

УДК 519.213.2
ББК 22.172

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ

Олейникова С.А.¹

*(Воронежский государственный технический универси-
тет, Воронеж)*

*Статья посвящена анализу недостатков метода PERT, кото-
рый предназначен для оценки длительности выполнения работ
в задачах управления проектами, а также модификации данно-
го метода, позволяющей получить оценки, отличающиеся
повышенной точностью по сравнению с существующими ана-
логами.*

Ключевые слова: математическое ожидание, бета-
распределение, PERT.

1. Введение

Рассматривается задача управления проектами со случай-
ной длительностью выполнения операций. Наличие точных
оценок времени выполнения каждой из взаимосвязанных работ,
определяющих проект, позволит приблизить фактический гра-
фик выполнения работ к планируемому, и, как следствие, мини-
мизировать возможные риски, связанные с невыполнением
проекта в заданный срок. В связи с этим, получение таких оце-
нок является актуальной и практически значимой задачей. Ос-
новным подходом для получения оценок времени выполнения
работ является метод PERT (Program Evaluation and Review

¹ Светлана Александровна Олейникова, кандидат технических наук,
доцент (osa@vmail.ru).

Technique) [1]. Он (как и некоторые другие подходы) при получении оценки длительности основывается на двух предположениях [4]. Первое заключается в предположении о бета-распределении случайной величины, описывающей длительность выполнения операций. Второе предполагает, что стандартное отклонение равно шестой части размаха данного распределения. Однако, некоторые другие методы, изначально основываясь на тех же предположениях, в результате получили другие оценки длительности обслуживания. В связи с этим возникает необходимость анализа данных предположений с целью выбора наиболее оптимального способа оценки длительности операций.

2. Анализ метода PERT

Поскольку длительность работ является случайной величиной, то оценка значения этой величины будет в наибольшей степени влиять на соответствие реального графика запланированному и, как следствие, на оптимальность работы всей системы. Для оценки времени выполнения операций, как правило, требуются данные о следующих параметрах:

- наименьшем времени обслуживания a ;
- наибольшем времени обслуживания b ;
- наиболее вероятном времени обслуживании (моде) m .

Метод PERT является одним из самых распространенных способов для планирования работ со случайной длительностью обслуживания. Как было сказано ранее, он основывается на следующих предположениях:

1. Закон распределения длительности обслуживания определяется формулой [2]:

$$(1) \quad f_{\xi}(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1} B(p,q)}, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t < a, t > b. \end{cases}$$

2. Стандартное отклонение случайной величины равно шестой части размаха:

$$(2) \quad \sigma^* t = \frac{b-a}{6}.$$

В этом случае он оценивает длительность выполнения отдельной операции с помощью формулы:

$$(3) \quad M^* \xi = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

Рассмотрим предположения данного подхода более подробно. Бета-распределение – это наиболее универсальный способ описания непрерывной случайной величины, обладающей свойством одномодальности, плотность распределения которой имеет две точки пересечения с осью абсцисс [1]. Варьируя параметрами p и q , можно описать различные особенности поведения случайной величины (от случая равномерного закона, когда любое время выполнения некоторой работы в интервале $[a, b]$ равновероятно, до случая с ярко выраженной модой). Поэтому в случае, если возможно оценить наименьшее и наибольшее время выполнения данной работы, бета-распределение является наиболее универсальным способом описания длительности обслуживания. Предположение (2) возникло в силу неравенства Чебышева и правила трех сигм.

Для анализа формулы (3) определим математическое ожидание бета-величины через моду. В общем случае формула математического ожидания бета-распределения имеет вид [2]:

$$(4) \quad M\xi = a + (b-a) \frac{p}{p+q}.$$

С учетом того, что мода бета-распределения определяется формулой [2]:

$$(5) \quad m = a + (b-a) \frac{p-1}{p+q-2},$$

несложно показать, что

$$(6) \quad M_{\xi} = \frac{a + b + m(p + q - 2)}{p + q}.$$

Сравнив полученное равенство (6) и оценку (3), можем сделать вывод о том, что данная оценка получена в случае, когда $p+q=6$.

Основываясь на предположении (2), выпишем значение дисперсии:

$$(7) \quad D_{\xi} = \frac{(b - a)^2}{36}.$$

С другой стороны, дисперсия бета-распределения может быть определена формулой [2]:

$$(8) \quad D_{\xi} = \frac{(b - a)^2 pq}{(p + q)^2 (p + q + 1)}.$$

Таким образом, с учетом формул математического ожидания, моды и дисперсии бета-распределения, все его предположения можно свести к следующей системе:

$$(9) \quad \begin{cases} M_{\xi} = a + (b - a) \frac{p}{p + q} \\ m = a + (b - a) \frac{p - 1}{p + q - 2} \\ \frac{pq}{(p + q)^2 (p + q + 1)} = \frac{1}{36} \\ p + q = 6 \end{cases}$$

В системе (9) известными являются a , b и m , а неизвестными - M_{ξ} , p и q . Таким образом, получили систему из четырех уравнений для нахождения трех неизвестных. Очевидно, что данная система будет избыточной. В частности, в [3, 6] показано, что данная система будет справедлива лишь для двух значений моды:

$$(10) \quad m = \frac{a + b}{2} \pm \frac{b - a}{4} \sqrt{2}.$$

Таким образом, в системе (9) необходимо оставить лишь три уравнения. Из четырех уравнений два уравнения основаны на характеристиках бета-распределения, и поэтому не вызывают сомнений. Остальные два уравнения являются предположениями данного подхода.

Исходя из этого, при планировании работ на основе метода PERT могут возникнуть погрешности, которые можно классифицировать следующим образом:

- погрешности, вызванные неточностью оценок a , b и m ;
- ошибки, вызванные допущением о распределении (1) длительности обслуживания;
- ошибки, возникающие из-за предположения о нормальности распределения случайной величины, определяющей длительность проекта;
- погрешности, возникающие из-за неточности оценок (2) и предположения (3).

При этом первые три группы погрешностей можно минимизировать, имея результаты фактического и запланированного расписания за прошедшие периоды (выборочные значения о длительности выполнения работ). Рассмотрим более подробно оценку метода PERT (3) и, по возможности, улучшим эту оценку.

3. Оценка длительности обслуживания заявок

Для получения математического ожидания бета-распределения исключим все предположения и будем основываться только на формулах, описывающих числовые характеристики данного закона и моду.

Оставив в системе (9) только первые два уравнения, выразим параметры p и q через моду и математическое ожидание. Получим следующие выражения:

$$(11) \quad p = \frac{(M\xi - m)(M\xi - a)}{(b - a)(b - 2m + a)}.$$

$$(12) \quad q = \frac{(M\xi - m)(b - M\xi)}{(b - a)(b - 2m + a)}.$$

Подставив значения (11) и (12) в формулу (8), получим [5]:

$$(13) \quad D\xi = \frac{(b - M\xi)(M\xi - a)(M\xi - m)}{a - 3m + b + M\xi}.$$

Обозначим неизвестное математическое ожидание в (13) через x и перепишем это уравнение следующим образом:

$$(14) \quad x^3 - x^2(b + m + a) + x(am + bm + ab + D\xi) - abm + (a - 3m + b)D\xi = 0.$$

Найдем аналитическое решение данного уравнения при известной дисперсии $D\xi$. Для этого приведем уравнение (14) к каноническому виду:

$$(15) \quad y^3 - qy - r = 0$$

Это можно сделать с помощью замены переменных:

$$(16) \quad y = x + \frac{a + b + m}{3}.$$

Несложно показать, что при этом

$$(17) \quad q = -\frac{ab + am + bm + D\xi - (a + b + m)^2}{3},$$

а

$$(18) \quad r = -\frac{-2(a + b + m)^3 + 9(a + b + m)(ab + am + bm + D\xi) - abm + (a - 3m + b)D\xi}{27}$$

Для анализа числа корней уравнения (15), найдем значение следующего выражения:

$$(19) \quad Q = 27r^2 - 4q^3.$$

В случае, если Q положительно, уравнение (15) имеет один вещественный и два комплексно сопряженных корня, а отрицательное значение Q говорит о наличии трех вещественных корней [7].

Рассмотрим выражение (19) как функцию, зависящую от дисперсии. Найдем значение дисперсии D^* , позволяющей отде-

лить случай, когда уравнение (15) будет иметь три корня от случая единственного вещественного корня. Без ограничения общности, экспериментальным путем было получено, что при значениях параметров $a=0$ и $b=1$ такое значение будет равно 0,0925. Если дисперсия превышает данное значение, то уравнение (15) будет иметь единственный вещественный корень, а два – комплексно сопряженные; если дисперсия меньше найденного значения, то получим три вещественных корня. В силу того, что предположения PERT определяют значение дисперсии, равное 0,0278, можно рассматривать случай трех вещественных корней. Очевидно, что это предположение можно распространить на любой интервал $[a,b]$.

Для нахождения корней необходимо определить следующее вспомогательное значение [7]:

$$\varphi = \arccos \left\{ \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3} \cdot \frac{r}{\sqrt{q^3}} \right\}.$$

В этом случае корни будут находиться по формулам [7]:

$$(20) \quad \begin{cases} y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{q} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \\ y_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{q} \cdot \cos \frac{\pi - \varphi}{3}; \\ y_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{q} \cdot \cos \frac{\pi + \varphi}{3} \end{cases}$$

Добавив к полученным корням значение $-(a+b+m)/3$, получим корни исходного уравнения (14).

Следующим этапом является выявление единственного из трех корней уравнения (14), определяющего значение математического ожидания бета-распределения. Для этого, проведем следующим вычислительный эксперимент. Последовательно изменяя моду m от 0 до 1 с шагом 0.1, вычислим значения каждого из трех корней для этой моды и сравним их с точным значением математического ожидания. В уравнении (14) в качестве

в качестве дисперсии возьмем оценку (7). Результаты эксперимента приведены в следующей таблице.

Таблица 1. Результаты эксперимента

Мода	Корень 1	Корень 2	Корень 3	Мат. Ож.
0.1	-0.0851	0.9425	0.2425	0.2424
0.2	-0.04	0.9471	0.2929	0.2929
0.3	-0.0082	0.953	0.3552	0.3552
0.4	0.0136	0.9608	0.4256	0.4256
0.5	0.0286	0.9714	0.5	0.5
0.6	0.0392	0.9864	0.5744	0.5744
0.7	0.047	1.0082	0.6448	0.6448
0.8	0.0529	1.04	0.7071	0.7071
0.9	0.0575	1.0851	0.7575	0.7576

Таким образом, математическое ожидание бета-распределения определяется с помощью формулы:

$$(21) \quad M\xi = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{q} \cdot \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3} \cdot \frac{r}{\sqrt{q^3}} \right) + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{a+b+m}{3}$$

Здесь q и r определяются формулами (17) и (18) соответственно.

Формула (21) и является оценкой длительности обслуживания в задачах управления проектами.

Приведем также способ вычисления математического ожидания в случае, если дисперсия выборки будет превышать пороговое значение 0.0925 (для произвольного бета-распределения в интервале $[a,b]$ $0.0925(b-a)^2$). В этом случае уравнение (14) имеет единственный вещественный корень, который будет соответствовать математическому ожиданию и определяться по формуле [7]:

$$(22) \quad M\xi = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}}$$

Формула (21) (или формула (22) в случае большой дисперсии) дает ряд преимуществ по сравнению с оценкой математического ожидания, предложенной в методе PERT. Во-первых, выражение (21) является не оценкой математического ожидания бета-распределения, а его точным значением. С учетом того, что само математическое ожидание является оценкой длительности обслуживания, очевидно, что его точное значение повысит точность полученных результатов. Во-вторых, в данном случае предложена оценка для любой дисперсии. Поскольку метод PERT использовал предположение о среднеквадратическом отклонении, основанном на неравенстве Чебышева и правиле трех сигм, то можно утверждать, что выражение (21) является с этой точки зрения более универсальной формулой, позволяющей оценивать длительность обслуживания при любом значении дисперсии. Научная значимость полученного результата заключается в возможности определения математического ожидания бета-величины через дисперсию и моду, не зная параметров данного распределения.

4. Выводы

В ходе работы получены следующие результаты:

1. Был проанализирован метод PERT. В частности, было показано, что оценки метода получены из системы, которая является избыточной. При наличии всех допущений метода его оценки будут справедливы лишь для двух значений моды, определенных формулой (10).
2. Получено кубическое уравнение, позволяющее найти истинное значение математического ожидания на основе моды и дисперсии. Это уравнение определяется формулой (14).
3. Проведен анализ значений показателя, влияющего на количество корней уравнения (14) в зависимости от значений

дисперсии. В результате был сделан вывод о случае трех вещественных корней.

4. Экспериментальным путем был определен единственный из трех корней (14), соответствующий значению математического ожидания. Таким образом, была получена формула, определяющая математическое ожидание бета-распределения через моду и дисперсию данного закона. Эта формула и является аналитической оценкой длительности обслуживания в задачах управления проектами.

Литература

1. ГОЛЕНКО Д.И. *Статистические методы сетевого планирования и управления*. М.: Наука, 1968. – 400 с.
2. КОБЗАРЬ А.И. *Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников*-М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
3. ОЛЕЙНИКОВА С. А. *Обобщение метода для оценки длительности работ в задачах сетевого планирования и управления* // Вестник Воронежского государственного технического университета, 2009. – Том 4 (№11). – С. 18-21.
4. ОЛЕЙНИКОВА С. А. *Сравнительный анализ подходов для оценки ожидаемого времени обслуживания в задачах сетевого планирования и управления*//Системы управления и информационные технологии, 2009. – № 2(36). – С. 50–53.
5. ОЛЕЙНИКОВА С. А. *Численная оценка времени обслуживания в задачах сетевого планирования и управления*// Вестник Воронежского государственного технического университета, 2009. – Том 5 (№3). – С. 111-115.
6. ОЛЕЙНИКОВА С. А. *Подходы к описанию длительности выполнения проекта в задачах сетевого планирования и управления*// Новые технологии в научных исследованиях, проектировании, управлении, производстве: труды Всерос. конф. Воронеж: ГОУВПО «ВГТУ», 2009. - С. 72-73.

7. УИТТЕКЕР Э. *Математическая обработка результатов наблюдений*/ Э. Уиттекер, Г. Робинсон. ОНТИ, Ленинград – Москва, 1935. - 364 с.

ANALYTICAL EVALUATION OF THE SERVICE TIME IN THE TASKS OF PROJECT MANAGEMENT

Svetlana Oleynikova, Voronezh State Technical University,
Cand.Sc., assistant professor (osa@vmail.ru).

Abstract: The article analyzes the shortcomings of the method PERT, which is designed to evaluate the duration of the works in the tasks of project management, and modification of this method which provides estimates characterized improved accuracy compared to existing analogous.

Keywords: average of distribution, beta-distribution, PERT.