УДК 62-50
ББК 30

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОДВЕСОМ НА ОСНОВЕ ВИХРЕВЫХ АЛГОРИТМОВ

Кочетков С. А.[1], Уткин А. В.[2], Уткин В.А. [3]
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

В статье разработаны вихревые алгоритмы управления для электромагнитного подвеса в задаче слежения за заданным положением якоря. Основной особенностью вихревых алгоритмов является инвариантность к внешним несогласованным (не принадлежащим пространству управления) возмущениям широкого класса. Показано, что предложенные алгоритмы позволяют обеспечить устойчивость замкнутой системы при неопределенности параметров электромагнитного подвеса (массы, параметров электрической цепи и т.д.). Результаты моделирования демонстрируют эффективность предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, вихревые алгоритмы, параметрические неопределенности.

---

[1] *Кочетков Сергей Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (kos@ipu.ru).*
[2] *Уткин Антон Викторович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (utkin-av@rambler.ru) (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-93-21).*
[3] *Уткин Виктор Анатольевич, доктор технических наук, главный научный сотрудник (vicutkin@ipu.ru) (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-93-21).*

1. Введение

Хорошо известно, что электромагниты [10] являются составной частью различных исполнительных устройств: электроклапанов, измерительных приборов [5–7], электромагнитных подвесов [2, 4], ударных сейсмоисточников [10] и т.д. Такое широкое использование объясняется в первую очередь простотой конструкции электромагнита и способа получения требуемой силы. Однако даже элементарный электромагнит представляет сложную нелинейную систему, управление которой является неэлементарной задачей. По этой причине свойства электромагнитных приводов в существенной мере зависят от используемых в их конструкции алгоритмов управления. Стандартной задачей управления для электромагнитов является задача слежения для механических переменных (положения, скорости якоря).

В данной работе рассмотрена проблема применения электромагнитов для создания активных магнитных подвесов [2, 4]. Существует множество работ, посвященных тематике управления данными системами. В книге [4] рассмотрена линеаризованная модель электромагнитного подвеса и предложены линейные алгоритмы управления с использованием так называемых ПИД-регуляторов [1]. Нелинейные алгоритмы управления на основе скользящих режимов предложены в работах [12–14]. В статье [15] рассмотрена проблема оценивания неизвестных внешних возмущений на основе наблюдателя на системе с переменной структурой.

В статье рассмотрена проблема управления электромагнитным подвесом с неизвестной массой, являющейся функцией заданного класса, при воздействии внешних неизвестных возмущений. Теоретической основой для разработанных алгоритмов управления являются так называемые «вихревые» алгоритмы [8–9], обеспечивающие в замкнутой системе инвариантность к внешним несогласованным возмущениям (не принадлежащим пространству управления). Хорошо известно, что в электромеханических системах наиболее приемлемым с точки зрения тепловых потерь в преобразователях, питающих электрическую цепь, является применение разрывных управляющих воздействий. Поскольку «вихревые» алгоритмы синтезируются в классе кусочно-непрерывных функций, постольку возникает теоретическая проблема адаптации разработанных в работах [8–9] алгоритмов для систем с релейными управляющими воздействиями.

В статье рассмотрены два варианта решения задачи слежения для электромагнитного подвеса. Первый алгоритм, разработанный в разделе 3, синтезирован в предположении, что все переменные системы (электрические и механические) доступны измерению и масса подвеса известна. В разделе 4 разработана модификация базового алгоритма для случая, когда масса подвешиваемого тела является неизвестной функцией заданного класса. В 5 разделе приведены результаты моделирования, которые показывают эффективность разработанных алгоритмов. Основные результаты, полученные в работе и направления дальнейших исследований обсуждаются в заключении.

2. Постановка задачи

Рассмотрим в качестве примера типичную конструкцию электромагнитного подвеса, которая состоит из тягового электромагнита 1 и подвешиваемого тела 2 (рис. 1). Дифференциальные уравнения такой системы имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} &\dot{\delta} = \upsilon, \\ (1)\quad &\dot{\upsilon} = -\frac{k}{2m}\frac{I^2}{\delta^2} + g + q(t), \\ &\dot{I} = I\frac{\upsilon}{\delta} - \frac{r}{k}I\delta + \frac{u\delta}{k}, \end{aligned}$$

где δ – величина воздушного зазора, υ – скорость движения подвешенного тела, g – ускорение свободного падения, $q(t) = [Q(t)/m]$ – внешнее неизвестное возмущение, которое характеризует действие внешней неизвестной силы $Q(t)$ в пересчете на единицу массы подвешиваемого тела, I – сила тока в катушке электромагнита, u – напряжение на входе электромагнита, $m-$ масса подвешиваемого тела, $r-$ сопротивление катушки электромагнита, $k-$конструктивный коэффициент, который определяется количеством витков катушки, площадью сечения сердечника электромагнита и т.д.

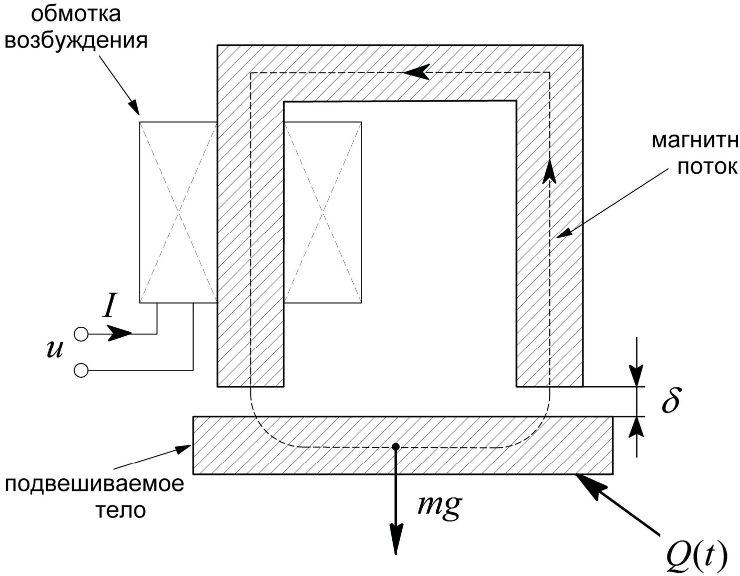

Рис. 1. Конструкция электромагнитного подвеса.

Ставится задача асимптотической стабилизации положения подвешенного тела относительно некоторой заданной траектории

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}|\delta(t)-\delta_r(t)|=0$,

где $\delta_r(t)$ – желаемое во времени положение, функция $\delta_r(t)$ имеет три первые ограниченные производные по времени

(3) $|\delta_r^{(i)}(t)|=\Delta_{ir}$,

$|\cdot|-$ здесь и далее модуль числа.

Отметим, что наиболее приемлемым с точки зрения тепловых потерь в электрических преобразователях, питающих электромагнит, является использование разрывных управляющих воздействий, т.е. напряжение на входе электромагнита u может принимать только два значения

(4) $u = \pm U$,

где $U = \text{const} > 0$.

3. Синтез базового алгоритма управления

В данном разделе приведена процедура синтеза системы управления электромагнитным подвесом в предположении, что все переменные системы (1), а также масса объекта $m = \text{const} > 0$ известны. Теоретической базой для синтеза являются вихревые алгоритмы управления [8–9], которые обладают свойством инвариантности к внешним несогласованным возмущениям заданного класса. Отличительной особенностью приведенных ниже алгоритмов является их адаптация под специфику решаемой задачи, когда управляющее воздействие может быть выбрано только в классе разрывных функций. Рассмотрим подробно синтез базового закона управления.

Вводя новую переменную $F = -\dfrac{k}{2m}\dfrac{I^2}{\delta^2} + g$, записывая дифференциальное уравнения относительно нее и объединяя с уравнениями (1), получим

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta} = \upsilon,\\
&\dot{\upsilon} = F + q(t),\\
(5)\quad &\dot{F} = -2\frac{r\delta}{k}F - \frac{I}{m\delta}u + 2\frac{r\delta}{k}g,\\
&\dot{I} = I\frac{\upsilon}{\delta} - \frac{r}{k}I\delta + \frac{u\delta}{k}.
\end{aligned}$$

Далее приведена процедура синтеза алгоритма управления нас основе блочного подхода [3] и вихревых алгоритмов [8–9].

Шаг 1. С учетом поставленной задачи управления (2) запишем уравнение относительно невязки $\bar{\delta} = \delta(t) - \delta_r(t)$

(6) $\dot{\bar{\delta}} = \upsilon - \dot{\delta}_r(t).$

В предположении, что желаемая траектория движения $\delta_r(t)$ и ее производная являются известными функциями, выберем согласно идеологии блочного подхода фиктивное управление υ в уравнении (6) в виде

(7) $\upsilon = -l_1\bar{\delta} + \dot{\delta}_r(t)$,

где параметр $l_1 = \text{const} > 0$ определяет темпы сходимости замкнутой системы к началу координат.

Шаг 2. Введем новую переменную $\bar{\upsilon} = \upsilon + l_1\bar{\delta} - \dot{\delta}_r(t)$ и запишем дифференциальные уравнения с новыми переменными $\bar{\delta}$, $\bar{\upsilon}$ с учетом (5)–(7):

$$
\begin{aligned}
&\dot{\bar{\delta}} = -l_1\bar{\delta} + \bar{\upsilon},\\
&\dot{\bar{\upsilon}} = F - l_1^2\bar{\delta} + l_1\bar{\upsilon} + q(t) - \ddot{\delta}_r(t).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Для обеспечения соотношения (7) согласно алгоритмам, приведенным в [8–9] выберем фиктивное управление во втором уравнении системы (8) в виде

$$
\begin{aligned}
&\bar{F} = F - l_1^2\bar{\delta} + l_1\bar{\upsilon} - \ddot{\delta}_r(t),\\
&\dot{\bar{F}} = -\alpha\bar{F} - \beta\bar{\upsilon} - M\text{sign}(\bar{\upsilon}),
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$, $M = \text{const} > 0$ – параметры, выбор которых поясним ниже.

Шаг 3. Введем новую переменную

(10) $s = F - l_1^2\bar{\delta} + l_1\bar{\upsilon} - \ddot{\delta}_r(t) - \bar{F}$

и запишем дифференциальное уравнение относительно нее с учетом (8)–(9)

$$
\begin{aligned}
&\dot{\bar{\delta}} = -l_1\bar{\delta} + \bar{\upsilon},\\
&\dot{\bar{\upsilon}} = \bar{F} + s + q(t),\\
&\dot{\bar{F}} = -\alpha\bar{F} - \beta\bar{\upsilon} - M\text{sign}(\bar{\upsilon}),\\
&\dot{s} = -\frac{I}{m\delta}u + \bar{q}(t,\bar{\delta},\bar{\upsilon},\bar{F},s,g),\\
&\dot{I} = I\frac{\upsilon}{\delta} - \frac{r}{k}\delta\, I + \frac{u\delta}{k}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

где

$$\overline{q}(t) = -\left(2\frac{r\delta}{k} - l_1\right)s + l_1\left(l_1^2 - 2\frac{r\delta}{k}l_1\right)\overline{\delta} + \left(2\frac{r\delta}{k} - l_1 - \frac{\beta}{l_1}\right)l_1\overline{\upsilon} - 2\frac{r\delta}{k}\ddot{\delta}_r(t) +$$

$$+2\frac{r\delta}{k}g - \left(2\frac{r\delta}{k} - l_1 + \alpha\right)\overline{F} + l_1 q(t) - \dddot{\delta}_r(t) - M\mathrm{sign}(\overline{\upsilon}).$$

Для обеспечения стабилизации переменных согласно (4) выбирается реальное управляющее воздействие в виде

(12) $u = U\mathrm{sign}(sI)$.

При выполнении условия

(13) $\dfrac{|I|}{m\delta}U > |\,\overline{q}(t,\overline{\delta},\overline{\upsilon},\overline{F},s,g)\,|$

на поверхности $s = 0$ за конечное время возникает скользящий режим [16] и уравнения замкнутой системы принимают вид

$$\begin{aligned} &\dot{\overline{\delta}} = -l_1\overline{\delta} + \overline{\upsilon},\\ &\dot{\overline{\upsilon}} = \overline{F} + q(t),\\ (14)\quad &\dot{\overline{F}} = -\alpha\overline{F} - \beta\overline{\upsilon} - M\mathrm{sign}(\overline{\upsilon}),\\ &F = -\frac{k}{2m}\frac{I^2}{\delta^2} + g = l_1^2\overline{\delta} - l_1\overline{\upsilon} + \ddot{\delta}_r(t) + \overline{F}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства можем записать «физическое» ограничение на коэффициент l_1 и переменные $\overline{\delta}$, $\overline{\upsilon}$, $\ddot{\delta}_r(t)$, $\overline{F}$

(15) $l_1^2\overline{\delta} - l_1\overline{\upsilon} + \ddot{\delta}_r(t) + \overline{F} \le g$,

которое означает, что электромагнитная сила всегда направлена вверх (см. рис. 1).

Для выбора коэффициентов обратной связи приведенного алгоритма управления введем проектные ограничения на переменные замкнутой системы (11)–(12), исходной системы (1), внешнее возмущение $q(t)$ и класс функций задающего сигнала $\delta_r(t)$

$$\begin{aligned} &|s| \le S, \delta_{\min} \le \delta \le \delta_{\max}, \upsilon \le N, |\overline{\delta}| \le \overline{\Delta}, \overline{\upsilon} \le \overline{N}, |\overline{F}| \le \widetilde{F}, |q(t)| \le Q,\\ (16)\quad &|\dot{q}(t)| \le Q_1, |\ddot{q}(t)| \le Q_2, |\delta_r(t)| \le \Delta_r, |\dot{\delta}_r(t)| \le \Delta_{1r}, |\ddot{\delta}_r(t)| \le \Delta_{2r},\\ &|\dddot{\delta}_r(t)| \le \Delta_{3r}. \end{aligned}$$

С учетом (15) введем еще одно ограничение, позволяющее обеспечить соотношение (13)

(17) $|l_1^2\bar{\delta} - l_1\bar{\upsilon} + \ddot{\delta}_r(t) + \bar{F}| \le pg, \quad p \in (0,1)$.

Из уравнений (14) и (17) следует, что если амплитуда управляющего воздействия (12) выбрана таким образом, что обеспечивается попадание на поверхность скольжения $s = 0$ в некоторый момент времени $t = t_r$, то модуль величины тока ограничен снизу

(18) $|I| \ge \delta\sqrt{\dfrac{2m(1-p)g}{k}}$,

откуда следует, что при $t \ge t_r$ траектории замкнутой системы также будут протекать на многообразии $s = 0$.

У т в е р ж д е н и е 1. При ограничениях (16)–(17) существует область начальных условий

(19) $|s(t_0)| \le S_0, |\bar{\delta}(t_0)| \le \bar{\Delta}_0, \upsilon(t_0) \le N_0, |I(t_0)| \le I_0, |\bar{F}(t_0)| \le \bar{F}_0$,

амплитуда управляющего воздействия U и моменты времени $t = \bar{t}_0$ и $t = t_r$, такие, что при $t \ge \bar{t}_0$ выполняется неравенство (13), а в момент $t = t_r$ возникает скользящий режим на многообразии $s = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 1. Рассмотрим вначале случай, когда $s(t_0) > 0$. При этом согласно (12) $u = U\mathrm{sign}(I)$. Записывая из (11) дифференциальное уравнение для модуля тока $|I|$, получим

(20) $|\dot{I}| = -\left(\dfrac{r}{k}\delta - \dfrac{\upsilon}{\delta}\right)|I| + \dfrac{\delta}{k}U.$

В рассматриваемой задаче предполагается, что величина $-\left(\dfrac{r}{k}\delta - \dfrac{\upsilon}{\delta}\right) < 0$. Из этого неравенства следует, что токовый контур диссипативный, т.е. скорость движения подвешиваемого тела не такая большая, чтобы в токовом контуре начала генерироваться энергия за счет большой электродвижущей силы движения. Обозначим за $T_{\min}$ минимальную постоянную времени токового контура и запишем нижнюю оценку решения уравнения (20)

(21) $|I| \geq U \dfrac{\delta_{\min}}{k}\left(1 - e^{\frac{t-t_0}{T_{\min}}}\right)$

При ограничениях (16), (19) возмущение $\overline{q}(t,\overline{\delta},\overline{\upsilon},\overline{F},s,g)$ в последнем уравнении системы (11) ограничено некоторой величиной

(22) $|\overline{q}(t,\overline{\delta},\overline{\upsilon},\overline{F},s,g)| \leq \overline{Q}$,

где $\overline{Q} = k_s S + k_{\overline{\Delta}}\overline{\Delta} + k_{\overline{N}}\overline{N} + 2\dfrac{r\delta_{\max}}{k}\Delta_{2r} + 2\dfrac{r\delta_{\max}}{k} g + k_{\alpha}\widetilde{F} + l_1 Q + \Delta_{3r} +$

$+M$, $k_s = \max\limits_{\delta\in[\delta_{\min};\delta_{\max}]}\left|2\dfrac{r\delta}{k} - l_1\right|$, $k_{\Delta} = \max\limits_{\delta\in[\delta_{\min};\delta_{\max}]}\left|l_1\left(l_1^2 - 2\dfrac{r\delta}{k}l_1\right)\right|$,

$k_{\overline{N}} = \max\limits_{\delta\in[\delta_{\min};\delta_{\max}]}\left|\left(2\dfrac{r\delta}{k} - l_1 - \dfrac{\beta}{l_1}\right)\right| l_1$, $\qquad k_{\alpha} = \max\limits_{\delta\in[\delta_{\min};\delta_{\max}]}\left|2\dfrac{r\delta}{k} - l_1 + \alpha\right|$,

$\max\limits_{\delta\in[\delta_{\min};\delta_{\max}]}(\cdot)$ означает максимальные значения коэффициентов в указанной области.

Введем в рассмотрение некоторую величину тока $I_r = \text{const} > 0$ и выберем амплитуду управляющего воздействия U так, чтобы обеспечить выполнение неравенства (13) с некоторым запасом, задание которого будет определять скорость движения к многообразию $s = 0$

(23) $\dfrac{I_r U}{m\delta_{\max}} = \overline{Q} + \Delta_s$.

Из неравенства (18) следует, что проектные ограничения (16)–(17) должны быть выбраны таким образом, что

$$I_r < \delta_{\min}\sqrt{\frac{2m(1-p)g}{k}}.$$

В противном случае величины тока при движении в скользящем режиме не хватает, для удерживания траекторий замкнутой системы на многообразии $s = 0$.

Из выражений (21)–(23) запишем максимальный интервал времени, за который модуль силы тока достигнет значения I_r

(24) $\bar{t}_0 - t_0 \le -T_{\min} \ln\left(1 - k\dfrac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}}\left(\overline{Q} + \Delta_s\right)\dfrac{m}{U^2}\right).$

Как видно из (24) выбором амплитуды управления U может быть задан любой момент времени $\bar{t}_0$, начиная с которого выполняется неравенство (13). Отметим, что в пределе

$\lim\limits_{U \to \infty}(\bar{t}_0 - t_0) = 0$.

Из предельного соотношения следует, что выбором амплитуды U и области начальных условий S_0 всегда может быть обеспечено неравенство

$s(\bar{t}_0) \le S_0 + \overline{Q}(\bar{t}_0 - t_0) \le S$.

Запишем мажоранту для переменной $s(t)$ при $t > \bar{t}_0$ с учетом (23)

$| s(t) | \le s(\bar{t}_0) - \Delta_s(t - \bar{t}_0) \quad \forall t > \bar{t}_0$.

Интервал попадания на поверхность скольжения

$t_r - \bar{t}_0 \le \dfrac{s(\bar{t}_0)}{\Delta_s}$.

В момент времени $t = t_r$ возникает скользящий режим на многообразии $s = 0$, при этом траектории замкнутой системы не покинут его, если правильным образом выбрать область начальных условий (19) и проектные ограничения на переменные $\overline{\delta}(t)$, $\overline{\upsilon}(t)$, $\overline{F}(t)$ и внешнее возмущение $q(t)$.

Рассмотрим решения первых трех уравнений системы (11) при $t > t_0$

$$\overline{\delta}(t) = e^{-l_1(t - t_0)}\overline{\delta}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{l_1(t-\tau)}\overline{\upsilon}(\tau)d\tau,$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\upsilon}(t) \\ \overline{F}(t) \end{pmatrix} = e^{A(t - t_0)}\begin{pmatrix} N(t_0) \\ \overline{F}(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\begin{pmatrix} s(\tau) + q(\tau) \\ -M\operatorname{sign}(\overline{\upsilon}(\tau)) \end{pmatrix}d\tau,$$

где собственные числа λ_i $(i=1,2)$ матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$ согласно критерию Гурвица всегда имеет отрицательные действительные части, т.е. $\operatorname{Re}(\lambda_i)<0,\ i=1,2$.

Из последних выражений запишем неравенства

$$(25)\quad \begin{aligned} &|\bar{\delta}(t)| \le \bar{\Delta}_0 + \frac{\bar{N}}{l_1}, \\ &\begin{pmatrix} |\upsilon(t)| \\ |\bar{F}(t)| \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} N_0 \\ \bar{F}_0 \end{pmatrix} + |A^{-1}| \begin{pmatrix} S+Q \\ M \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad |A^{-1}| = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\beta} & \dfrac{1}{\beta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где неравенства понимаются в покомпонентном смысле.

Выбирая проектные ограничения (16) и параметры обратной α, β, M связи согласно неравенствам (17), (25)

$$(26)\quad \bar{\Delta}_0 + \frac{\bar{N}}{l_1} \le \bar{\Delta},\ \bar{N}_0 + \frac{\alpha}{\beta}\left(S+Q\right) + \frac{M}{\beta} \le \bar{N},\ \bar{F}_0 + S + Q \le \tilde{F},$$

получим, что при движении в скользящем режиме для возмущения $\bar{q}(t,\bar{\delta},\bar{\upsilon},\bar{F},s,g)$ будет справедливо неравенство (22) $\forall t \ge t_r$, т.е. траектории замкнутой системы (11) останутся на поверхности $s=0$.

Приведенный алгоритм выбора параметров алгоритма управления гарантирует возникновения и существование скользящего режима для отрицательных начальных условий $s(t_0)<0$. Действительно, в этом случае согласно (17) отсутствует фаза «накачки» тока (интервал времени $\bar{t}_0 - t_0$) и неравенство (13) выполняется автоматом.

Утверждение 1 доказано.

Перепишем уравнения (14) с новой координатой $y=\bar{F}+q(t)$

$$(27)\quad \begin{aligned} &\dot{\bar{\delta}} = -l_1\bar{\delta} + \bar{\upsilon}, \\ &\dot{\bar{\upsilon}} = y, \\ &\dot{y} = -\alpha\, y - \beta\bar{\upsilon} - M\operatorname{sign}(\bar{\upsilon}) + \xi(t), \end{aligned}$$

где $\xi(t) = \alpha q(t) + \dot{q}(t)$.

При движении в скользяще режиме справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть параметры алгоритма управления (9) выбраны таким образом, что справедливы неравенства

1) возмущение $\xi(t)$ удовлетворяет ограничениям

$$|\xi(t)| \le \alpha Q + Q_1 = \Sigma, \ |\dot{\xi}(t)| \le \alpha Q_1 + Q_2 = \overline{\Sigma};$$

2) параметры α, M алгоритма управления (9) выбраны согласно выражениям (26) и неравенствам

$$M > \Sigma, \ \alpha(M - \Sigma) > 2\overline{\Sigma}.$$

Тогда переменные замкнутой системы (15) экспоненциально сходятся к нулю независимо от внешних возмущений.

Доказательство теоремы 1. Перепишем уравнения (27) в новых координатах $y_1 = \left|\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right|^{0,5} \overline{\upsilon}$, $y_2 = \dfrac{\alpha}{2}\overline{\upsilon} + y$ (далее рассматривается случай, когда $\alpha^2/4 - \beta \ne 0$)

$$\dot{\overline{\delta}} = -l_1\overline{\delta} + \left|\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right|^{0,5} y_1$$

$$\text{(28)} \quad \dot{y}_1 = -\frac{\alpha}{2} y_1 + \gamma_1 y_2,$$

$$\dot{y}_2 = \gamma_2 y_1 - \frac{\alpha}{2} y_2 - M\,\mathrm{sign}(y_1) + \xi(t),$$

где $\gamma_1 = \gamma_2 = \left|\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right|^{0,5}$, при $\dfrac{\alpha^2}{4} - \beta > 0$, и $\gamma_1 = -\gamma_2 = \left|\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right|^{0,5}$ при $\dfrac{\alpha^2}{4} - \beta < 0$.

Рассмотрим составную функцию Ляпунова

$$\text{(28)} \quad V = |y_1| - \frac{\xi}{M} y_1 + \frac{y_1^2}{2M} + \frac{y_2^2}{2M}.$$

Дифференцируя функцию Ляпунова с учетом уравнений (27), получим

$$\dot{V} = -\frac{\alpha}{2}|y_1| + \frac{\alpha\xi}{2M}y_1 - \frac{\dot{\xi}}{M}y_1 - \frac{\alpha}{2M}y_1^2 +$$

$$+\frac{\gamma_1+\gamma_2}{M}y_1y_2 - \frac{\alpha}{2M}y_2^2 \le x^{\mathrm{T}}Qx - \overline{\alpha}\,|y_1| \le \tag{29}$$

$$\le \lambda_{\max}(Q)[y_1^2 + y_2^2] - \overline{\alpha}\,|y_1|.$$

где $x^{\mathrm{T}} = (y_1 \quad y_2)$, матрица $P = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2M} & \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2M} \\ \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2M} & -\frac{\alpha}{2M} \end{pmatrix}$,

$\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\Sigma}{M} - \frac{2\overline{\Sigma}}{\alpha M}\right)$, $\lambda_{\max}(P)$ – максимальное собственное число матрицы Q.

Отметим, что квадратичная форма $x^{\mathrm{T}}Qx$ отрицательна определена при любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что легко проверяется по критерию Сильвестра. Как видно, при $\overline{\alpha} > 0$ или $\alpha(M - \Sigma) > 2\overline{\Sigma}$ производная функции Ляпунова отрицательна. Следовательно, замкнутая система асимптотически убывает к нулю.

Из выражения (28) можем записать неравенство

$$V \le |y_1|\left(1 + \frac{\Sigma}{M}\right) + \frac{1}{2M}(y_1^2 + y_2^2) \le c_0(|y_1| + y_1^2 + y_2^2),$$

где $c_0 = \max\left\{1 + \frac{\Sigma}{M}, \frac{1}{2M}\right\}$.

Перепишем (29) с учетом последнего равенства

$$\dot{V} \le \lambda_{\max}(Q)[y_1^2 + y_2^2] - \overline{\alpha}\,|y_1| \le c_1(|y_1| + y_1^2 + y_2^2) \le -\gamma V,$$

где $\gamma = \frac{|c_1|}{c_0}$, $c_1 = \min\{-\lambda_{\max}(Q), \overline{\alpha}\}$.

Из этого выражения следует экспоненциальная сходимость переменных y_1, y_2 при α удовлетворяющих условиям теоремы и произвольном параметре $\beta > 0$.

Из экспоненциальной сходимости переменных y_1, y_2 следует экспоненциальная сходимость переменной $\bar{\delta}(t)$.

Теорема 1 доказана.

4. Синтез алгоритма управления при неизвестной массе подвешиваемого тела

Рассмотрим синтез алгоритма в робастной постановке, когда масса подвешиваемого тела является неизвестной ограниченной функцией, с двумя первыми ограниченными производными:

(30) $m_{\min} \le m(t) \le m_{\max}$, $|\dot{m}(t)| \le m_1$, $|\ddot{m}(t)| \le m_2$,

где $m_{\min} = \text{const} > 0$, $m_{\max} = \text{const} > 0$, $m_i = \text{const} > 0$ $(i = 1, 2)$ – известные константы.

Вводя новую переменную $F^* = -\dfrac{k}{2}\dfrac{I^2}{\delta^2} + m_{\max} g$, записывая дифференциальное уравнения относительно нее и объединяя с уравнениями (1), получим

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta} = \upsilon,\\
&\dot{\upsilon} = \frac{1}{m(t)} F^* + \tilde{q}(t),\\
(31)\quad &\dot{F}^* = -2\frac{r\delta}{k} F^* - \frac{I}{\delta} u + 2\frac{r\delta}{k} m_{\max}\, g,\\
&\dot{I} = I\frac{\upsilon}{\delta} - \frac{r}{k} I\delta + \frac{u\delta}{k},
\end{aligned}$$

где $\tilde{q}(t) = \left(1 - \dfrac{m_{\max}}{m(t)}\right) g + q(t)$.

Далее приведена процедура синтеза алгоритма управления при ограничениях на функцию массы вида (30) на основе базового алгоритма, описанного в разделе 3.

Шаг 1. Совпадает с процедурой, приведенной в разделе 3.

Шаг 2. Введем новую переменную $\overline{\upsilon} = \upsilon + l_1\overline{\delta} - \dot{\delta}_r(t)$ и запишем дифференциальные уравнения с новыми переменными $\overline{\delta}$, $\overline{\upsilon}$ с учетом (6)–(7), (31)

$$\dot{\overline{\delta}} = -l_1\overline{\delta} + \overline{\upsilon},$$
(32)
$$\dot{\overline{\upsilon}} = \frac{1}{m(t)}F^* - l_1^2\overline{\delta} + l_1\overline{\upsilon} + \tilde{q}(t) - \ddot{\delta}_r(t).$$

Для обеспечения соотношения (7) выберем фиктивное управление во втором уравнении системы (32) в виде

$$\overline{F}^* = \frac{F^*}{m_{\max}} - l_1^2\overline{\delta} + l_1\overline{\upsilon} - \ddot{\delta}_r(t),$$
(33)
$$\dot{\overline{F}}^* = -\alpha\overline{F}^* - M\mathrm{sign}(\overline{\upsilon}),$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $M = \mathrm{const} > 0$ – параметры, выбор которых поясним ниже.

Шаг 3. Введем новую переменную

(34) $$s^* = \frac{F^* - l_1^2\overline{\delta} + l_1\overline{\upsilon} - \ddot{\delta}_r(t)}{m_{\max}} - \overline{F}^*$$

и запишем дифференциальное уравнение относительно нее с учетом (32)–(34)

$$\dot{\overline{\delta}} = -l_1\overline{\delta} + \overline{\upsilon},$$
$$\dot{\overline{\upsilon}} = \frac{m_{\max}}{m(t)}\overline{F}^* + m_{\max}s + q^*(t),$$
(35)
$$\dot{\overline{F}}^* = -\alpha\overline{F}^* - \beta\overline{\upsilon} - M\mathrm{sign}(\overline{\upsilon}),$$
$$\dot{s}^* = -\frac{I}{m_{\max}\delta}u + \overline{q}^*(t, \overline{\delta}, \overline{\upsilon}, \overline{F}^*, s^*, g),$$

где $q^*(t) = \tilde{q}(t) + \left(1 - \frac{m_{\max}}{m(t)}\right)[-l_1^2\overline{\delta} + l_1\overline{\upsilon} - \ddot{\delta}_r(t)]$,

$$\bar{q}^*(t) = -\left(2\frac{r\delta}{k} - l_1\right)s^* + \frac{l_1}{m_{\max}}\left(l_1^2 - 2\frac{r\delta}{k}l_1\right)\bar{\delta} + \left(2\frac{r\delta}{k} - l_1\right)\frac{l_1}{m_{\max}}\bar{\upsilon} -$$
$$-2\frac{r\delta\ddot{\delta}_r(t)}{km_{\max}} + 2\frac{r\delta}{k}g - \left(\left(2\frac{r\delta}{k} - l_1\right)\frac{1}{m_{\max}} + \alpha\right)\bar{F}^* + l_1 q^*(t) - \frac{\dddot{\delta}_r(t)}{m_{\max}} -$$
$$-M\mathrm{sign}(\bar{\upsilon}).$$

Для обеспечения стабилизации переменных выбирается реальное управляющее воздействие в виде

(36) $u = U\mathrm{sign}(s^* I)$.

При выполнении условия

(37) $\dfrac{|I|}{m_{\max}\delta}U > |\bar{q}^*(t, \bar{\delta}, \bar{\upsilon}, \bar{F}^*, s^*, g)|$

на поверхности $s = 0$ за конечное время возникает скользящий режим [16] и уравнения замкнутой системы принимают вид

$$\dot{\bar{\delta}} = -l_1\bar{\delta} + \bar{\upsilon},$$
(38) $$\dot{\bar{\upsilon}} = \frac{m_{\max}}{m(t)}\bar{F}^* + q^*(t),$$
$$\dot{\bar{F}}^* = -\alpha\bar{F}^* - M\mathrm{sign}(\bar{\upsilon}).$$

Алгоритм выбора амплитуды U и области начальных условий, из которой обеспечивается стабилизация переменных системы (35) аналогичен, процедуре, приведенной в разделе 3. Отметим лишь ограничения на класс возмущения $q^*(t)$

(39) $|q^*(t)| \le Q^*$, $|\dot{q}^*(t)| \le Q_1^*$, $|\ddot{q}^*(t)| \le Q_2^*$,

где $Q^* = \mathrm{const} > 0$, $Q_1^* = \mathrm{const} > 0$, $Q_2^* = \mathrm{const} > 0$.

Перепишем уравнения (38) с новой переменной $y = \dfrac{m_{\max}}{m(t)}\bar{F}^* + q^*(t)$

$$\dot{\bar{\delta}} = -l_1\bar{\delta} + \bar{\upsilon},$$

(40) $$\dot{\bar{\upsilon}} = y,$$

$$\dot{y} = -\left(\alpha + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\right)y - \frac{m_{\max}}{m(t)}M\mathrm{sign}(\bar{\upsilon}) + \xi^*(t),$$

где $\xi^*(t) = \dot{q}^*(t) + \left(\alpha + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\right)q(t)$.

Для возмущения $\xi^*(t)$ и его первой производной согласно (30), (39)–(40) могут быть записаны неравенства

(41) $$|\xi^*(t)| \le Q_1 + \left(\alpha + \frac{m_1}{m_{\min}}\right)Q^* = \Sigma^*,$$

$$|\dot{\xi}^*(t)| \le \left(\alpha + \frac{m_2 m_{\max} + m_1^2}{m_{\min}^2}\right)Q^* + \left(\alpha + \frac{m_1}{m_{\min}}\right)Q_1^* + Q_2 = \bar{\Sigma}^*,$$

Т е о р е м а 2. Пусть

1) возмущение $\xi(t)$ удовлетворяет ограничениям (41)

2) параметры алгоритма управления (33)–(34), (36) выбраны таким образом, что справедливы неравенства

$$M > \Sigma^*, \left(\alpha - 2\frac{m_1}{m_{\min}}\right)M - \left(\alpha - \frac{m_1}{m_{\min}}\right)\Sigma > \bar{\Sigma}^*.$$

Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} |\bar{\delta}(t)| = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.

Введем систему сравнения

(42) $$\dot{\tilde{\upsilon}} = \tilde{y},$$

$$\dot{\tilde{y}} = -\alpha_{\min}\tilde{y} - \frac{m_{\max}}{m(t)}M\mathrm{sign}(\tilde{\upsilon}) + \xi^*(t),$$

где $\alpha_{\min} = \alpha - \frac{m_1}{m_{\min}} > 0$ по условиям теоремы 2.

Обозначим за $t_i, \tilde{t}_i$ моменты времени, когда происходит обнуление переменных $\overline{\upsilon}(t)$ и $\tilde{\upsilon}(t)$ соответственно, и за $t_i^{'}, \tilde{t}_i^{'}$, когда происходит обнуление переменных $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\upsilon}(t_i) = 0, \tilde{\upsilon}(\tilde{t}_i) = 0,\ t_1 = \tilde{t}_1, \\ y(t_i^{'}) = 0, \tilde{y}(\tilde{t}_i^{'}) = 0,\end{array}\right. \quad i = \overline{1,\infty},$$

Рассмотрим фазовые портреты систем (40), (42) при $t > t_1$ и одинаковых начальных условиях $\overline{\upsilon}(t_1) = \tilde{\upsilon}(t_1) = 0, \tilde{y}(t_1) = y(t_1)$. В работе [8–9] приведено подробное доказательство справедливости неравенств

(43) $|\overline{\upsilon}(t_i^{'})| \le |\tilde{\upsilon}(\tilde{t}_i^{'})|,\ |y(t_i)| \le |\tilde{y}(\tilde{t}_i)|,\ i = \overline{2,\infty}$

на основе сравнения фазовых скоростей систем (40), (42).

Рассмотрим функцию Ляпунова для системы (42)

$$V = \frac{m_{\max}|\tilde{\upsilon}|}{m(t)} - \frac{\xi^*}{M}\tilde{\upsilon} + \frac{(\tilde{y} + \alpha_{\min}\tilde{\upsilon})}{2M}.$$

Ее производная неположительная. Действительно

$$\dot{V} = -\alpha_{\min}\frac{m_{\max}}{m(t)}|\tilde{\upsilon}| - \frac{m_{\max}\dot{m}(t)}{m^2(t)}|\tilde{\upsilon}| - \frac{\dot{\xi}^*}{M}\tilde{\upsilon} + \alpha_{\min}\tilde{\upsilon}\frac{\xi^*}{M} \le$$

$$\le -\frac{m_{\max}}{m(t)}\left(\alpha_{\min}\left(1 - \frac{m(t)\Sigma}{m_{\max}M}\right) - \frac{m_1}{m_{\min}}\right)|\tilde{\upsilon}| - \frac{\overline{\Sigma}^*}{M}|\tilde{\upsilon}| \le$$

$$\le -\left(\alpha_{\min}\left(1 - \frac{\Sigma}{M}\right) - \frac{m_1}{m_{\min}} - \frac{\overline{\Sigma}^*}{M}\right)|\tilde{\upsilon}| = -\gamma^*|\tilde{\upsilon}|,$$

где $\gamma^* = \left(\alpha - 2\frac{m_1}{m_{\min}}\right)M - \left(\alpha - \frac{m_1}{m_{\min}}\right)\Sigma - \overline{\Sigma}^* > 0$ по условиям теоремы 2.

Из последнего неравенства следует, что переменная $\tilde{\upsilon}(t)$ системы сравнения убывает асимптотически

(44) $\lim\limits_{t \to \infty} |\tilde{\upsilon}(t)| = 0$.

Из соотношений (43)–(44) следует предельное соотношение для переменной $\overline{\upsilon}(t)$

$$\lim_{t\to\infty} |\overline{\upsilon}(t)| = 0,$$

и в силу устойчивости собственной динамики первого уравнения (39) выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} |\overline{\delta}(t)| = 0.$$

Теорема 2 доказана.

5. Результаты моделирования

Приведем результаты моделирования алгоритма управления, разработанного в разделе 4, для двух экспериментов. В опытах использовались следующие общие условия:

– активное сопротивление электромагнита r = 80 Ом;

– конструктивный коэффициент $k = 0{,}24 \cdot 10^{-2}$ Гн·м;

– $U = 220$ В;

– функция задающего воздействия

$$\delta_r(t) = 0{,}04 + 0{,}01\sin(2t) + 0{,}01\sin(4t) \text{ м}$$

– функция внешнего возмущения, полагаемого неизвестным

$$q(t) = \sin(t) + \sin(2t) \text{ м/с}^2.$$

– параметры алгоритма управления (33)–(34), (36)

$M = 100$, $\alpha = 20$, $l_1 = 4$.

Эксперимент 1. Функция массы подвешиваемого тела

$$m(t) = [0{,}15 + 0{,}05\sin(1{,}5t)] \text{ кг.}$$

Результаты моделирования в среде MATLAB/Simulink приведены на рисунке 2. Для численного интегрирования использовался метод Дормана–Принса (ode 5) с шагами интегрирования $t_s = 10^{-5}$ с и $t_s = 10^{-6}$ с.

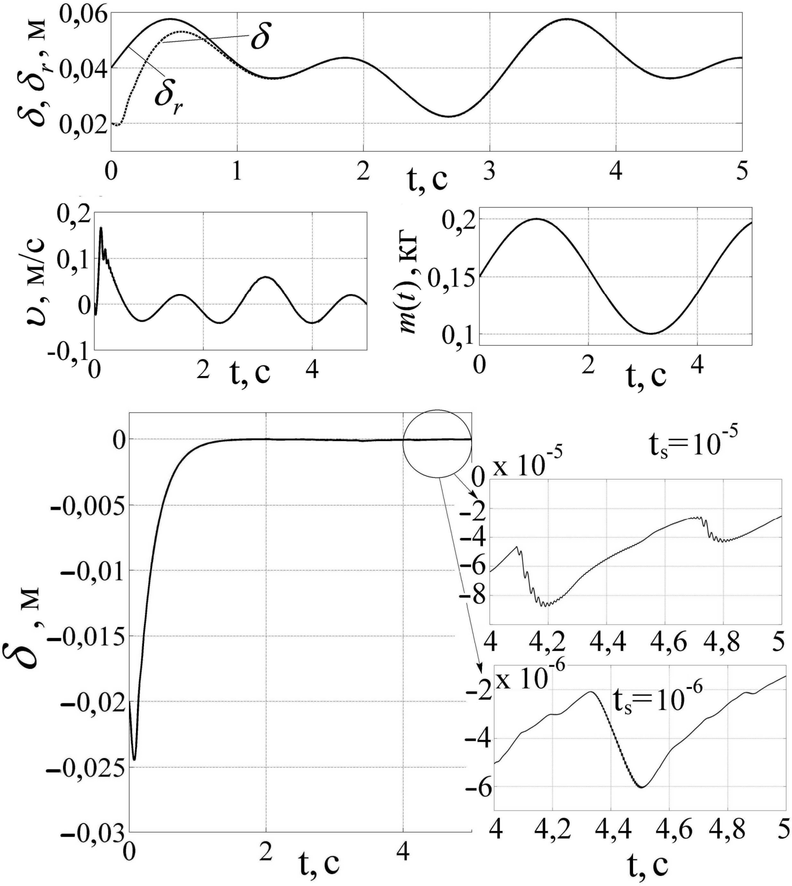

Рис. 2. Результаты моделирования первого эксперимента 1.

Как видно, чем меньше шаг интегрирования, тем меньше установившаяся ошибка. Поскольку доказанный в теореме 1 теоретический результат справедлив только при бесконечной частоте переключения реле ($t_s = 0$), постольку такой результат вполне объясним.

Эксперимент 2. Функция массы подвешиваемого тела $m(t)$ в данном эксперименте является периодической и на первом периоде описывается в виде прямоугольного сигнала

$$m(t)=\begin{cases}0{,}2\ \text{кг} & \text{при} \quad 0\le t\le 2\ c;\\ 0{,}12\ \text{кг} & \text{при} \quad 2\le t\le 4\ c.\end{cases}$$

Результаты моделирования приведены на рисунке 3, из которого видно, что при нарушении условий теоремы 2 (масса изменяется скачком) траекторию движения подвешиваемого тела «вышибает». Однако после того как масса опять становится функцией заданного класса, ошибка слежения $\bar{\delta}(t)$ асимптотически стремиться к нулю.

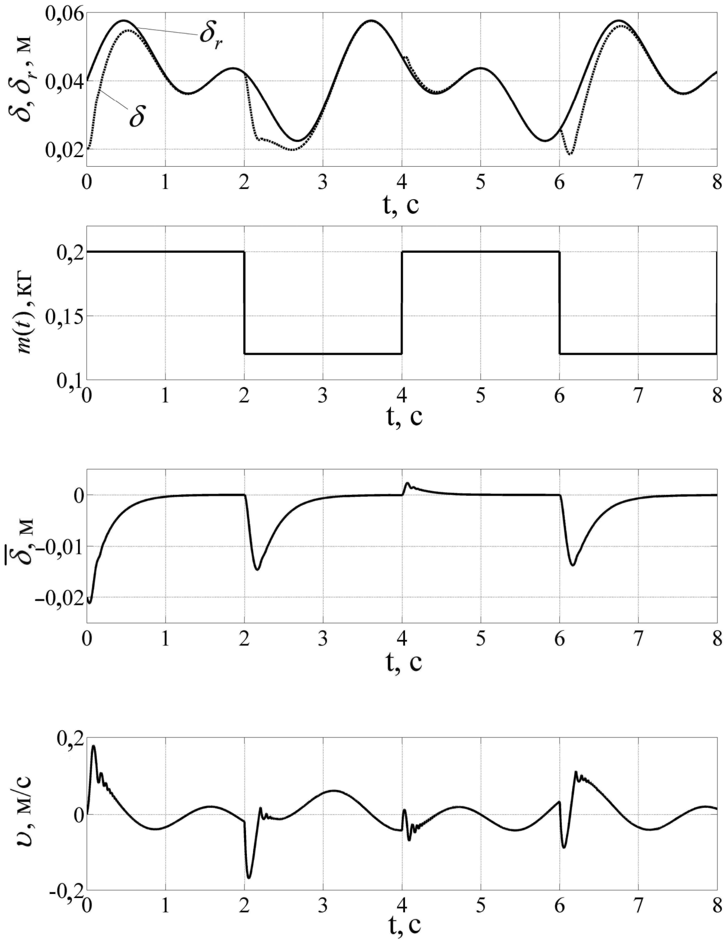

Рис. 3. Результаты моделирования эксперимента 2.

6. Заключение

В статье были предложены алгоритмы управления электромагнитным подвесом в робастной постановке, когда масса подвешиваемого тела неизвестна и на систему действует внешние неконтролируемые возмущения, не принадлежащих пространству управления. Основным направлением дальнейших исследований является разработка так называемого бездатчикового электромагнитного подвеса на основе идентификаторов состояния динамических объектов. Это направление представляется перспективным из-за сложности установки и дороговизны датчиков положения и скорости подвешиваемого тела. Кроме того, в ряде прикладных задач [10] установка таких датчиков из-за механической вибрации в принципе невозможна.

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю. Н. *Управление конечномерными линейными объектами*. – М. : Наука, 1976.
2. ГЕРДИ В. Н., МАЙКОВ К. А., ОСОКИН Ю. А., СТАНКЕВИЧ Н. Н. *Теория и применение электромагнитных подвесов*. – М. : Машиностроение, 2006.
3. ДРАКУНОВ С. В., ИЗОСИМОВ Д. Б., ЛУКЬЯНОВ А. Г., УТКИН В. А., УТКИН В. И. // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 5. – С. 3–13; – 1990. – № 6. – С. 20–31.
4. ЖУРАВЛЕВ Ю. Н. *Активные магнитные подшипники: теория, расчет, применение*. – Спб. : Политехника, 2003.
5. КАНЦЕЛЬСОН О. Г., ЭДЕЛЬШТЕЙН А. С. *Автоматические измерительные приборы с магнитной подвеской*. – М. : Энергия, 1970.
6. КОЧЕТКОВ С. А. *Повышение точности измерений в системах с дифференциальными датчиками // Датчики и системы*. – 2011. – № 3. С. 10–15.
7. КОЧЕТКОВ С. А. *Алгоритмы управления и идентификации для профилографа-профилометра при воздействии внешних возмущений* // Проблемы управления. – 2011. – № 3. – С. 20–29.
8. КОЧЕТКОВ С. А., УТКИН В. А. *Инвариантность в системах с несогласованными возмущениями* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 7. – С. 46–83.

9. КОЧЕТКОВ С. А., УТКИН В. А. *Обеспечение инвариантности за счет создания колебательных режимов* // Доклады академии наук. – 2013. – Т. 452, № 6. – С. 611–616.
10. ИВАШИН В. В., КУДИНОВ А. К., ПЕВЧЕВ В. П. *Электромагнитные привода для импульсных и виброимпульсных технологий* // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2012. –№ 1. – С. 72–75.
11. ЭССЕ Я. *Электромагниты.* – М. : Энергоиздат. – 1934.
12. Chiang, H.-K. ; Chen, C.-A. ; Li, M.-Y. *Integral variable-structure grey control for magnetic levitation system* // Electric Power Applications, IEE Proceedings. – 2006. –Vol: 153, No. 6. – P. 809–814.
13. GOSTKOV A. S., KOCHETKOV S. A., SHAVRIN P. A. *Sensorless sliding mode control for electromagnet* // In Proceedings Nonlinear Control Systems conference NOLCOS’07, South Africa, Pretoria. – 2007. – P. 1151–1155.
14. Lin F.-J., Li-Tao T., Shieh P.-H. *Intelligent Sliding-Mode Control Using RBFN for Magnetic Levitation System* // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2007. – Vol. 54, No. 3. – P. 1752–1762.
15. Lu Y.-S.; Chen J.-S. *Design of a perturbation estimator using the theory of variable-structure systems and its application to magnetic levitation systems* // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 1995. – Vol. 42, No. 3. – P. 281–289.
16. UTKIN V.I., GULDNER J., SHI J. *Sliding mode control in Electromechanical Systems*. – L. : Tailor and Francis, 2009.

ARTICLE TITLE, ROBUST CONTROL FOR ELECTROMAGNET ON THE BASE OF THE VORTEX ALGORITHM

Kochetkov Sergey, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior research worker (kos@ipu.ru).
Utkin Anton, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Cand.Sc., senior research worker (utkin-av@rambler.ru).
Utkin Victor, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Dr.Sc., main research worker (vicutkin@ipu.ru).

Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-93-21.

Abstract: *In the paper the vortex control algorithm is designed for electromagnet in the tracking problem. The main feature of the vortex algorithms is invariance property to unmatched external disturbances of the wide class. It shown that designed algorithms provide asymptotical convergence output variables under influence of parametrical (unknown mass, active resistance of coil and so on) and external disturbances. Simulation results show the efficiency of the proposed procedure.*

Keywords: magnetic levitation system, vortex algorithm, parametrical disturbances.

электромагнитный подвес, вихревые алгоритмы, параметрические неопределенности.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором…

Поступила в редакцию ...заполняется редактором…
Опубликована ...заполняется редактором…