УДК 519.651
ББК 22.19

ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОТОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАННОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИЛИ ОБРАЗНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Легков Г.А.

Работа относится к области вычислительной математики и программирования (машинная математика). Рассмотрен способ реализации вычислений, при котором математические объекты, используемые в процессе вычислений, заменены вычислительной структурой, полученной в результате преобразования представлений этих объектов в заданном топологическом пространстве. Такой математический подход позволяет снизить ёмкостные и временные затраты процесса вычислений. Кроме этого, он предоставляет дополнительные возможности в решении проблем управления больших сложных систем, таких как защита процесса принятия решений от манипулирования, количественный и качественный контроль состава лиц, участвующих в процессе принятия решений.

Ключевые слова: отношение множеств, композиция множеств, топологическое пространство, отображение, образ, базис, структура.

Введение

Множество чисел, которые можно представить в цифровых вычислительных машинах, при ограниченной длине машинных слов, является конечным. Вследствие этого обстоятельства, математические объекты, играющие важную роль в процессе вычислений, можно представить в виде композиции (отношения), определяющей соответствие между множеством этих чисел и множеством их позиций в виде натурального ряда чисел [1]. В свою очередь, данную композицию можно представить в виде образа, полученного в результате взаимно-однозначного отображения в заданном топологическом пространстве. При решении ряда задач, указанные математические объекты, в процессе вычислений, выгодно использовать в виде образа. Эта выгода определяется сокращением временных и ёмкостных затрат процесса вычислений.

С помощью указанной композиции можно представлять различные математические объекты, используемые в процессе вычислений цифровой вычислительной техники. Например, массивы данных. При этом значения элементов композиции представляют собой данные массива в виде чисел, а позиции представляют адрес, определяющий необходимые данные в этом массиве. Данная композиция может представлять собой функции как с одной, так и несколькими переменными. Кроме этого, она может представлять собой распределение вероятности полной группы событий, если значения всех её элементов не отрицательны, а их сумма равна единице. Столь широкие возможности композиции, по сути, стали поводом для проведения сравнительного анализа эффективности вычислений с помощью её отображения в заданном топологическом пространстве. Окончательные границы применения данного подхода можно провести после завершения исследований. В настоящее время создана программа, которая по заданной композиции и требуемой точности представления, формирует её образ в виде структуры, готовой для последующего использования в режиме вычислений.

Все утверждения, высказанные в последующем материале, в том числе в виде свойств, проверены в ходе компьютерного моделирования [2,3]. Их доказательство, а также результаты моделирования, с целью не перегружать материал, вынесены в отдельное приложение. В разделе 8 приводится пример применения данных представлений композиции в системах поддержки принятия решений.

1. Заданная топология числовой последовательности

Базой, определяющей эту топологию, является композиция числовой последовательности, представляющая собой объединение элементов. Каждый из элементов композиции содержит две компоненты. При этом первой компонентой является *значение* a_i элемента числовой последовательности, а второй компонентой является *позиция* n_i, соответствующая данному элементу числовой последовательности (1).

$$K = \{(a_1, n_1), (a_2, n_2), \dots, (a_m, n_m)\}. \tag{1}$$

Примечание: Указанную композицию K можно получит в рамках теории множеств с помощью понятия *отношение* множества значений и множества позиций числовой последовательности [1].

Данную композицию можно представить в виде строки значений. При этом позиции элементов композиции определяют порядок размещения в строке значений этих элементов. В последующем материале, композиция, представленная строкой своих значений, обозначается скобками: $\langle K \rangle$.

Для того чтобы композиция являлась базой, определяющей топологию числовой последовательности, она должна отвечать следующим требованиям:

1. Позиции её элементов должны быть целыми положительными числами $n_i \in \{1,2,\dots,m\}$. Причем, каждое из этих чисел должно соответствовать позиции только одного элемента – *принцип однозначности позиций* композиции.

2. Номера позиций её элементов должны быть представлены двоичной системой счисления. Число разрядов R, используемых двоичным представлением позиций, определяет *размерность* этой композиции.

3. Композиция должна быть *полной*, то есть, соответствовать своей размерности R. Это значит, что число её элементов должно быть равно: $m = 2^R$.

Относительно последнего требования следует уточнить, если композиция числовой последовательности окажется не полной, её всегда можно дополнить, элементами с нулевым значением и недостающими позициями.

Исходя из указанных требований, можно сделать вывод о том, что в виде такой композиции можно представить любую числовую последовательность.

Для данной композиции числовой последовательности определены следующие операции:

1. *Дополнение композиции* K до полной, означает дополнение этой композиции, в соответствии с её размерностью R, элементами с нулевым значением и недостающими позициями. Обозначение этой операции: $\dddot{K}$.

2. *Перестановка композиции* K означает изменение соответствия между позициями и значениями её элементов, определенного выражением (1). Очевидно, что число всех возможных перестановок композиции равно m!

3. *Произведение композиции* K на сомножитель b соответствует умножению значений a_i всех элементов композиции на этот сомножитель. Обозначение операции: $K \sqcup\!\!\!\cdot\; b$ или $\langle K \rangle \cdot b$.

4. Для двух композиций K и T одинаковой размерности определена операция *сложение*. Результатом этой операции является композиция той же размерности. Значения её элементов определяются суммами значений элементов композиций K и T с одинаковыми позициями. Обозначение операции: $K \uplus T$ или $\langle K \rangle + \langle T \rangle$.

5. Операция *разделение композиции* K размерности R, определяется выбранным для этого двоичным разрядом её позиций. Результатом этой операции являются две композиции одинаковой размерности R-1. Они должны соответствовать вышеуказанным требованиям. Это значит, что они должны быть полными, а их позиции однозначными. Обозначение операции: $K \vdash$.

6. Для двух композиций K и T одинаковой размерности R определена операция *совмещение*. Эта операция выполняется за счёт дополнения двоичным разрядом номеров позиций обеих композиций. Результатом этой операции является композиция размерности

R+1. При этом полученная композиция так же должна быть полной, а её позиции однозначными. Обозначение операции: $K \perp T$.

Представленное выше понятие – композиция числовой последовательности, является основой, определяющей топологическое пространство. Заданная топология числовой последовательности определяется двумя разными способами разбиения композиции.

<u>Первый способ</u> разбивает элементы композиции на группы, по числу единиц в двоичном представлении позиций. Каждая из этих групп объединяет те элементы композиции, у которых двоичные номера позиций содержат одинаковое число единиц. Очевидно, что число групп в результате этого разбиения равно R+1. Причём все они являются непересекающимися между собой. В последующем эти группы будут называться *вес-группами.* Обозначены они буквой V с номером группы в виде нижнего индекса. Номер такой группы соответствует весу номеров позиций элементов, вошедших в её состав. Таким образом, заданная топология содержит разбиение композиции числовой последовательности на непересекающиеся вес-группы с номерами от 0 до R.

<u>Второй способ</u> разбиения представлен на примере композиции с размерностью R = 4 (таблица 1). В крайнем левом столбце таблицы указаны значения всех элементов композиции. Этот способ, как и первый, определяется базовым разбиением композиции, заданным двоичными позициями её элементов.

Таблица 1

	D_0	D_1				D_2						D_3				D_4
a_{16}	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
a_{15}	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
a_{14}	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
a_{13}	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
a_{12}	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
a_{11}	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
a_{10}	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
a_9	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
a_8	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
a_7	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
a_6	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
a_5	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
a_4	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
a_3	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
a_2	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
a_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Топология, определяемая вторым способом, представляет собой объединение попарно непересекающихся подмножеств. Эти пары непересекающихся подмножеств представлены столбцами таблицы 1. Номера этих столбцов указаны в нижней строке таблицы. В свою очередь, все эти пары распределены между семействами. Объединения указанных пар в семейства представлены верхней строкой таблицы и обозначены буквой D с индексом. Индекс определяется номером семейства. Первое семейство D_1 получено в результате поэлементного объединения двоичных позиций композиции. Это семейство представлено четырьмя разрядами-столбцами таблицы, начиная со 2 и заканчивая 5. При этом двоичные разряды позиций объединены в порядке возрастания их старшинства слева на право. Разбиения композиции, вошедшие в состав первого семейства, позволяют определить все последующие семейства разбиений заданной топологии.

Рассмотрим формирование второго семейства D_2. Первое разбиение этого семейства, столбец 6, определяется столбцами 2 и 3 первого семейства D_1. Значение в каждой строке столбца 6 определяется значениями столбцов 2 и 3 этой же строки. Если для выбранной строки таблицы сумма значений столбцов 2 и 3 окажется чётной, тогда соответствующее значение столбца 6 равно нулю. Если же сумма окажется нечётной, то это значение столбца 6 равно единице. Так же как и первый, остальные столбцы семейства D_2 определяются в результате перебора всех сочетаний по два столбца из первого семейства топологии.

Все последующие семейства топологии, как и семейство D_2, формируются перебором сочетаний столбцов первого семейства. В этом случае число столбцов, образующих сочетание, равно номеру формируемого семейства топологии. Этот номер, в свою очередь, определяется по номеру предыдущего семейства путём увеличения последнего на единицу.

Исходя из сказанного, можно сделать вывод о том, что максимальный номер семейства заданной топологии равен размерности композиции R. Причём, само это семейство представлено единственным разбиением композиции. Это разбиение определено чётным или нечётным числом единиц в двоичном представлении позиций композиции. В выбранном примере таким семейством является D_4. Это семейство представлено столбцом 16 таблицы 1.

Очевидно, что число всех семейств топологии, определяемых вторым способом разбиения, равно R+1 с учётом нулевого семейства D_0.

Теперь можно определить общее число попарно непересекающихся подмножеств заданной топологии. Другими словами, для композиции размерности R определяем число столбцов с разбиениями в таблице 1. Ответ на этот вопрос представлен формулой (2).

$$\sum_{k=0}^{R} C_R^k = 2^R, \tag{2}$$

где C_R^k - число сочетаний из R по k, причём при k = 0, $C_R^0 = 1$.

Полученное разбиение композиции в последующих преобразованиях используется в виде *матрицы разбиений* М. Для представления полученного разбиения в виде матрицы, необходимо нулевые значения столбцов таблицы заменить на -1. Данная матрица разбиений М отвечает условию (3), следовательно, она принадлежит множеству матриц Адамара.

$$M \cdot M' = m \cdot E, \tag{3}$$

где: M' – транспонированная матрица, E – единичная матрица порядка $m = 2^R$.

Таким образом, заданное топологическое пространство композиции числовой последовательности с размерностью R определяет:

1. Вес-группы $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_R$ с номерами от 0 до R, представляющие собой непересекающиеся подмножества композиции: $K = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_R$.
2. Семейства разбиений $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_R$ с номерами от 0 до R, представляющие собой объединение попарно непересекающихся подмножеств композиции.
3. Матрицу разбиений М порядка $m = 2^R$.

Пример 1. Композиция числовой последовательности может быть представлена своими вес-группами:

$$K = (\ddot{V}_0) \uplus (\ddot{V}_1) \uplus (\ddot{V}_2) \uplus \ldots \uplus (\ddot{V}_R). \tag{4}$$

Запись выражения (4) содержит определённые ранее обозначения операций, выполняемых с композицией числовой последовательности.

2. Базис композиции в заданном топологическом пространстве

Базис композиции, в заданном топологическом пространстве, определяется выражением (5). Числитель этого выражения представлен произведением строки $\langle K \rangle$ и матрицы разбиений M. Строка $\langle K \rangle$ состоит из значений элементов композиции: $\langle K \rangle = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$. При этом соответствие элементов композиции и строк матрицы M определяется соответствием позиций этих элементов с первым семейством разбиений D_1 матрицы.

$$B(K) = \frac{\langle K \rangle \cdot M}{\sqrt{m}}. \tag{5}$$

Полученный базис в данном выражении и в последующих преобразованиях обозначен буквой B. Он представляет собой строку, состоящую из m значений: $B = (d_1, d_2, d_3, \ldots, d_m)$. Все эти значения объединены в семейства $(\mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots, \mathrm{D}_\mathrm{R})$ в соответствии с их разбиениями.

Следует обратить внимание на то, что бы представить базис в виде строки, требуется определить соответствие между всеми сочетаниями разрядов-столбцов семейства D_1 и позициями в строке базиса. В дальнейшем, для всех представлений базиса в виде строки, указанное соответствие определено следующим образом:

Пусть очередное сочетание составлено из k номеров разрядов семейства D_1: $(r_1, r_2 \dots, r_k)$. При этом номера разрядов выбранного сочетания упорядочены по возрастанию: $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$. Тогда позиция в строке базиса, соответствующая выбранному сочетанию, определяется выражением (6):

$$p = \sum_{t=0}^{k-1} C_R^t + \sum_{t=2}^{k} \left(C_{r_t}^t \cdot \frac{r_t - t}{r_t} \right) + r_1, \tag{6}$$

где p – полученная позиция в строке базиса, соответствующая сочетанию разрядов $(r_1, r_2 \dots, r_k)$.

Для композиции, представленной в виде базиса (5), в заданном топологическом пространстве существует обратное преобразование. Выражение (7) определяет обратное преобразование базиса в исходную композицию.

$$\langle K \rangle = \frac{B(K) \cdot M'}{\sqrt{m}}. \tag{7}$$

Строка является не единственной формой представления базиса. Позже будет предложена более эффективная форма представления с точки зрения временных и емкостных затрат на его формирование и использование. В виде строки базис удобен для изучения его свойств, графических представлений и контроля его состояний. Базис является основой топологического представления композиции. Формирование этого представления в значительной мере определяется свойствами этого базиса.

Далее рассмотрим свойства базиса в заданном топологическом пространстве. Первые два свойства базиса определяются исходя из свойств матрицы разбиений M и определённых ранее операций, выполняемых с композицией.

Свойство 1. Сумма квадратов значений элементов композиции равна сумме квадратов элементов базиса её топологического представления (8):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 = \sum_{p=1}^{m} d_p^2, \qquad \text{где } m = 2^R. \tag{8}$$

Свойство 2. Базис композиции равен сумме базисов вес-групп этой композиции, дополненных в соответствии с её размерностью. В дальнейшем такой базис называется *полным* (9):

$$B(K) = B(\ddot{V}_0) + B(\ddot{V}_1) + B(\ddot{V}_2) + \cdots + B(\ddot{V}_R). \quad (9)$$

Процесс формирования полного базиса композиции начинается с формирования исходных базисов её вес-групп. Эта стадия процесса в дальнейшем называется – *загрузка* вес-групп композиции или просто – *загрузка* базиса. Следующее свойство является определяющим для процесса формирования полного базиса на стадии загрузка вес-групп композиции.

Свойство 3. Всякое семейство значений с номером k (D_k), принадлежащее базису вес-группы (V_t), можно преобразовать в семейство значений с номером $R - k$ (D_{R-k}) этого же базиса.

Порядок этого преобразования, для представлений базиса в соответствии с выражением (6), заключается в следующем: пусть в строке базиса вес-группы $B(\ddot{V}_t)$ известен элемент d_p (*причём* $d_p \in D_k$). Тогда элемент базиса d_j, принадлежащий семейству D_{R-k} и занимающий позицию строки $j = 2^R - p + 1$, равен:

$$d_j = \begin{cases} d_p \text{ если t – чётный,} \\ -d_p \text{ если t – нечётный,} \end{cases}$$

где t – номер вес-группы V_t.

Примечание: Для крайних семейств базиса D_0 и D_R, правило определения значений элементов меняется на обратное: если t – чётный, то $d_j = -d_p$ и если t – нечётный, то $d_j = d_p$.

Пример 2. Возьмём последовательность чисел натурального ряда от 1 до 32 и преобразуем её в композицию. Размерность этой композиции равна R = 5. В качестве примера представлены графики базисов чётной (рис.1) и нечётной (рис.2) вес-группы этой композиции.

Графики на рис.1 и рис.2 наглядно показывают описанные выше свойства симметрии базиса вес-группы, представленного в форме строки (свойство 3).

Исходя из выше сказанного, можно сделать предварительный вывод. Между композицией и её базисом существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое прямым (5) и обратным (7) преобразованием композиции. По сути, базис является образом этой композиции. Следовательно, заданным топологическим пространством определяется отображение множества композиций на множество образов (базисов) этих композиций.

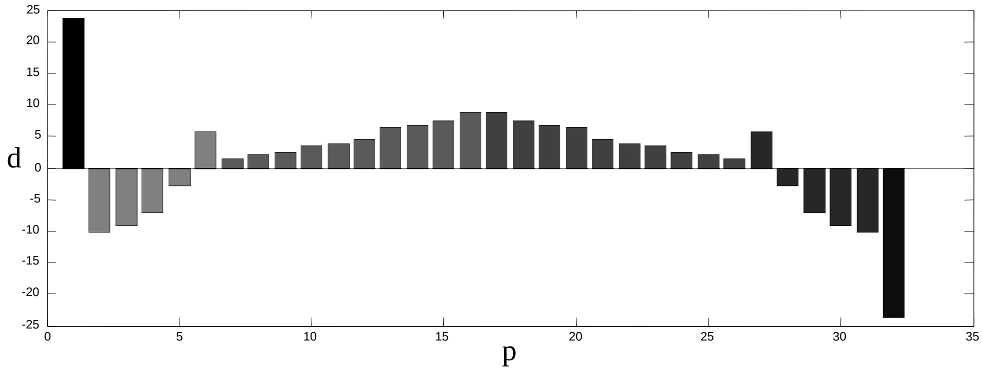

Рис. 1. График базиса вес-группы V_2, семейства от D_0 до D_5

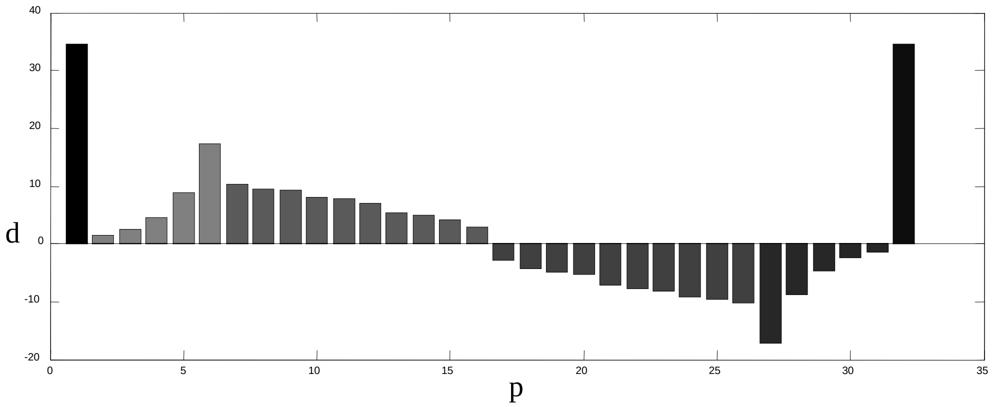

Рис. 2. График базиса вес-группы V_3, семейства от D_0 до D_5

3. Топологические преобразования базиса композиции

Каждому преобразованию композиции соответствует вполне определённое преобразование её базиса. Этот вывод очевиден, исходя из установленного ранее, взаимно-однозначного соответствия между композицией и её базисом. Для различия этих преобразований, в дальнейшем, преобразования базиса композиций будут называться *топологическими*. Например, топологические преобразования базиса соответствующие операциям композиции 3 и 4, указанным в самом начале, представлены следующими двумя свойствами:

<u>Свойство 4</u>. Операция, произведение композиции на сомножитель $K \dot{\cup} b$, соответствует топологическому преобразованию: $B(K) \cdot b$ – умножение базиса композиции на этот сомножитель.

<u>Свойство 5</u>. Операция, сложение двух композиций одинаковой размерности $K \uplus T$, соответствует топологическому преобразованию: $B(K) + B(T)$ – сложение базисов этих композиций.

Процесс формирования полного базиса композиции, после завершения исходной стадии - загрузка базиса, осуществляется с помощью двух групп топологических преобразований. Первая группа этих преобразований называется - *допустимые* топологические преобразования базисов вес-групп заданной композиции, а вторая – *доступные* топологические преобразования полного базиса данной композиции.

Большинство топологических преобразований, вошедших в состав этих групп, соответствуют, определённой ранее, операции – перестановка композиции.

Свойство 6. Операция композиции - перестановка двоичных разрядов одновременно всех позиций композиции, называется *уклад*. Эта операция соответствует топологическому преобразованию, при котором выполняется перестановка элементов базиса внутри своих семейств в соответствии с выражением (6).

Общее число операций *уклад* равно R! - числу всех возможных перестановок разрядов позиций композиции. Причём, любая из этих перестановок композиции не изменяет состав семейств базиса и определяется внутренними перестановками их элементов. Следует обратить внимание на то, что среди операций уклад есть та, которая позволяет переставить элементы первого семейства базиса по возрастанию.

Свойство 7. Операция композиции - инвертирование двоичного разряда одновременно всех позиций композиции, называется *сдвиг* разряда. Эта операция соответствует топологическому преобразованию - изменение знака на противоположный тех элементов базиса, для которых соответствующее сочетание разрядов содержит инвертируемый разряд позиции.

Последовательное выполнение операции сдвиг с разными разрядами позиций определяет различные перестановки композиции. Всего, с помощью этой операции, можно получить 2^R различных перестановок композиции. Очевидно, что при одновременном инвертировании нескольких разрядов позиций композиции, знаки элементов базиса определяются числом инвертируемых разрядов в составе их сочетаний. Причём, среди множества всех операций сдвиг есть та, которая позволяет сделать положительными все элементы первого семейства базиса.

Следующее свойство 8 представляет топологическое преобразование базиса, являющееся прямым следствием описанной операции сдвиг разряда.

Свойство 8. Операция композиции - инвертирование двоичных разрядов одновременно всех позиций композиции, называется *инверсия порядка*. Эта операция соответствует топологическому преобразованию, при котором все элементы базиса, принадлежащие семействам с нечётным номером, изменяют свой знак на противоположный.

Далее рассмотрим последнее топологическое преобразование из всех используемых при формировании базиса. Как и три предыдущие, это топологическое преобразование соответствует операции - перестановка композиции и отвечает требованию однозначности её позиций. Каждая из этих перестановок определяется выбором одного из R разрядов позиций композиции, представленных в двоичном виде. В результате этой перестановки, новая позиция каждого элемента композиции, получается в результате сложения по модулю два значений выбранного разряда этой позиции с остальными разрядами двоичного представления этой же позиции. При этом значение самого выбранного разряда остается неизменным.

Например, пусть исходный двоичный номер позиции очередного элемента композиции равен: $x_1x_2 \dots x_k \dots x_R$, где k – номер выбранного разряда операции перестановки. Тогда полученный номер позиции $y_1y_2 \dots y_k \dots y_R$, определяется так: $y_k = x_k$, при этом $y_i = x_i \oplus x_k$, где i – разряды от 1 до R, причем $i \neq k$. Очевидно, что общее число таких перестановок равно R. В дальнейшем эти перестановки композиции называются *обмен*.

<u>Свойство 9</u>. Операция перестановок композиции - *обмен*, соответствует топологическому преобразованию базиса, при котором происходит обмен элементами между нечётными и чётными семействами этого базиса.

Рассмотрим порядок этого обмена элементами на примере пары семейств базиса D_n и D_{n+1}, где n – нечётный номер семейства. Допустим, для операции перестановка композиции *обмен*, выбран номер разряда двоичных позиций *k*. Тогда элементы нечётного семейства D_n, соответствующие сочетания которых не содержат номер разряда *k*, переходят в чётное семейство D_{n+1}. Позиции этих элементов в семействе D_{n+1}, определяются после дополнения их сочетаний номером *k*. В свою очередь, на освободившиеся позиции семейства D_n, переходят элементы чётного семейства D_{n+1}, соответствующие сочетания которых содержат номер разряда *k*. Позиции этих элементов в нечётном семействе D_n определяются после удаления из их сочетаний этого номера *k*.

К сказанному следует добавить то, что не все семейства базиса могут быть парными при объединении семейств в виде: (D_n, D_{n+1}), где n – нечётный номер семейства. Такими непарными семействами базиса являются D_0 и D_R, если R – нечётная. В результате топологического преобразования базиса - *обмен*, семейство D_0 всегда остаётся неизменным. Семейство D_R, в результате этого преобразования, изменяется только у базиса чётной размерности R.

4. Накопитель топологических преобразований

Общим требованием, предъявляемым к преобразованиям в процессе формирования полного базиса, является сохранение взаимно-однозначного соответствия между исходной композицией и полученной в результате этих преобразований. Необходимое условие для выполнения этого требования в заданном топологическом пространстве определяется рассмотренными ранее свойствами базиса. Таким необходимым условием при формировании базиса является то, что сумма квадратов значений элементов композиции при этом должна оставаться неизменной.

Кроме этого, на стадии раздельного топологического преобразования базисов вес-групп, это условие включает в себя дополнительное требование. Дело в том что, позиции элементов вес-группы в составе своей композиции, должны быть одного веса в двоичном представлении, то есть содержать одинаковое число единиц. Это число определяет номер вес-группы данной композиции. Для базисов вес-групп недопустимы топологические преобразования, нарушающие это требование.

Группа *допустимых* топологических преобразований

Допустимые топологические преобразования предназначены для преобразования базисов вес-групп. Они выполняются на стадии раздельных преобразований вес-групп заданной композиции. Эта группа состоит из трёх *допустимых* топологических преобразований базисов вес-групп:

1. Топологическое преобразование – *уклад*, представленное свойством 6 заданного топологического пространства.

2. Топологическое преобразование – *изменение знаков* базиса, при котором все элементы базиса изменяют свой знак на противоположный. Это преобразование композиции вес-группы представлено свойством 4 для сомножителя b равного -1.

3. Топологическое преобразование – *перестановка пары* вес-групп. Это преобразование соответствует одновременной инверсии порядков (свойство 8) двух вес-групп, образующих пару между собой. Две вес-группы являются *парными*, если сумма их номеров равна R. При этом топологическом преобразовании, вес-группы пары меняются между собой номерами, а элементы нечётных семейств их базисов изменяют свой знак на противоположный.

Примечание: Композиции чётной размерности содержат вес-группу с номером равным половине её размерности R. Такая вес-группа является парной самой себе. В этом случае допустимое топологическое преобразование *перестановка пары* выполняется с базисом только этой вес-группы.

Группа *доступных* топологических преобразований

Доступные топологические преобразования предназначены для преобразования полного базиса заданной композиции. В эту группу входят следующие топологические преобразования базиса:

1. Топологическое преобразование – *уклад*, представленное свойством 6 заданного топологического пространства.
2. Топологическое преобразование – *обмен*, представленное свойством 9 заданного топологического пространства.
3. Топологическое преобразование – *сдвиг,* представленное свойством 7 заданного топологического пространства.

Процесс формирования полного базиса композиции, в рамках одного этапа, проходит последовательно три стадии этого формирования. На первой стадии выполняется *загрузка* исходных базисов вес-групп. На второй стадии выполняются *допустимые* топологические преобразования этих базисов. На третьей стадии выполняются *доступные* топологические преобразования полного базиса. Для завершения процесса формирования полного базиса композиции, при необходимости, возможно неоднократное повторение указанного этапа формирования.

После того, как был определён процесс формирования полного базиса исходной композиции, необходимо уточнить понятие отображение множества композиций на множество образов этих композиций в заданном топологическом пространстве. В данном случае, отображением исходной композиции в заданном топологическом пространстве следует считать процесс формирования полного базиса композиции. Результат этого отображения, или другими словами полученный образ исходной композиции, состоит из двух частей. Первая часть образа представлена в форме полученного базиса этой композиции. Второй частью является полученная последовательность топологических преобразований. Вторая часть образа, так же как и первая, должна иметь свою форму представления.

При выборе формы представления образа следует руководствоваться общим требованием – форма должна обеспечивать минимальные ёмкостные и временные затраты при формировании и использовании этого образа. Применительно ко второй части образа, это означает, что её форма должна обеспечивать компактный способ представления последовательности топологических преобразований и быть удобной для накопления этих преобразований в процессе формирования образа композиции.

Форма представления второй части образа получила название *накопитель топологических преобразований* (НТП). Способ представления топологических преобразований, реализованный в НТП, представлен свойствами 10 и 11.

Свойство 10. Любая последовательность *допустимых* топологических преобразований может быть представлена в виде следующих строк:

1. Все операции *уклад*, в последовательности допустимых преобразований, могут быть представлены в виде матрицы, строки которой определяют порядок разрядов позиций для каждой вес-группы. Так как две вес-группы с номерами 0 и R при любой перестановке разрядов позиций остаются неизменными, то общее число строк этой матрицы равно R-1.
2. Все операции *изменение знаков* базиса, в последовательности допустимых преобразований, могут быть представлены в виде строки из меток по числу вес-групп. В этой строке, для каждой вес-группы, метка равная 1 указывает выполнение данной операции, в противном случае эта метка равна 0.
3. Все операции *перестановка пар* вес-групп, в последовательности допустимых преобразований, могут быть представлены в виде строки из меток по числу вес-групп. В этой строке, для каждой пары вес-групп, две метки равные 1 указывают на выполнение данной операции, в противном случае эти метки равны 0.

Свойство 11. Любая последовательность доступных топологических преобразований может быть представлена в виде следующих трёх строк:

1. Первая строка представляет собой перестановку из R номеров разрядов позиций композиции. Эта строка определяет доступную топологическую операцию *уклад* полного базиса.
2. Вторая строка, состоящая из R меток, определяет доступную топологическую операцию *обмен* полного базиса. В этой строке из меток равных 0, разряд для операции обмен указан меткой равной 1. При отсутствии в строке единичной метки, операция обмен не выполняется.
3. Третья строка, состоящая из R меток, определяет доступные топологические операции *сдвиг* разрядов полного базиса. В этой строке, для каждого разряда позиций композиции, метка равная 1 означает выполнение доступной топологической операции *сдвиг* разряда, в противном случае эта метка равна 0.

Объединение строк, представленных свойствами 10 и 11, в последующем называется – *крат* накопителя топологических преобразований. *Крат* НТП, является формой представления топологических преобразований, выполняемых в рамках одного этапа формирования полного базиса композиции. Каждый последующий этап формирования сопровождается дополнением накопителя топологических преобразований очередным кратом.

<u>Пример 3</u>. В таблице 2, в качестве примера, показан первый крат НТП, полученный при формировании полного базиса исходной композиции, выбранной для примера. Полностью результат этого формирования будет представлен в примере 4.

Таблица 2

<table>
<tr><td colspan="10">Первый крат НТП (R=7)</td></tr>
<tr><td colspan="10">Допустимые топологические преобразования вес-групп</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>6</td><td>7</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td colspan="2">уклад вес-группы V_1</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td><td>7</td><td>2</td><td colspan="2">уклад вес-группы V_2</td></tr>
<tr><td>3)</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>2</td><td colspan="2">уклад вес-группы V_3</td></tr>
<tr><td>4)</td><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>7</td><td colspan="2">уклад вес-группы V_4</td></tr>
<tr><td>5)</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td colspan="2">уклад вес-группы V_5</td></tr>
<tr><td>6)</td><td>2</td><td>6</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td colspan="2">уклад вес-группы V_6</td></tr>
<tr><td>7)</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>изменение знаков вес-групп: V_0-V_7</td></tr>
<tr><td>8)</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>перестановка пар вес-групп: V_0-V_7</td></tr>
<tr><td colspan="10">Доступные топологические преобразования полного базиса</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td colspan="2">уклад – полный базис</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td colspan="2">обмен – полный базис</td></tr>
<tr><td>3)</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td colspan="2">сдвиг – полный базис</td></tr>
</table>

Таким образом, НТП является формой представления топологических преобразований базиса, выполняемых при его формировании. В тоже время, НТП определяет взаимно-однозначное соответствие между исходной композицией и полученной в результате этих преобразований.

С помощью накопителя топологических преобразований можно выполнять как прямое, так и обратное преобразование друг в друга исходной и полученной композиций. Эти преобразования композиций, с помощью НТП, выполняются поэлементно. Например, пусть (a_i, n_i) – элемент исходной композиции, где a_i – значение, а n_i – двоичный номер позиции данного элемента. Тогда на входе первого крата НТП, по весу позиции n_i, определяется номер вес-группы этого элемента. Далее с элементом (a_i, n_i) последовательно выполняются три операции первого крата, представленные строками допустимых топологических преобразований для вес-группы данного элемента. После этого с полученной позицией элемента композиции выполняются следующие три операции, представленные строками доступных топологических преобразований первого крата. Описанная процедура преобразований элемента композиции последовательно выполняется каждым кратом. В результате этих преобразований элемента исходной композиции, на выходе внешнего крата НТП, получается соответствующий ему элемент полученной композиции. Обратное преобразование, полученной композиции в исходную, осуществляется в обратном порядке, начиная с внешнего крата НТП.

Преобразования НТП обозначаются заглавной буквой F. Например, преобразование композиции K в композицию Y с помощью НТП представляет запись: $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{K})$.

<u>Свойство 12</u>. Преобразования композиций с помощью НТП обладают следующими свойствами:

a) обратимые, если $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{K})$, тогда $\mathrm{K} = \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{Y})$;

b) аддитивные, $\mathrm{F}(\mathrm{K} \uplus \mathrm{T}) = \mathrm{F}(\mathrm{K}) \uplus \mathrm{F}(\mathrm{T})$.

В завершении описания накопителя приведу две гипотезы, которые подтверждены с помощью компьютерного моделирования для НТП малой размерности (для $R < 6$).

Первая гипотеза: Число всех перестановок g_1, которые можно получить с помощью первого крата НТП, определяется выражением (10).

$$g_1=(R+1)\cdot(R!)^{R-1}\cdot 2^{R+w-1}, \qquad (10)$$

где: w – число пар, образованных вес-группами композиции, R – размерность НТП. При этом: если R – чётная, то $w = R/2+1$; и если R – нечётная, то $w = (R+1)/2$.

Вторая гипотеза: Для композиции размерностью R, любая перестановка из всех возможных m! (где $m=2^R$), может быть получена с помощью накопителя НТП той же размерности, содержащего конечное число крат.

5. Формирование базиса композиции в заданном топологическом пространстве

Перед тем, как определить цель и критерий формирования базиса композиции в заданном топологическом пространстве, следует обратить внимание на одно важное обстоятельство. Дело в том, что свойства топологических преобразований, используемых на всех стадиях формирования полного базиса, позволяют сделать вывод представленный следующим свойством.

<u>Свойство 13</u>. Процесс формирования каждой пары семейств, состоящей из нечётного и следующего за ним четного семейств базиса, на всех стадиях формирования полного базиса композиции, является самостоятельным и не требует наличия остальных семейств базиса.

Таким образом, форма представления композиции в заданном топологическом пространстве может быть представлена только теми семействами базиса, которые используются при его формировании. В последующем, эта форма представления называется *накопитель семейств базиса* композиции (НСБ). Состояние накопителя определяется отношением суммы квадратов элементов семейств базиса, вошедших в состав НСБ, к сумме квадратов значений всех элементов композиции, выражение (11). Этот параметр называется *достоверность* НСБ и обозначается буквой Z:

$$Z=S_N/S_K, \tag{11}$$

где: S_N – сумма квадратов элементов семейств базиса, вошедших в состав НСБ; S_K – сумма квадратов значений всех элементов композиции.

Исходя из свойства 1, можно утверждать то, что параметр достоверность НСБ находится в диапазоне: $0 \leq Z \leq 1$.

Цель процесса формирования заключается в том, что бы с помощью топологических преобразований, получить НСБ с максимальным значением параметра Z – достоверность.

Свойство 14. Чем ближе к единице значение параметра Z – достоверность НСБ, тем меньше погрешность значений композиции, полученной в результате обратного преобразования данного НСБ.

Дело в том, что на протяжении всего процесса формирования полного базиса композиции, S_B - сумма квадратов всех его элементов остаётся постоянной ($S_B \equiv S_K$). В этих условиях, максимальная сумма квадратов элементов НСБ ($S_N = max$) означает то, что сумма квадратов элементов базиса, не вошедших в его состав, является минимальной ($S_B - S_N = min$). В свою очередь, погрешность значений композиции, получаемых в результате обратного преобразования НСБ, определяется именно отсутствующей в нём частью полного базиса.

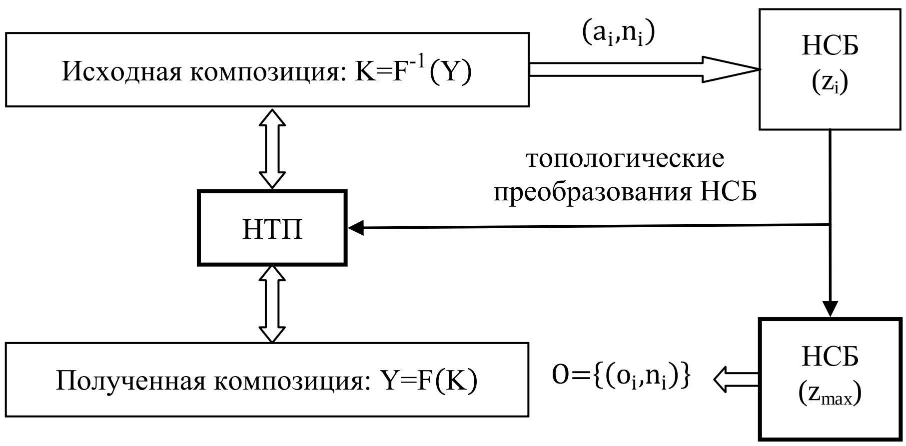

Рис. 3. Принцип формирования НСБ

Принцип формирования полного базиса композиции в заданном топологическом пространстве представлен рис.3.

В процессе формирования НСБ, в рамках очередного этапа, необходимо выбрать такой вариант топологических преобразований, который обеспечит максимальное значение S_N из всех возможных на данном этапе. Число этих вариантов можно оценить с помощью крата НТП. Для этого, кроме g_1 - числа возможных перестановок крата (10), необходимо учесть допустимые преобразования строки - *изменение знаков* вес-групп (таблица 2). Таким образом, общее число состояний НСБ, в зависимости от операций крата НТП, равно $g_1 \cdot 2^{R+1}$. Очевидно, что реализовать решение этой задачи путём прямого перебора не представляется возможным даже для композиций малой размерности R. Данное обстоятельство определило в качестве основной задачи, на пути реализации топологического представления композиции, - поиск алгоритма с полиномиальными затратами от R на формирование НСБ с максимальной достоверностью Z. Решение этой самостоятельной задачи занимает достаточно большой объём. Поэтому её описание вынесено в приложение к данной работе.

Ниже, в качестве примера, представлены результаты формирования базиса исходной композиции.

<u>Пример 4</u>. Для примера, выбрана композиция размерностью R = 7. Значения элементов композиции определены с помощью генератора случайных чисел: оператор randn (MATLAB). Этот генератор создаёт массивы случайных чисел, распределённые по нормальному закону со средним значением 0 и дисперсией 1.

В состав накопителя семейств базиса (НСБ) включены следующие семейства: D_0, D_1, D_2, D_5, D_6, D_7. Таким образом, в накопителе НСБ отсутствуют семейства: D_3, D_4. Все семейства полного базиса исходной композиции представлены на графике (рис. 4).

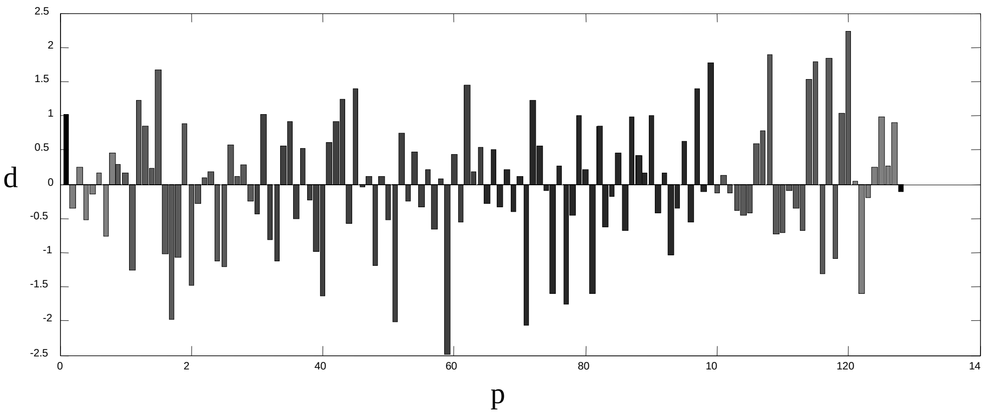

Рис. 4. График полного базиса исходной композиции (R = 7)

Исходное состояние НСБ, до его формирования, характеризуется параметром достоверность $Z_i = 0.46921$. При этом ошибка восстановления значений исходной композиции для данного НСБ составила: $\varepsilon = 7.5648$. Ошибка ε вычисляется по формуле (12):

$$\varepsilon = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{m}(a_i - o_i)^2}, \tag{12}$$

где: $m = 2^R$; a_i – значение элемента i композиции; o_i – значение данного элемента i, полученное в результате обратного преобразования НСБ.

На графике (рис. 5) представлен полный базис композиции, полученный после завершения процесса формирования НСБ.

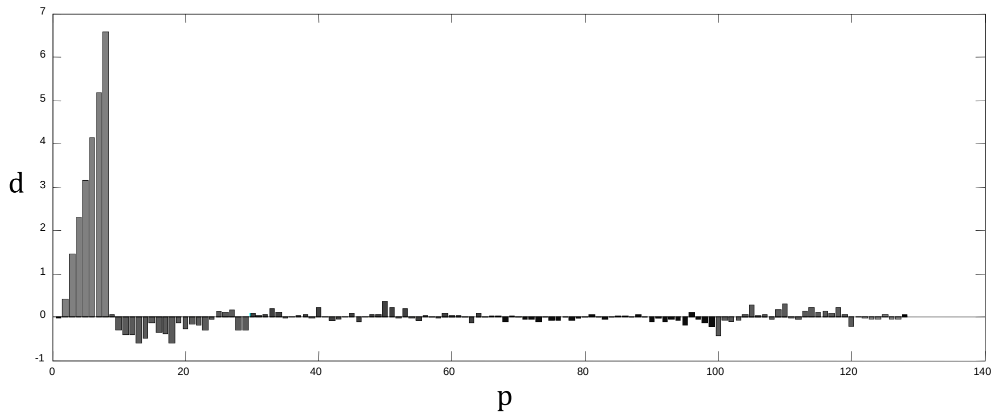

Рис. 5. График полного базиса полученной композиции (R = 7)

Состояние НСБ, полученное в результате формирования, характеризуется параметром достоверность $Z_{max} = 0.9945$. При этом ошибка восстановления значений полученной композиции для данного НСБ составила: $\varepsilon = 0.76972$.

В дальнейшем, для обозначения формы представления композиции, состоящей из двух частей НТП и НСБ, будем использовать одно общее название - *топологический накопитель композиции* (ТНК).

6. Формирование структуры образа композиции

Следует обратить внимание на то, что конечной целью данной работы, является реализация вычислений с помощью отображения композиций в заданном топологическом пространстве. Для реализации этих вычислений, точность представления композиции имеет решающее значение. Допустимая погрешность восстановления композиции по её образу, в заданном топологическом пространстве, определяется погрешностью округления числовых значений композиции и длиной разрядной сетки вычислительной техники.

Результаты компьютерного моделирования показали то, что представление композиции, состоящее из одного ТНК, не всегда обеспечивает необходимую погрешность её восстановления. Для того чтобы обеспечить требуемую точность представления композиции с помощью её образа, формируется структура, представляющая собой объединение нескольких ТНК. Количество ТНК в структуре и архитектура их объединения определяется исходя из размерности композиции и требуемой точности её восстановления.

Ниже, в качестве примера (рис.6), представлен вариант структуры образа композиции, в виде функциональной схемы, объединяющей в себе шесть ТНК. Алгоритм работы накопителей ТНК, входящих в состав структуры, отличается от описанного выше (рис.3). Это отличие заключается в том, что на входе и выходе ТНК, при необходимости, определяемой архитектурой структуры, выполняются дополнительные операции.

На входе ТНК, такой дополнительной операцией является, описанная ранее, операция - *совмещение* композиций. Например, на входе последнего накопителя структуры – $ТНК_{4.1}$ (рис.6) выполняется операция: $(y_{3.1} \perp y_{3.2})$.

В свою очередь, в накопителях ТНК структуры с разветвлённым выходом, выполняется дополнительная операция - *разделение* композиции. Например, на выходе первого накопителя структуры – $ТНК_{1.1}$ (рис.6), с композицией $F_1(K_1)$, полученной в результате его формирования, выполняется операция *разделение* на композиции $y_{1.1}$ и $y_{1.2}$.

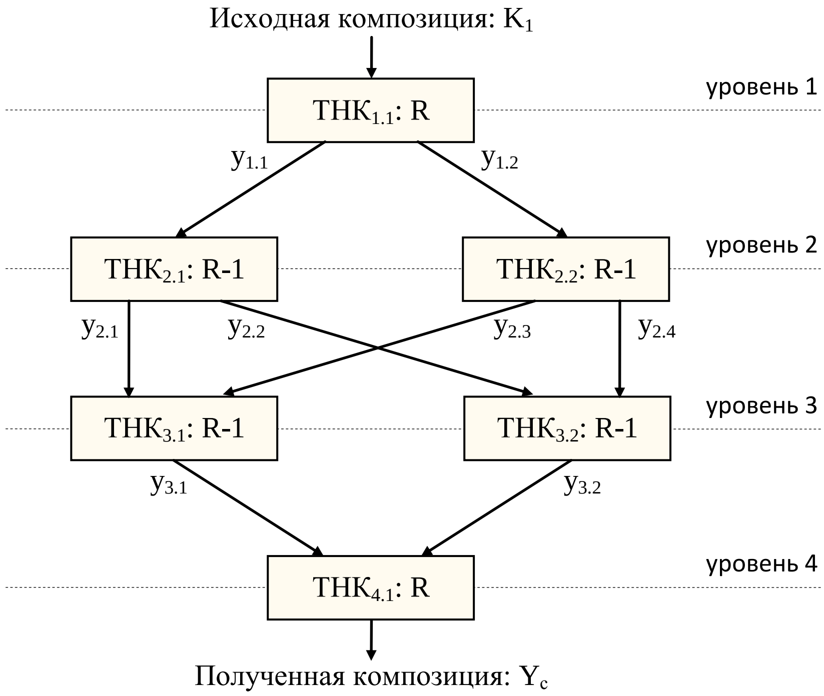

Рис. 6. Вариант объединения ТНК в структуре образа композиции

После выбора архитектуры объединения ТНК в структуре образа композиции, начинается последовательное формирование её уровней. Этот процесс начинается с первого и заканчивается последним уровнем этой структуры. Преобразование исходной композиции K_1, после завершения формирования первого уровня структуры, определяется операциями накопителя НТП$_{1.1}$, полученного в результате формирования ТНК$_{1.1}$. Таким образом, исходная композиция, после преобразований первого уровня структуры, определяется выражением (13):

$$Y_1 = F_1(K_1); \tag{13}$$

где: $Y_1 = (y_{3.1} \perp y_{3.2})$ - композиция на выходе первого уровня структуры. Данная композиция используется для формирования второго уровня структуры, представленного накопителями ТНК$_{2.1}$ и ТНК$_{2.2}$.

Напомним то, что результат формирования ТНК заключается в определении двух композиций (рис.3). Первая из них, Y – получается в результате НТП-преобразований композиции входа K, а вторая, O – результат восстановления композиции Y, с помощью обратного преобразования НСБ. В этих условиях, ошибки восстановления элементов композиции, с учётом ранее определённых операций, определяет выражение:

$$Y\uplus\big(O\cup(-1)\big) = F(K)\uplus\big(O\cup(-1)\big). \tag{14}$$

Запись выражения (14) выглядит проще, если воспользоваться представлением композиций в виде строк их значений:

$$\langle Y\rangle - \langle O\rangle = \langle F(K)\rangle - \langle O\rangle. \tag{15}$$

Теперь вернёмся к формированию второго уровня заданной структуры образа композиции (рис.6). Процесс формирования накопителей второго уровня структуры завершается определением, на выходе этих ТНК, композиций ошибок восстановления в соответствии с выражением (15):

На выходе ТНК$_{2.1}$: $\langle y_{2.1} \perp y_{2.2}\rangle = \langle F_{2.1}(y_{1.1})\rangle - \langle O_{2.1}\rangle$.

На выходе ТНК$_{2.2}$: $\langle y_{2.3} \perp y_{2.4}\rangle = \langle F_{2.2}(y_{1.2})\rangle - \langle O_{2.2}\rangle$.

Далее следует определить то, что композиция на выходе уровня структуры определяется в результате совмещения композиций, полученных на выходе всех ТНК этого уровня. Полученная в результате этой операции, композиция выхода второго уровня структуры, представлена выражением (16):

$$\langle Y_2\rangle = \langle F_2(Y_1)\rangle - \langle O_2\rangle. \tag{16}$$

В записи этого выражения введены следующие обозначения:

$$Y_2 = (y_{2.1} \perp y_{2.2}) \perp (y_{2.3} \perp y_{2.4});$$
$$F_2(Y_1) = F_{2.1}(y_{1.1}) \perp F_{2.2}(y_{1.2});$$
$$O_2 = O_{2.1} \perp O_{2.2}.$$

Задача, решаемая при формировании третьего уровня заданной структуры, та же что и при формировании второго – определить на выходе уровня ошибки восстановления элементов композиции, поступившей на его вход. Выражение (17), определяющее композицию на выходе третьего уровня заданной структуры, получено по аналогии решения этой задачи для второго уровня:

$$\langle Y_3 \rangle = \langle F_3(Y_2) \rangle - \langle O_3 \rangle. \tag{17}$$

Преобразования четвёртого уровня заданной структуры представлено выражением (18):

$$Y_c = F_4(Y_3). \tag{18}$$

После определения функциональной зависимости между входом и выходом каждого уровня архитектуры, композицию на выходе структуры – Y_c, можно определить через исходную композицию – K_1. В результате последовательных подстановок и упрощений, определяемых аддитивными свойствами НТП-преобразований, для композиции выхода структуры (рис.6) получено следующее выражение:

$$\langle Y_c \rangle = \langle K_1^{\star} \rangle - \langle O_2^{\star} \rangle - \langle O_3^{\star} \rangle, \tag{19}$$

В этом выражении, звёздочкой отмечены композиции, полученные на выходе сформированной структуры. Каждая из этих композиций представляет собой результат соответствующих НТП-преобразований структуры.

Выводы, полученные при описании процесса формирования на примере четырёхуровневой структуры образа, можно использовать для анализа архитектур с различным числом уровней. Результат формирования структуры образа композиции в общем виде представлен выражением:

$$\langle Y_c \rangle = \langle K_1^{\star} \rangle - \sum\nolimits_{\{i\}} \langle O_i^{\star} \rangle, \tag{20}$$

где: $\{i\}$- номера уровней восстановления композиции.

Полученный результат определяет критерий точности представлений композиции в виде её образа в заданном топологическом пространстве. Выражение (20) позволяет сделать следующий вывод для формируемой структуры образа композиции: - чем ближе модуль $\|\langle Y_c \rangle\|$ к нулю, тем меньше погрешность восстановления композиции данной структурой.

$$\text{Если } \|\langle Y_c \rangle\| \cong 0, \text{ то } \sum\nolimits_{\{i\}} \langle O_i^{\star} \rangle \cong \langle K_1^{\star} \rangle. \tag{21}$$

Выражение (21) определяет условие, обеспечивающее необходимую точность результатов, сформированной структуры образа композиции, полученных в режиме вычислений.

К сказанному следует добавить то, что выбор архитектуры объединения ТНК в структуре образа композиции, является не единственной возможностью по обеспечению требуемой точности формируемой структуры. Кроме архитектуры структуры, критерий её точности - модуль $\|\langle Y_c \rangle\|$, в значительной степени зависит от выбора семейств базиса накопителей ТНК (НСБ), вошедших в состав этой структуры.

7. Свойства данного представления композиции, определяющие область его применения

Область применения композиций в виде образа определяется свойствами этого представления и влиянием на эффективность решаемых с его помощью задач. К свойствам, определяющим область применения данного представления, можно отнести следующие:

1. Для представления композиции в виде образа требуется меньше числовых значений, чем содержит сама композиция. Таблица 3, показывает отношение числа значений представления (h) к числу значений композиции (m), в зависимости от размерности R. Расчёт сделан для представления композиций с помощью трёх первых семейств базиса: D_0, D_1, D_2.

Таблица 3

R	4	5	6	7	8	9	10
h/m	0.6875	0.5000	0.3438	0.2266	0.1445	0.0898	0.0547

2. Представление в виде образа композиции позволяет восстановить все значения этой композиции. Значение любого элемента композиции можно восстановить по номеру его позиции (7).
3. Образ композиции может изменять своё состояние. Каждому такому изменению соответствует определённое преобразование композиции. Множество всех возможных состояний образа композиции конечно (10).
4. Для каждого состояния, по образу композиции определяется показатель достоверности восстановления всех значений композиции: Z_i - достоверность образа, где i - номер очередного состояния (11).
5. Среди всех возможных, существует состояние образа композиции, обеспечивающее максимальную достоверность восстановления значений Z_{max}. Для определения этого состояния не требуется перебирать все возможные состояния образа. Эта задача решена без перебора всех состояний образа. Максимальная достоверность

образа композиции обозначается символом Λ с нижним индексом, определяющим её принадлежность.

6. Базис образа композиции, находясь в состоянии Z_{max}, принимает вид, подобный полученному в примере 4 (рис.5). Как видно на рисунке, все элементы первого семейства базиса положительны и расположены в порядке возрастания их значений. При этом каждый из этих элементов занимает место определяющее номер разряда позиций композиции (таблица 1). По виду всего базиса (рис.5) легко определить вклад каждого разряда в восстановление значений композиции. Минимальное влияние на точность восстановленных значений имеет первый разряд, соответствующий положению крайнего левого элемента в семействе базиса D_1. Максимальное влияние имеет старший разряд R, соответствующий положению крайнего правого элемента в семействе D_1. Таким образом, находясь в состоянии - Z_{max}, образ композиции определяет рейтинг влияния разрядов на точность восстановления всех значений композиции. Этот рейтинг разрядов определён для позиций композиции полученных на выходе НТП (рис.3). В свою очередь, обратимость преобразований позиций в НТП, позволяет определить рейтинг разрядов на его входе. Для обозначения рейтинга используется символом Ψ с нижним индексом, определяющим его принадлежность.

7. Образы разных композиций одинаковой размерности можно попарно сравнить между собой. Допустим для двух композиций K и T, одинаковой размерности, определены два образа с одинаковым набором семейств базиса. Для того что бы их сравнить, следует от базиса первого образа вычесть базис второго образа: $B(K) - B(T)$, (свойство 5). В результате этой операции получится образ композиции соответствующий выражению: $\langle K\rangle - \langle T\rangle$. Полученный образ позволит определить результат операции сравнения образов двух композиций K и T в виде Λ - достоверность и Ψ - рейтинг разрядов. В дальнейшем, результат парного сравнения образов композиций, для краткости будет именоваться - различимость образов композиций.

К перечисленным свойствам следует также добавить то, что операции, выполняемые с образом композиций, требуют меньше объёма памяти и выполняются быстрее, чем преобразования композиций, соответствующие этим операциям.

8. Применение представлений композиции в виде образа в системах поддержки принятия решений

Представим, что вы решили играть на бирже, например, на акциях или курсе валют, но у вас нет для этого достаточного опыта. Зато у вас есть возможность нанять группу брокеров с различным опытом. Каждый из брокеров группы, по вашему требованию, принимает самостоятельное решение: 1 - покупать, 2 - продавать или 3 - отложить сделку. Для формирования общего решения группы брокеров используется представленная ранее вычислительная структура. Заданная структура, объединив решения всех брокеров, предоставит вам общее решение группы в виде одного из трёх вариантов: покупать, продавать или отложить сделку.

Процесс игры начинается с этапа формирования группы брокеров. Цель этого этапа заключается в том, что бы обеспечить необходимый уровень достоверности общих решений группы. Эта цель достигается за счёт подбора группы брокеров по их качественному и количественному составу. Работа брокеров группы на этапе формирования не требует от них выполнения, каких либо дополнительных функций. В течение всей игры, независимо от её этапа, каждый брокер, принимает самостоятельные решения по операциям с валютой, опираясь на личный опыт и состояние рынка. Своё решение по каждой сделке брокер определяет номером одной из трёх операций, представленным в двоичном виде. Индивидуальные решения всех брокеров группы по очередной сделке объединяются в виде строки. В последующем эти строки называются «мнением» группы по очередной сделке. В заданной структуре они используются в качестве номеров позиций элементов композиций, в соответствии с описанным выше алгоритмом формирования образа композиции (рис.3).

Для данной игры, задача определения общего решения группы брокеров является задачей выбора из трёх альтернатив. Поэтому вычислительная структура, предназначенная для решения данной задачи, рассчитана на формирование образов трёх композиций, каждая из которых соответствует своей альтернативе. Каждая из этих композиций определяет приоритет своей альтернативы на множестве «мнений» группы (позиций композиции). В дальнейшем, для краткости, образ композиции, формируемый данной структурой, может называться образом приоритета альтернативы или просто - образом альтернативы. Приоритет каждой из трёх альтернатив, на множестве «мнений» группы, определяется по результатам сделок, полученным на этапе формирования группы брокеров. Для первой альтернативы (А1) таким результатом является успешность сделки по покупке, для второй (А2) – успешность сделки по продаже, а для третьей (А3) – результат сделки не соответствует первым двум, например убыточный.

После завершения накопления результатов сделок на этапе формирования, вычислительная структура определяет образы трёх композиций. Каждый из полученных образов представляет собой образ приоритета своей альтернативы на множестве «мнений» группы брокеров. С помощью этих трёх образов формируются две группы данных. В первой группе объединены данные о достоверности образов альтернатив, а во второй группе объединены данные о различимости образов альтернатив (таблица 4).

Таблица 4

Первая группа	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Ψ_1	Ψ_1	Ψ_1
Вторая группа	Λ_{12}	Λ_{13}	Λ_{23}	Ψ_{12}	Ψ_{13}	Ψ_{23}

Данные обеих групп используются для формирования группы брокеров. По полученным Ψ-рейтингам разрядов образов, определяется рейтинг влияния брокеров группы на устойчивость выбора общих решений группы. Этот рейтинг позволяет определить брокеров, которых можно удалить или заменить в группе.

По параметрам Λ-осуществляется контроль состояния группы брокеров. Контроль предназначен для выявления двух состояний группы брокеров:

1) Необходимо увеличить число брокеров в группе.
2) Допустимо уменьшить число брокеров в группе.

Вне этих состояний, на этапе формирования, группа находится в режиме ротации брокеров с минимальным рейтингом.

Формирование общего решения группы брокеров по очередной сделке осуществляется с помощью тех же полученных образов вычислительной структуры. Строка «мнение» группы брокеров, полученная при рассмотрении ими очередной сделки, поступает на вход структуры. С помощью образов альтернатив, по данной строке, восстанавливаются приоритеты трёх альтернатив. С помощью образов сравнения альтернатив, восстанавливается результат парных сравнений приоритетов для строки «мнение» группы. Полученные данные о приоритетах сделки, являются исходными данными для правила выбора общего решения группы брокеров по данной сделке.

Эффективность решения задачи выбора в указанных условиях проверялась методом компьютерного моделирования. Испытания проводились на структурах, предназначенных для выбора из двух и более альтернатив. При этом решения группы брокеров, формируемые моделью, подвергались различным искажениям. Решения группы искажались случайным образом и с разными вероятностями искажений индивидуальных решений брокеров. Совместно с этим, решения группы, подвергались регулярным искажениям, имитирующим ситуации «сговор». Например, преднамеренный выбор ошибочных альтернатив или выбор взаимосвязанных решений.

Результат моделирования позволяет сделать следующие выводы:

1. Брокер, решения которого менее зависимы от результатов сделок, получает меньший рейтинг, чем брокер, принимающий более зависимые от результата решения. Это приводит к тому, что такой брокер, снизив свой рейтинг до минимума, будет удалён из группы.

2. Наличие «сговора» среди брокеров группы не мешает процессу её формирования. Брокер соучастник «сговора», в зависимости от условий сговора, может оказаться в группе риска с низким рейтингом или поднимет свой рейтинг. В последнем случае он оказывается в числе обеспечивающих необходимый уровень достоверности общих решений группы брокеров.

При моделировании испытывалась возможность модификации алгоритма с целью объединить этап формирования группы с этапом выбора общих решений группы.

9. Заключение

В целом результаты компьютерного моделирования позволяют утверждать, что процесс принятия решений в указанных условиях может быть защищен от манипулирования, и обеспечит количественный и качественный контроль состава лиц, участвующих в процессе принятия решений.

Описанный способ представления композиций был опробован при решении ряда задач вычислительной математики и подтвердил свою эффективность.

Литература

1. ДЖЕЙМС А. АНДЕРСОН. *Дискретная математика и комбинаторика.* // Издательский дом «Вильямс», 2003– М., С 90-93.
2. ЛЕГКОВ Г.А. *Нейроподобная сеть на основе топологических преобразований цифровых последовательностей* // Нейроинформатика-2010. XII Всероссийская научно-техническая конференция. Сборник научных трудов. Ч. 2. М. МИФИ. 2010. С. 75-82.
3. ЛЕГКОВ Г.А. *Ограниченные возможности разбиений, заложенных в основу позиционных систем счисления, и моделирование нейронных сетей* // Нейроинформатика-2011. XIII Всероссийская научно-техническая конференция. Сборник научных трудов. Ч. 2. М. МИФИ. 2011. С. 256-258.

CALCULATIONS USING THE DISPLAY IN A GIVEN TOPOLOGICAL SPACE OR FIGURATIVE CALCULATIONS

Georgiy Legkov (legkov@inbox.ru).

Abstract: Article is related to the field of calculus mathematics and programming (computer mathematics). The method of implementation of computing is studied, where mathematical objects used during calculations are replaced by computational structure obtained as a result of transformation of the representations of these objects in a given topological space. This approach allows to reduce the capacitive and time costs of the computing process. Besides it provides additional possibilities in the decision of problems control of large-scale systems: such as the protection of decision-making process against a manipulation, the quantitative and qualitative control of structure of the persons participating during decision-making.

Keywords: relation of sets, composition of sets, topological space, display, image, base, structure.