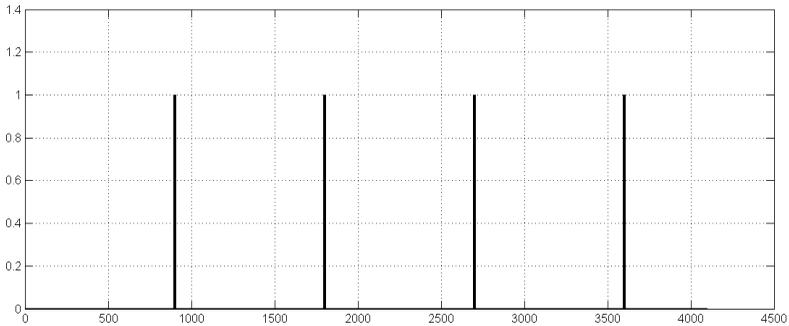


Рис. 2. Энергетический спектр сигнала для C-модели

На рис.3 для C-модели приведена СПМ этого же звукоряда при  $D_1=D_2=D_3=D_4=1$  и плотностью вероятности  $p(\omega)$ , описываемой нормальным законом распределения (программа «gandn»). Для получения состоятельной оценки СПМ проведено сглаживание по 32 реализациям.

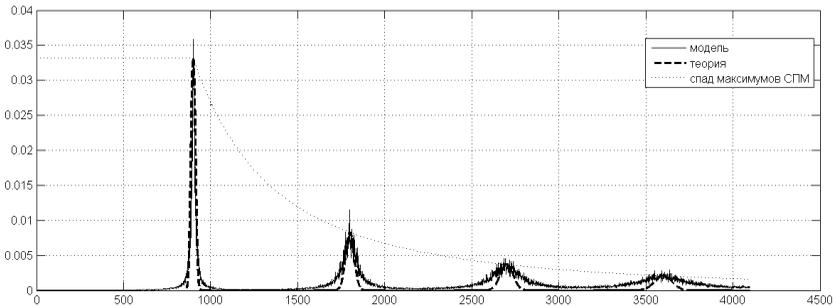


Рис. 3. Энергетический спектр сигнала для C-модели

Из приведенной на рис.3 СПМ можно получить следующие данные:

–средняя оценка максимума СПМ для 1-ой гармоники равна 0,033, для 2-ой гармоники равна 0,008, для 3-ей гармоники равна 0,0035, для 4-ой гармоники равна 0,002, максимальное значение СПМ  $k$ -ой гармоники, уменьшается пропорционально  $1/k^2$ , т.е.

совпадает с теоретическим значением, рассчитанным по формуле (9);

–ширина ДС на уровне 0,5 максимума СПМ (соответствует уровню -3дБ) для 1-ой гармоники приблизительно равна (в у.е.) 13, для 2-ой гармоники равна 28, для 3-ей гармоники – 54, для 4-ой – 81, т. е. с ростом номера гармоники  $k$  ДС расширяется больше значения, рассчитанного по формуле (9), что можно объяснить наличием шума дискретизации при моделировании.

Таким образом, с увеличением номера  $k$  ширина ДС увеличивается линейно, а величина максимума СПМ ДС спадает согласно квадратичному закону, что полностью соответствует формуле (9).

#### **4. Заключение**

Описание звукоряда эвристической масштабнo-частотной моделью (5) является более точным, чем модель (3), так как кроме определения места ДС в ЗР можно оценить ее ширину, зная СПМ 1-ой гармоники. Рассмотренная выше стохастическая модель звукоряда (9) позволяет оценить как ширину каждой ДС звукоряда, так и уменьшение максимума СПМ для каждой ДС в зависимости от дисперсии случайной величины  $\Omega$  (первой гармоники). Такая модель может найти применение при моделировании и разработке устройств обнаружения узкополосных шумовых сигналов [6] и при исследовании, моделировании и разработке устройств виброгашения [3]. Например, при сравнении рис.2 и рис.3 видно, что максимум 1-ой гармоники для С-модели (0,0332) на 14,8дБ меньше, чем у Ч-модели (1,0). Из рассмотренного выше примера можно сделать вывод, что при «подмешивании» в контур управления системы стабилизации частоты вращения какого-либо механизма шумоподобного сигнала происходит существенное «размывание» дискретных составляющих в спектре его шумоизлучения.

## Литература

1. БОЛГОВ В.М., ПЛАХОВ Д.Д., ЯКОВЛЕВ В.Е. *Акустические шумы и помехи на судах*. Л.: Судостроение, 1984, 192с
2. БУРДИК В.С. *Анализ гидроакустических систем*. – Л.: Судостроение, 1988. – 392 с
3. ВЛАСОВ С.В., ГЕНКИН М.Д., МЕДВЕДКОВ А.М., НОВИКОВ А.К. *Модуляция вибраций и ее применение для виброгашения* // Акустический журнал. Т.29, №4, 1983, с.564-566.
4. ГОРБАНЬ И.И. *Обработка гидроакустических сигналов в сложных динамических условиях*. Киев. Наукова думка, 2008, 276с.
5. ПУГАЧЕВ В.С. *Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления*. Физматгиз, 1962, 884с.
6. САПРЫКИН В.А., МАЛЫЙ В.В., ШАТАЛОВ Г.В. «Устройство обнаружения узкополосных шумовых гидроакустических сигналов на основе вычисления интегрального вейвлет-спектра». Патент на изобретение РФ № 2367970 от 20.09.2009 с приоритетом от 24.12.2007, Бюл. №26 – 27с..
7. УРИК Р.Дж. *Основы гидроакустики*. Л.: Судостроение, 1978, 446с.

## STOCHASTIC MODEL OF THE HARMONIC SERIES

**Igor Rudko**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (igor-rudko@mail.ru).

*Abstract: Mathematical models of discrete components and harmonic series contained in the energy spectrum of the noise emission of rotating equipment and machinery. Based on the theory of random functions is proposed a stochastic model of the harmonic series, which is more accurate than existing heuristic models. The proposed stochastic model can be used in the modeling and designing of detection devices narrowband signals, as well as in the study, modeling and designing vibration damping devices.*

Keywords: discrete components, harmonic series, spectral power density, the theory of random functions.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии*

*Поступила в редакцию  
Опубликована*