УДК 517.977.5
ББК 32.81

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Роднищев Н.Е.[1], Аюкасов Р.А.[2]
(Казанский Государственный Технический Университет им. А.Н. Туполева, Казань)

Исследуются условия оптимальности управления нелинейных стохастических систем с запаздыванием.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, оптимальное управление, методы оптимизации, уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка, схема Дубовицкого-Милютина.

1. Введение.

В статье исследуются необходимые условия оптимальности управления нелинейными стохастическими системами с запаздыванием. Используя расширение фазового пространства [1], исходный процесс, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием, сводится к диффузионному Марковскому процессу [1,2]. Это позволяет свести исходную стохастическую задачу с запаздыванием к последовательности детерминированных задач с распределенными параметрами относительно плотности распределения компонент расширенного вектора состояний, удовлетворяющих

[1] *Николай Егорович Роднищев, доктор технических наук, профессор (Казань, ул. Большая Красная д. 55, тел (843)231-00-86*
[2] *Рустам Анатольевич Аюкасов, аспирант (Rustam.Aukasov@tatar.ru)*

параболическому уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка (КФП) [3]. Для исследования необходимых условий оптимальности используются конструкции доказательств, изложенные в работах [3,4]

2. Постановка задачи

Требуется определить оптимальное управление u, доставляющее минимум терминальному функционалу

(1.1) $$I_0(u)=\int_{\Omega}\Phi_0(x)p(t_k,x)dx$$

характеризующему эффективность функционирования системы, поведение которой на отрезке времени $[t_0,t_k]$ описывается нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями с запаздыванием

(1.2) $$dX_i=\varphi_i(t,X(t),X(t-\tau),u)dt+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t,X(t))d\eta_j(t)$$
$$X(t)=\phi(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0]$$

Здесь t – время; t_0,t_k – начальная и конечная точка рассматриваемого интервала времени $[t_0,t_k]$; τ – постоянное запаздывание; $X(t)$ – n-мерная вектор-функция состояния фазовых координат системы, определенная на отрезке времени $[t_0-\tau,t_0]$ функцией $\phi(t)$; $d\eta_j(t)$ –- стохастические дифференциалы Стратоновича некоррелированных Винеровских процессов $\eta_j(t)$, с интенсивностями G_j^{η}; $u(t)$ – кусочно-непрерывная детерминированная r-мерная вектор-функция управления.

Как известно [2] процесс, описываемый уравнениями (1.2), в общем случае не является Марковским и к нему не применим аппарат КФП-уравнений. Поэтому для сведения процесса (1.2) к Марковскому расширим фазовое пространство [1], исключив из системы (1.2) запаздывание. Для этого покроем отрезок времени

$[t_0, t_k]$ сеткой с шагом τ и узлами $t_q = t_0 + q\tau$, $q = 1, \ldots, N$, где q номер интервала $[t_{q-1}, t_q]$, N - количество интервалов, $t_k = t_0 + N\tau$. Точки t_q представляют собой правильные точки в смысле [5 стр. 80]. Введем на интервале времени $[t_{q-1}, t_q]$ расширенный вектор состояний $X_q(s) = \left(X^1(s), X^2(s), \ldots, X^q(s)\right)$ с компонентами фазовых состояний системы по последовательно примыкающим интервалам, где $s \in [0, \tau]$, $X^q(s) = \left(X_1(t_{q-1}+s), X_2(t_{q-1}+s), \ldots, X_n(t_{q-1}+s)\right)$, верхние индексы обозначает номер интервала. Обозначим управление на интервале $[t_{q-1}, t_q]$ векторфункцией $u^q(s) = \left(u_1(t_{q-1}+s), u_2(t_{q-1}+s), \ldots, u_r(t_{q-1}+s)\right)$, а аддитивные возмущения $\eta^q(s) = \left(\eta_1(t_{q-1}+s), \eta_2(t_{q-1}+s), \ldots, \eta_n(t_{q-1}+s)\right)$

Тогда задача (1.1) – (1.2) сводится к определению оптимального управления $u(t) = \left(u^1(s), u^2(s), \ldots, u^q(s), ..., u^N(s)\right)$, которое доставляет минимум функционалу

$$I_0(u) = \sum_{q=1}^{N} \int_{\Omega_q} \Phi_0\left(x^q\right) p\left(\tau, x_q\right) dx_q \,, \tag{1.3}$$

характеризующему эффективность управления системы, поведение которой на отрезке времени $[t_0, t_k]$ по последовательно примыкающим участкам $[t_{q-1}, t_q]$, $q = 1, \ldots, N$ описывается стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\begin{gathered} dX_i^m = \varphi_i\left(t_{m-1}+s, X^m, X^{m-1}, u^m\right)ds + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\left(t_{m-1}+s, X^m\right)d\eta^m \\ X_i^0(s) = \phi_i\left(t_0 - \tau + s\right), X_i^m(0) = X_i^{m-1}(\tau) \\ (m = 1, ..., q), (i = 1, ..., n), s \in [0, \tau] \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $\varphi_i\left(t_{m-1}+s, x^m, x^{m-1}, u^m\right)$, $\sigma_{ij}\left(t_{m-1}+s, x^m\right)$ неслучайные, неупреждающие функции. Правые части (1.4) равномерно по управлению u^m удовлетворяют известным требованиям [6] существования решения (1.4). Управление $u^q(s)$, определяемое на интервале $[t_{q-1}, t_q]$, в соответствии с принципом оптимальности Беллмана, не ухудшает оптимальное управление на предшествующих интервалах. Поэтому при расширении вектора состояния системы по последовательно примыкающим участкам на интервале $[t_{q-1}, t_q]$ в уравнениях (1.4) рассматривается управление $u_q(s)=\left(u^{*1}(s), u^{*2}(s), \ldots, u^{*m}(s), \ldots, u^{*q-1}(s), u^q(s)\right)$, где звездочкой обозначены оптимальные управления, определенные на предшествующих интервалах.

Уравнения (1.4) описывают на отрезке времени $\left[t_0, t_k\right]$ последовательно по примыкающим участкам $[t_{q-1}, t_q]$ диффузионный Марковский процесс. Плотность вероятности $p(s, x_q)$ состояний процесса $X(t)$ на отрезках $[t_{q-1}, t_q]$ удовлетворяет уравнению КФП (1.6), а в узлах t_q условиям сопряжения (1.7).

Таким образом, при расширении вектора состояний системы стохастическая задача (1.3), (1.4) сводится к эквивалентной детерминированной задаче с распределенными параметрами (1.5)-(1.7) относительно плотности вероятности $p(s, x_q)$ вектора состояний системы:

(1.5) $$I_0(u)=\sum_{q=1}^{N} \int_{\Omega_q} \Phi_0\left(x^q\right) p\left(\tau, x_q\right) dx_q \rightarrow \min$$

(1.6) $$\frac{\partial p\left(s, x_q\right)}{\partial s}-L\left(s, x_q, u_q\right) p\left(s, x_q\right)=0,$$

$$(q=1, \ldots, N),\ s \in[0, \tau]$$

$$p(s,x_q)=p(s,x^1)p(s,x^2\mid\tau,x^1)\cdots p(s,x^q\mid\tau,x^{q-1})$$
(1.7)
$$p(0,x^1)=\delta(x_1-x_0);\ p\left(0,x^q\right)=p\left(\tau,x^{q-1}\right),\ \left(q=2,\dots,N\right)$$

В выражении (1.5), (1.6) $\Omega_q=\bigcup\limits_{m=1}^{q}\Omega_m,\quad \int\limits_{\Omega_m}=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{m}$.

$L\left(s,x_q,u_q\right)(\cdot)$ – эллиптический оператор

$$L\left(s,x_q,u^q\right)(\cdot)=-\sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i^m}\left[A_i^m\left(s,x^m,x^{m-1},u^m\right)(\cdot)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\left(\partial x_i^m\right)^2}\left[B_{ii}^m\left(s,x^m\right)(\cdot)\right]$$

с коэффициентами сноса

$$A_i^m\left(s,x^m,x^{m-1},u^m\right)=\varphi_i\left(t_{m-1}+s,x^m,x^{m-1},u^m\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\sigma_{ij}\left(t_{m-1}+s,x^m\right)}{\partial x_i^m}\sigma_{ij}\left(t_{m-1}+s,x^m\right)G_j^\eta$$

и диффузии

$$B_{ii}^m\left(s,x^m\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_{ij}\left(t_{m-1}+s,x^m\right)\right)^2G_j^\eta$$

3. Необходимые условия оптимальности

Для исследования необходимых условий оптимальности задачи (1.5)-(1.7) используем конструкцию доказательств [3,4]. Сформулируем условия существования управления с точки зрения невырожденности задачи (1.5)-(1.7).

Задача (1.5)-(1.7) называется невырожденной (система (1.4) вполне управляемой), если совокупность всех значений δp − удовлетворяет решению уравнения в вариациях (2.1), когда δu^q пробегает все пространство $L_2[0,\tau]$.

$$\frac{\partial \delta p}{\partial s} - L\left(s, x_q, u^q\right)\delta p - \left(L_{u^q}\left(s, x_q, u^q\right)p\right)\delta u^q = 0, \tag{2.1}$$
$$\delta p\big|_{s=0} = \delta p_0, \quad q = 1, \ldots, N$$

В более явной форме условия управляемости устанавливаются леммой 1.

Лемма 1 (условия невырожденности). Задача (1.5) − (1.7) не вырожденная, если совокупность касательных вариаций $(\delta p, \delta u^q) \in K$ к множеству

$$Q = \left\{ p, u^q \left| \frac{\partial p}{\partial s} - L\left(s, x_q, u_q\right)p = 0,\ p\big|_{s=0} = p_0 \right. \right\} \tag{2.2}$$

в точке (p, u^q) есть подпространство

$$K = \left\{ \delta p, \delta u^q \left| \frac{\partial \delta p}{\partial s} - L\left(s, x_q, u_q\right)\delta p - \left(L_{u^q}\left(s, x_q, u_q\right)p\right)\delta u^q = 0,\ \delta p\big|_{s=0} = \delta p_0 \right. \right\},$$

Здесь $L_{u^q}\left(s, x_q, u_q\right)(\cdot)$ линейный оператор, определяемый выражением:

$$L_{u^q}\left(s, x_q, u_q\right)(\cdot) = -\sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^m}\left[\frac{A_i^m\left(s, x^m, x^{m-1}, u^m\right)}{\partial u^q}(\cdot)\right]$$

Доказательство приведено в приложении.

Необходимые условия оптимальности управляемой стохастической системы в форме принципа минимума, устанавливаются теоремой 1.

Теорема 1 (слабый принцип минимума). Пусть (p^*, u_q^*) − оптимальное решение задачи (1.5) − (1.7). Тогда существуют не равные тождественно нулю функции $\lambda_q\left(s, x_q\right) \in C^{1,2}$, $q = \overline{1, N}$ такие, что

а) $\lambda_q\left(s, x_q\right)$ удовлетворяет решению задачи Коши

(2.3) $$\frac{\partial\lambda_q}{\partial s} + L^*\left(s, x_q, u_q^*\right)\lambda_q = 0,\ s \in [\tau, 0],$$

$$\lambda_q\left(\tau, x_q\right) = \Phi_0\left(x^q\right), \quad q = \overline{1, N}$$

б) для почти всех $s \in [0, \tau]$ и всех $u^q \in L_2[0, \tau]$

(2.4) $$M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^q}\right)\left(u^q - u^{*q}\right) \geq 0\,.$$

В выражениях (2.3) (2.4) $L^*\left(s, x_q, u_q\right)(\cdot)$ − линейный оператор, сопряженный к оператору $L\left(s, x_q, u_q\right)(\cdot)$:

$$L^*\left(s, x_q, u_q\right)(\cdot) = \sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i^m} A_i^m(s, x^m, x^{m-1}, u^m) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2(\cdot)}{\left(\partial x_i^m\right)^2} B_{ii}^m(s, x^m),$$

$$R_q = L^*\left(s, x_q, u_q\right)\lambda_q\,.$$

Доказательство приведено в приложении.

Следствие. Оптимальное управление удовлетворяет соотношению

$$M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^q}\right) = 0\,.$$

Для установления необходимых условий оптимальности сильного экстремума, используя преобразование времени $s \to \mu$ [7]:

(2.5) $$s(\mu) = \int_0^{\mu} w(\mu)\,d\mu,\ \mu \in [0, 1],$$

$$\mu(1) = \tau,\ w(\mu) \geq 0$$

перейдем от задачи (1.5) − (1.7) к эквивалентной задаче (2.6) − (2.9)

(2.6) $$I_0(u)=\sum_{q=1}^{N}\int_{\Omega_q}\Phi\left(x^q\right)p\left(\mu(1),x_q\right)dx_q \to \min$$

(2.7) $$\frac{\partial p(\mu,x_q)}{\partial\mu}-w(\mu)L\left(\mu,x_q,u^q\right)p\left(\mu,x_q\right)=0,$$
$$(q=1,\ldots,N),\ \mu\in[0,1]$$

(2.8) $$p(\mu,x_q)=p(\mu,x^1)p(\mu,x^2\mid\mu(1),x^1)\cdots p(\mu,x^q\mid\mu(1),x^{q-1})$$
$$p(0,x^1)=\delta(x_1-x_0);\ p\left(0,x^q\right)=p\left(\mu(1),x^{q-1}\right),\ (q=2,\ldots,N)$$

(2.9) $w(\mu)\geq 0$.

Здесь

$$u^q(\mu)=\begin{cases}u^q(s(\mu)) & \textit{при}\ \ \mu\in R_1=\{\mu\in[0,1]:\ w(\mu)>0\},\\ \textit{произвольно} & \textit{при}\ \ \mu\in R_1=\{\mu\in[0,1]:\ w(\mu)=0\}.\end{cases}$$

Совершенно очевидно, что решение $\left(p^*,u_q^*,w^*\right)$ задачи (2.6) − (2.9) является также решением задачи, которая отличается от (2.6) − (2.9) тем, что управление u_q^* фиксируется и решение (2.6) − (2.9) ищется по $w(\mu)$.

Поскольку ограничение (2.9) имеет вид $w(\mu)\in M\subset E_1$, M - выпуклое в E_1 множество с внутренней точкой (положительная полуось), то, применяя к задаче (2.6) − (2.9) при фиксированном управлении u_q^* локальный принцип минимума (теорема 1), относительно управления $w(\mu)$ получим, что для $w^*(\mu)$ согласно (2.4) выполняется условие

(2.10) $$M\left(\frac{\partial\overline{R}_q}{\partial w}\right)\left(w-w^*\right)\geq 0,$$

где $\overline{R}_q = w(\mu)L^*\left(\mu, x_q, u_q^*\right)\lambda_q$. Принимая во внимание определение $\overline{R}^{\,j}$ из (2.10) получим

(2.11) $\quad M[R_q(\mu, x_q, u_q^*, \lambda_q)](w - w^0) \geq 0$

для почти всех $\mu \in [0,1]$ и $w(\mu) \geq 0$.

Отсюда следует, что $M[R_q(\mu, x_q, u_q^*, \lambda_q)] = 0$ для почти всех $\mu \in R_1 = \{\mu : w^*(\mu) > 0\}$, $M[R_q(\mu, x_q, u_q^*, \lambda_q)] \geq 0$ для почти всех $\mu \in R_1 = \{\mu : w^*(\mu) = 0\}$.

Проводя аналогично [7] построение $w^*(\mu)$, $u^{*q}(\mu)$, где $w^*(\mu)$ задается в виде

$$w^*(\mu) = \begin{cases} \tau - 0, & \mu \in R_1, \\ 0 \quad , & \mu \in R_2 = [0,1] \setminus R_1, \end{cases}$$

после перехода $\mu \to s : \mu(s) = \inf\{\mu : s(\mu) = s\}$ получим:

$M[R_q(s, x_q, u_q^*, \lambda_q)] = 0$ для почти всех $s \in [0, \tau]$,

$M[R_q(s, x_q, u_q, \lambda_q)] \geq 0$ для почти всех $s \in [0, \tau]$.

Таким образом, используя редукцию задачи (2.6) − (2.9) и применяя к ней теорему 1, получим необходимые условия оптимальности сильного экстремума, сформулированного в форме принципа минимума теоремой 2 .

Теорема 2 (сильный локальный минимум). Пусть (p^*, u_q^*) − оптимальное решение задачи (1.5)-(1.7). Тогда существуют не равные тождественно нулю функции $\lambda_q\left(s, x_q\right) \in C^{1,2}$, $q = \overline{1,N}$ такие, что

а) $\lambda_q(t, x_q)$ удовлетворяют решению краевой задачи (2.3), б) при почти всех $s \in [0,\tau]$ оптимальному управлению u_q^* соответствует минимум $M[R_q(s,x_q,u_q,\lambda_q)]$ по переменной u^q.

4. Необходимые условия оптимальности управления с обратной связью.

Из теоремы 1 при фиксировании реализации вектора состояний $X^q(s)$, как предельные вытекают условия оптимальности управления с обратной связью.

Оптимальное управление $u_q^* = u_q^*(s, x_q)$ определяется как локальное управление, связанное в каждый момент времени s и соответствующим ему состоянием $x_q = X_q(s)$ с программным управлением $u_q^*(t) = u_q^*(s, x_q, t)$, $t \in [s,\tau]$ относительно фиксированной начальной точки (s, x_q) соотношением:

$u_q^*(t) = u_q^*(s, x_q, t)\big|_{t=s} = u_q^*(s, x_q)$.

Относительно точки (s, x_q) решение уравнения КФП (1.6) определяется плотностью вероятности перехода $p(s, x_q, \tau, X_q(\tau))$.

В качестве оценки эффективности управления рассматривается критерий

(2.5) $\quad I_0^q(s, x_q) = \min M_{s,x_q}\left(\Phi_0\left[X^q(\tau)\right]\right), \quad q = \overline{1,N}$

представляющий собой функцию точки $x_q(s) = X_q(s)$ фазового пространства системы в момент времени s, который характеризует эффективность управления $u^q(t)$ на отрезке времени $[0,\tau]$ при условии, что в момент времени s изображающая точка в фазовом пространстве находилась в состоянии $X_q(s) = x_q$. Функционал (2.5) относительно точки (s, x_q) и плотности вероятности перехода $p(s, x_q, t, y_q)$, рассматривается при этом как условное математическое ожидание в момент времени τ при условии, что в момент времени s система находилась в состоянии $X_q(s) = x_q$.

Необходимые условия оптимальности управления $u_q = u_q(s, x_q)$ устанавливает теорема 3.

Теорема 3. Пусть $u_q^* = u_q^*(s, x_q)$ - оптимальное управление, доставляющее при каждом (s, x_q) минимум критерию (2.5). Тогда существуют, не равные одновременно нулю числа $\alpha_q \geq 0$ и функции $\lambda_q(s, x_q) \in C^{1,2}$, $q = \overline{1, N}$ такие, что

а) функции $\lambda_q(s, x_q)$ удовлетворяют уравнению Беллмана

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_q}{\partial s} + \min_{u^{(q)} \in U} L^*\left(s, u^{(q)}, x_q\right)\lambda_q = 0, \quad s \in [0, \tau] \\ &\lambda_q(\tau, x_q) = \alpha_q \Phi_0(x_q), \quad q = \overline{1, N} \end{aligned} \tag{2.6}$$

б) оптимальное управление $u_q^* = u_q^*(s, x_q)$ при всех $s \in [0, \tau]$ удовлетворяет условию

$$L^*\left(u^{*q}(s, x_q), \cdot\right)\lambda_q(s, x_q) = \min_{u^{(q)}} L^*\left(u^q(s, x_q), \cdot\right)\lambda_q(s, x_q) \tag{2.7}$$

Доказательство приведено в приложении.

5. Заключение.

Сформулированный принцип минимума позволяет применять единую методику исследования стохастических дифференциально-разностных систем с постоянным запаздыванием.

Расширение фазового пространства сводит задачу оптимизации (1.1)-(1.2) управления стохастических дифференциальных систем к эквивалентной последовательности (1.3)-(1.6) Марковских систем, что делает возможным использование аппарата уравнений КФП.

Следует отметить, что использование данной методике приводит к увеличению размерности каждой задачи (1.3)-(1.6), а также требует нахождения решений уравнения КФП. Решение этого уравнения в явном виде, как известно, можно получить только для линейных систем и для некоторых типов систем не выше второго порядка.

6. Приложение.

Доказательство леммы 1. Из существования и единственности решения (1.10) по распределению и непрерывной зависимости плотности вероятности $p(s,x_q)$ от допустимого управления $u^q(s)$ и начального распределения $p(0,x_q)$ следует, что оператор

(П.1) $$G(p,u^q)=\left\{\left|\frac{\partial p}{\partial s}-L(s,x_q,u_q)p,\ p\right|_{s=0}=p_0\right\}$$

действующий в $C^{1,2}$, непрерывен в операторной норме по (p,u^q) и дифференцируем по Фреше

(П.2)

$$G'(p,u^q)(\delta p,\delta u^q)=\left\{\frac{\partial \delta p}{\partial s}-L(s,x_q,u_q)\delta p-\left(L_{u^q}(s,x_q,u^q)p\right)\delta u^q,\ \delta p_0\right\}$$

в окрестности точки (p,u^q). Покажем, что оператор $G'(p,u^q)(\cdot)$ отображает множество $C^{1,2}\times L_2[0,\tau]$ на все множество $C^{1,2}$, т.е. уравнение

(П.3) $$\frac{\partial \delta p}{\partial s}-L(s,x_q,u_q)\delta p-\left(L_{u^q}(s,x_q,u_q)p\right)\delta u^q=a(s,x_q),$$
$$\delta p\big|_{s=0}=\delta p_0=0,\ s\in[0,\tau]$$

имеет решение $(\delta p,\delta u^q)$ для любого $a(s,x_q)\in C^{1,2}$.

Положим $\delta u^q\equiv 0$, тогда (П.3) примет вид:

$$
(\text{П.4}) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial s} - L(s, x_q, u_q)\xi = a(s, x_q), \\ &\xi(s, x_q)\big|_{s=0} = \xi_0(0, x_q) = 0, \;\; s \in [0, \tau] \end{aligned}
$$

Определим $\xi(s, x_q) \in C^{1,2}$ как классическое решение задачи (П.4), которое по определению [9] непрерывно на $\Omega_q \times [0, \tau]$, удовлетворяет начальному условию $\xi(0, x_q) = 0$ и для любой ограниченной функции $\lambda(s, x_q) \in C^{1,2}$ с компактным носителем $\Omega_q \times [0, \tau]$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$
(\text{П.5}) \quad \int_{\Omega_q} \lambda \xi \Big|_0^\tau dx_q - \int_0^\tau \int_{\Omega_q} \left\{ \left[\frac{\partial \lambda}{\partial s} + L^*(s, x_q, u_q)\lambda \right] \xi + \lambda a(s, x_q) \right\} dx_q ds = 0
$$

где

$$
L^*(s, x_q, u_q)(\cdot) = \sum_{m=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^m} \left[A_i^{(m)}(s, x^m, x^{m-1}, u^m)(\cdot) \right] + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\left(\partial x_i^{(m)}\right)^2} \left[B_{ii}^{(m)}(s, x^m)(\cdot) \right]
$$

линейный оператор, сопряженный к $L(s, x_q, u_q)(\cdot)$.

Чтобы убедиться в этом, проинтегрируем в (П.5) по частям член $\lambda \xi$ по переменной *s*. Тогда с учетом соотношения между прямым и сопряженным элептическим оператором [10], из (П.5) после несложных преобразований получим:

$$
\int_o^\tau \int_{\Omega_q} \lambda \left[\frac{\partial \xi}{\partial s} - L(s, x_q, u_q)\xi - a(s, x_q) \right] dx_q ds = 0
$$

Отсюда в силу произвольности $\lambda(s, x_q) \in C^{1,2}$ с компактным носителем следует, что $\xi(s, x_q) \in C^{1,2}$ удовлетворяет уравнению (П.4).

В силу невырожденности системы можно найти такие $y(s, x_q) \in C^{1,2}$, $\delta u^q \in L_2[0,\tau]$, что

(П.6) $$\frac{\partial y}{\partial s} - L(s, x_q, u_q)y - \left(L_{u^q}(s, x_q, u_q)p\right)\delta u^q = 0,$$
$$y(0, x_q) = 0,\ s \in [0,\tau]$$

Определим $\delta p = y + \xi$ и применим к нему оператор $G'(p,u^{(q)})(\cdot)$, тогда с учетом соотношения между прямым и сопряженным элептическим оператором и (П.6) получим:

$$G'(p,u^q)(\delta p,\delta u^q) = \left\{\frac{\partial \delta p}{\partial s} - L(s,x_q,u_q)\delta p - \left(L_{u^q}(s,x_q,u_q)p\right)\delta u^q, \delta p_0\right\} =$$
$$= \left\{\frac{\partial y}{\partial s} - L(s,x_q,u_q)y - \left(L(s,x_q,u_q)p\right)\delta u^q + \frac{\partial \xi}{\partial s} - \right.$$
$$\left. - L(s,x_q,u_q)\xi, y(0,x_q) + \xi(0,x_q)\right\} = \{a(s,x_q)\}$$

Отсюда следует, что оператор $G'(p,u^{(q)})$ отображает $C^{1,2} \times L_2[0,\tau]$ на все множество $C^{1,2}$ и согласно теореме Люстерника [7] конус касательных вариаций к множеству Q имеет вид

$$K = \left\{\delta p, \delta u^q \left| \frac{\partial \delta p}{\partial s} - L(s,x_q,u_q)\delta p - \left(L_{u^q}(s,x_q,u_q)p\right)\delta u^q = 0;\ \delta p_0 = 0\right.\right\}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Пусть (p^*,u^{*q}), $q = (1,\ldots,N)$ - оптимальное решение задачи (1.5) – (1.7). Для анализа условий оптимальности определим согласно [7] конус подходящих вариаций, конус касательных вариаций и конус возможных вариаций (p^*,u^{*q}).

Так как функционал $I_0(u)$ дифференцируем по Фреше, то конус подходящих вариаций K_0 на участке $[t_{q-1}, t_q]$ имеет вид

$$K_0 = \left\{\delta p, \delta u^q \left| \int_{\Omega_q} \Phi_0(x^q)\delta p(\tau, x_q)dx_q < 0\right.\right\},$$

которому [7] соответствует сопряженный конус

$$K_0^* = \left\{ l_0^* \middle| l_0^*\left(\delta p, \delta u^q\right) = -\alpha_0 \int\limits_{\Omega_q} \Phi_0\left(x^q\right)\delta p\left(\tau, x_q\right)dx_q,\ \alpha_0 \geq 0 \right\}$$

Для определения конуса касательных вариаций введем оператор

$$G(p, u^q) = \left\{ \left| \frac{\partial p}{\partial s} - L\left(s, x_q, u_q\right)p,\ p\right|_{s=0} = p_0 \right\}$$

действующий из $C^{1,2} \times L_2[0,\tau] \to C^{1,2}$, который в окрестности точки (p^*, u^{*q}) имеет производную по Фреше

$$G'(p^*, u^{*q})(\delta p, \delta u^q) = \left\{ \frac{\partial \delta p}{\partial s} - L\left(s, x_q, u_q^*\right)\delta p - \right.$$
$$\left. -\left(L_{u^q}\left(s, x_q, u_q^*\right)p_0\right)\delta u^q,\ \delta p_0 \right\}$$

непрерывную в операторной норме по (p, u^q), который согласно леммы 1 отображает $C^{1,2} \times L_2[0,\tau] \to C^{1,2}$ и в соответствии с теоремой Люстерника [7], конус касательных вариаций имеет вид

$$K_1 = \left\{ p, \delta u^q \middle| \frac{\partial \delta p}{\partial s} - L\left(s, x_q, u_q\right)\delta p - \right.$$
$$\left. -\left(L_{u^q}\left(s, x_q, u_q\right)p\right)\delta u^q = 0;\ \delta p_0 = 0 \right\},$$

Так как K_1 - подпространство, определенное линейным оператором, то сопряженный конус K_1^* [7] состоит из всех функционалов $l_1^*\left(\delta p, \delta u^{(q)}\right) = 0$, для всех $\left(\delta p, \delta u^q\right) \in K_1$.

Относительно управлений $u^q(s) \in U$ конусы возможных вариаций имеет вид:

$$K_2 = \left\{ \delta u^q \middle| \delta u^q = \varepsilon\left(\delta u^q - \delta u^{*q}\right), \varepsilon \geq 0,\ u^q(s) \in \operatorname{int} U \right\},$$

этому конусу соответствует сопряженный конус [7] $K_2^* = \left\{ l_2^* \middle| l_2^*\left(\delta u^q\right) \geq 0 \right\}$

Используя условия оптимальности Дубовицкого – Милютина [7] получим, что найдутся такие $l_i^*(\cdot), i = 0,1,2$ не все равные нулю, что для всех $u^q(s) \in L_2\left[0, \tau\right]$, в точке (p^*, u^{*q}) выполняются следующие необходимые условия оптимальности:

$l_0^*(\cdot) + l_2^*(\cdot) = 0$ или $-\alpha_0 \int\limits_{\Omega_q} \Phi_0\left(x^q\right) \delta p\left(\tau, x_q\right) dx_q + l_2^*(\delta u^q) = 0$

Преобразуем это выражение, выразив $\delta p\left(\tau, x_q\right)$ через независимые вариации δu^q. Для этого используем уравнение в вариациях, которое в точке (p^*, u^{*q}) имеет следующий вид:

$$\text{(П.7)} \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \delta p}{\partial s} - L^*\left(s, x_q, u_q^*\right)\delta p - \left(L_{u^q}^*\left(s, x_q, u_q^*\right)p^*\right)\delta u^q = 0, \\ & \delta p\,|_{s=0} = \delta p_0 = 0, \ \left(q = 1, \ldots, N\right) \end{aligned}$$

где

$$L_{u^q}^*\left(s, x_q, u_q\right)(\cdot) = \sum_{m=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^m} \left[\frac{A_i^m\left(s, x^m, x^{m-1}, u^m\right)}{\partial u^q}(\cdot) \right]$$

линейный оператор, сопряженный к $L_{u^q}\left(s, x_q, u_q\right)(\cdot)$

Умножив (П.7) на ограниченную функцию $\lambda_q\left(s, x_q\right) \in C^{1,2}$ и проинтегрировав по цилиндру $\Omega_q \times [0, \tau]$, получим:

$$\text{(П.8)} \quad \begin{aligned} \int\limits_{\Omega_q} \lambda_q \delta p \Big|_0^\tau dx_q = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_q} \Bigg\{ & \left[\frac{\partial \lambda_q}{\partial s} + L^*\left(s, x_q, u_q^*\right)\lambda_q \right] \delta p + \\ & + \lambda_q \left(L_{u^q}^*\left(s, x_q, u_q^*\right)p^*\right)\delta u^q \Bigg\} dx_q\, ds \end{aligned}$$

Определим $\lambda_q\left(s, x_q\right)$ из решения задачи Коши

$$(\Pi.9)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial\lambda_q}{\partial s} + L^*\left(s, x_q, u_q^*\right)\lambda_q = 0,\ s \in [\tau, 0] \\ &\lambda_q\left(\tau, x_q\right) = \alpha_0 \Phi_0\left(x^q\right) \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\lambda_q\left(\tau, x_q\right) = \alpha_0 \Phi_0\left(x^q\right)$, $\delta p\left(0, x_q\right) = \delta p_0 = 0$ и полагая $\alpha_0 = 1$ из (П.8) и (П.9) получим

$$\int\limits_{\Omega_q} \lambda_q\left(\tau, x_q\right)\delta p\left(\tau, x_q\right)dx_q - \int\limits_{\Omega_q} \lambda\left(0, x_q\right)\delta p_0 dx_q =$$

$$= \Phi_0\left(x^q\right)\delta p\left(\tau, x_q\right)dx_q =$$

$$= \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_q} \left(\left(L^*_{u^q}\left(s, x_q, u_q^*\right)\lambda_q\right)\delta u^q\right)p^* dx_q ds =$$

$$\int\limits_{\Omega_q}\int\limits_0^\tau \left(\frac{\partial\left(L^*\left(s, x_q, u_q^*\right)\lambda_q\right)}{\partial u^q}\delta u^q\right)p^* ds dx_q$$

отсюда следует то, что

$$l_2^*(\delta u^q) = \int\limits_0^\tau M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^q}\right)\delta u^q ds, \quad R_q = L^*\left(s, x_q, u_q\right)\lambda_q$$

Тогда $l_2^*(\delta u^q) = \int\limits_0^\tau M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^q}\right)\delta u^q ds$ есть опорный функционал к множеству $S = \left\{u^q(s) \in L_2[0, \tau] : u^q(s) \in U \ \textit{для почти всех}\ s \in [0, \tau]\right\}$

Используя результат о виде интегрального линейного функционала [7] опорного к S получим

$$(\Pi.10)\quad M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^q}\right)\left(u^q - u^{*q}\right) \geq 0$$

Из этого неравенства следует, что в точке $u^{*q} \in U$ выполняется условие

(П.11) $M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^q}\right) = 0$

Таким образом, соотношение (П.9) (П.10) соответствуют утверждению пунктов а) и б) теоремы 1, а (П.11) ее следствию. Следует отметить, что в соответствии с (П.11) функционал $M\left(\frac{\partial R_q}{\partial u^q}\right)$ по переменной u^q является опорным к U в точке u^{*q} и следовательно в соответствии с определением опорного функционала можно сделать вывод, что в равномерно близкой окрестности точки u^{*q} выполняется условие:

(П.12) $M\left[R_q\left(u^q, \cdot\right)\right] \geq M\left[R_q\left[u^{*q}, \cdot\right]\right]$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим (1.6) с начальными условиями вида $p\,|_{s=0} = \delta\left(x_q - x_q(0)\right)$, где $x_q(0)$ - фиксированная точка начального состояния (15.) - (1.7). Тогда плотность вероятности перехода $p\left(0, x_q(0), s, x_q\right)$ решение уравнения КФП (1.6) и терминальный функционал (1.5) представляет собой условное математическое ожидание в момент времени τ при условии, что в начальный момент времени 0 система находилась в состоянии $x_q(0) = X_q(0)$, т.е.

(П.13)
$$
\begin{aligned}
I_0^q(u^q) &= \int_{\Omega_q} \Phi_0(x_q)\, p(0, x_q(0), \tau, x_q)\, dx_q = \\
&= M_{0, x_q(0)}\left[\Phi_0\left(x_q(\tau)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Оптимальному управлению $u^{*q}(t) = u^{*q}\left(0, x_q(0), t\right)$, $t \in [0, \tau]$ соответствует минимальное значение критерия (П.13) которое, как видно из (2.5), равно

(П.14) $I_0^q\left(u^q\right) = \min\limits_{\substack{u^q(s) \in U \\ 0 \leq t \leq \tau}} M_{0, x_q(0)}\left(\Phi_0\left[X_q(\tau)\right]\right)$

Пусть $u^{*q}(t)$ - оптимальное управление $t \in [0, \tau]$, доставляющее минимум (П.14) при ограничении в виде уравнения КФП (1.6). Тогда по теореме 1 для всех $t \in [0, \tau]$ управлению $u^{*q}(t)$ согласно (П.12) соответствует

$$\int_{\Omega_q} L^*\left(u^{*q}(t), \cdot\right)\lambda\left(t, x_q\right)p\left(0, x_q(0), t, x_q\right)dx_q = \tag{П.15}$$
$$= \min_{\substack{u^{(q)}(s) \in U \\ 0 \le t \le \tau}} \int_{\Omega_q} L^*\left(u^{(q)}(t), \cdot\right)\lambda\left(t, x_q\right)p\left(0, x_q(0), T, x_q\right)dx_q$$

Представим $u^{*q}(t)$ в виде

$$u^{*q}(t) = \begin{cases} u^{*q}\left(0, x_q(0), t\right) \forall\, t \in [0, \tau] \setminus [s, \tau] \\ u^{*q}\left(s, x_q, t\right) \forall\, t \in [s, \tau] \end{cases}$$

Тогда для $u^{*q}(t) = u^{*q}\left(s, x_q, t\right)$ согласно (П.15) на отрезке $[s, \tau]$ для любой фиксированной точки $\left(s, x_q\right)$ имеет место

$$\int_{\Omega_q} L^*\left(u_q^*(t), \cdot\right)\lambda\left(t, y_q\right)p\left(s, x_q, t, y_q\right)dy_q =$$
$$= \min_{\substack{u^q(s) \in U^q \\ t \le s \le \tau \\ 0 \le t \le \tau}} \int_{\Omega_q} L^*\left(u_q(t), \cdot\right)\lambda\left(t, y_q\right)p\left(s, x_q, t, y_q\right)dy_q$$

и в силу марковского свойства (П.14) на $[0, \tau]$

$$I_0^*\left(u^q\right) = \min_{\substack{u^{(q)}(s) \in U \\ s \le t \le \tau \\ 0 \le s \le \tau}} M_{s, X_q}\left(\Phi_0\left[X_q(\tau)\right]\right)$$

Для построения $u_q^* = u_q^*\left(s, x_q\right)$, связанного в каждый момент времени $s \in [0, \tau]$ с управлением $u_q^*(t) = u_q^*\left(s, x_q, t\right)$, оптимальным по критерию (П.16) при фиксированном значении $\left(s, x_q\right)$ рассмотрим предел

$$\lim_{t\to s}\int_{\Omega_q} L^*\left(u_q^*(t),\cdot\right)\lambda\left(t,y_q\right)p\left(s,x_q,t,y_q\right)dy_q =$$

$$=\min_{\substack{u^q(s)\in U\\ s\le t\le\tau\\ 0\le s\le\tau}}\lim_{T\to s}\int_{\Omega_q} L^*\left(u_q^*(T),\cdot\right)\lambda\left(T,y_q\right)p\left(s,z_q,T,y_q\right)dy_q$$

Отсюда в силу непрерывности по t оператора $L^*\left(u_q^*(t),\cdot\right)\lambda$, функции $\lambda\left(t,y_q\right)\in C^{1,2}$ и $p\left(s,x_q,t,y_q\right)\in C^{1,2}$ после перехода к пределу получим

$$\int_{\Omega_q} L^*\left(u_q^*\left(s,x_q\right),\cdot\right)\lambda\left(s,y_q\right)\delta\left(y_q-x_q\right)dy_q =$$

$$=\min_{\substack{u^q(s)\in U\\ 0\le s\le\tau}}\int_{\Omega_q} L^*\left(u_q\left(s,x_q\right),\cdot\right)\lambda\left(s,y_q\right)\delta\left(y_q-x_q\right)dy_q$$

или

$$L^*\left(u_q^*\left(s,x_q\right),\cdot\right)\lambda\left(s,x_q\right)=\min_{\substack{u^q(s)\in U\\ 0\le s\le\tau}} L^*\left(u_q\left(s,x_q\right),\cdot\right)\lambda\left(s,x_q\right)$$

Таким образом, если начальное состояние задачи (1.10) $x_q(0)$ фиксировано, то для каждой точки $\left(s,x_q\right)$ непосредственно из теоремы 1 следует результат теоремы 3

Литература.

1. Полосков И.Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. №9. 58-73
2. Царьков Е.Ф. Системы стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия АН Латвийской ССР. 1968. №1. 57-64
3. Роднищев Н.Е. Оптимизация управления нелинейных стохастических систем с ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2001. №2. 87-100
4. Роднищев Н.Е. Необходимые условия оптимальности управления разрывных нелинейных стохастических систем

с ограничениями. // Известия АН «Теория и системы управления». 2001. №6. 38-50
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. М. Наука. 1997.
7. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. М. Изд-во МГУ. 1970.
8. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М. Наука. 1974.
9. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М. Наука. 1978.
10. Фридман Л. Уравнения с частными производными параболического типа. М. Мир. 1968.
11. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. М. Наука. 1997.
12. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. М. Изд-во МГУ. 1970.

ARTICLE TITLE (OPTIMAL CONTROL CONDITIONS OF NON-LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS WITH DELAY)

Nikolay Rodnishev, Kazan State Technical University, Kazan, Doctor of Science, professor (Kazan, B. Krasnaya st. 55 (843)231-00-86).
Rustam Aukasov, Kazan State Technical University, Kazan, graduate student (Rustam.Aukasov@tatar.ru)

Abstract: The optimal control conditions of non-linear stochastic systems with delay are being investigated.

Keywords: stochastic differential equations with delay, optimal control, Kolmogorov-Fokker-Plan equation, Dubovitzky-Milutin scheme.