

УДК 519.714.2

ББК 32.965.5

## АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ПЕРЕХОДОМ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ВХОДОВ-ВЫХОДОВ В ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ

Гусев С. С.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматривается алгоритм идентификации статического объекта с ограничениями. Предлагается случай, когда ошибка измерения выхода объекта у приводит к выходу оценок параметров за область допустимых оценок параметров  $H$  только с некоторой вероятностью  $p$  для всех  $n$ -мерных блоков и случай больших ошибок, когда вероятность строго равна нулю. Проводится анализ связи ошибки и вероятностей с использованием формулы Крамера.*

Ключевые слова: идентификация, ограничения, статический объект, оценки параметров, ошибка измерения выхода.

### **1. Введение**

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта математической моделью и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов [4]. Работа не с самим объектом, а с его моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых си-

---

<sup>1</sup> Сергей Сергеевич Гусев, соискатель (gs-serg@mail.ru).

туациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента).

Наличие моделей и механизмов управления привлекательно как с точки зрения управляющего органа [5] – так как позволяет предсказать поведение управляемых субъектов, так и с точки зрения управляемых субъектов – так как делает предсказуемым поведение управляющего органа. То есть снижение неопределенности за счет использования механизмов управления является одним из существенных свойств любой организации как социального института.

Задача идентификации объекта управления заключается в определении структуры системы уравнений математического описания и значений её коэффициентов, которые обеспечивают наилучшее совпадение выходных переменных модели и процесса при одинаковых входных воздействиях. Процедура идентификации обеспечивает соответствие модели объекту.

Модели, построенные в процессе идентификации объектов, могут быть использованы для разных целей. На практике чаще всего модели используются или для прогноза выхода объекта на некоторое время вперед, или для расчета контура управления. В первом случае от модели требуется небольшая ошибка прогноза, во втором – «хорошие» оценки параметров управляемого объекта. Второе требование гораздо жестче. Получить хороший прогноз намного легче, чем точные оценки параметров. Основная причина такого положения – критерии идентификации. Широко используемый на практике среднеквадратический критерий полностью адекватен задаче минимизации ошибки прогноза. При этом оценки параметров могут быть и плохими. Для решения задачи получения точных оценок при среднеквадратическом критерии идентификации необходимо ввести дополни-

тельные требования к входным сигналам и распределениям помех.

На практике неизвестный объект редко бывает «черным ящиком». В большинстве случаев имеется априорная информация о свойствах объекта, которая следует из физических, технических, технологических и других условий. Эта информация существенно сужает область поисков неизвестных параметров. Например, если заранее известно, что объект устойчив, а применительно к технологическим процессам это почти всегда так, то параметры объекта могут лежать только в определенной области устойчивости. То же самое относится и к входным переменным. Обычно из опыта эксплуатации конкретного объекта известно, что коэффициенты усиления по входным переменным ограничены в каких-то пределах, как было описано выше в задаче идентификации объекта управления.

Если используется какая-либо известная процедура идентификации, например метод наименьших квадратов (МНК), в результате которой по экспериментальным данным о входах и выходе объекта получены оценки его параметров, то можно проверить соответствие оценок априорным ограничениям объекта управления. То есть проверка производится после идентификации. МНК – математический метод, применяемый для решения задач, основанный на минимизации суммы квадратов некоторых функций от искомым переменных [8].

Качество идентификации объекта управления в большей степени определяет и качество управления сложным объектом. Большую роль при этом играет учет априорной информации о структуре и параметрах объекта. В статье исследуется работа специального алгоритма идентификации, учитывающего определенную информацию о параметрах. Исследуется работа алгоритма при наличии помехи при измерении выхода. Анализируется связь точности идентификации и величины ошибки измерения.

В работе предпринимается попытка встроить проверку оценок в сам алгоритм идентификации. До недавнего времени

такие проверки невозможно было использовать из-за недостаточной мощности вычислительных машин.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим алгоритм идентификации, учитывающий априорную информацию о параметрах объекта. Будем рассматривать объект вида

$$(1) \quad y = xh^T,$$

где  $y$  – скалярный выход объекта,  $x$  – вектор-строка входных переменных размерности  $n$ ,  $h$  – вектор-строка неизвестных параметров объекта тоже размерности  $n$ . Дополнительно об объекте (1) известно, что параметры  $h$ , принадлежат априорно известной области  $H$ , т.е.

$$(2) \quad h \in H.$$

Задача состоит в том, чтобы по экспериментальным данным, заданным в виде матрицы

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & y_1 \\ 2 & x_{22} & x_{22} & \dots & x_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i & x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} & y_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s & x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} & y_s \end{pmatrix},$$

определить оценки параметров  $h$  с учетом условия (2). Критерием точности определения оценок параметров объекта является известная область принадлежности параметров  $h$ .

## 3. Алгоритм идентификации

Из матрицы исходных экспериментальных данных (3) выделим матрицу входов размеров  $n \times s$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} \end{pmatrix}$$

и матрицу выхода  $1 \times s$

$$Y^T = \|y_1, y_2 \dots y_s\|.$$

Алгоритм идентификации, подробно описанный в [1], состоит в следующем. Из матрицы исходных данных (3) выбираются блоки из произвольных  $n$  строк (по размерности объекта). Для каждого блока составляется своя система уравнений. Ниже приведена система уравнений, соответствующая первому из таких блоков

$$\begin{aligned} k_1 x_{11} + k_2 x_{12} + \dots + k_n x_{1n} &= y_1 \\ k_1 x_{21} + k_2 x_{22} + \dots + k_n x_{2n} &= y_2 \\ &\dots \\ k_1 x_{n1} + k_2 x_{n2} + \dots + k_n x_{nn} &= y_n \end{aligned},$$

где  $k$  – оценки параметров объекта  $h$ , или в матричном виде

$$Xk^T = Y.$$

Произведя умножение левой и правой частей этого равенства слева на  $X^T$ , получим систему нормальных уравнений

$$X^T X k^T = X^T Y,$$

по которой с помощью МНК вычисляются оценки параметров объекта (1).

Из матрицы (3) можно получить  $C_s^n$  таких  $n$ -мерных блоков, для каждого из которых строится свой вектор оценок параметров объекта (1). Все эти оценки параметров собраны в матрицу  $B$ , содержащую  $C_s^n$  строк и  $2n$  столбцов и имеющую вид

$$(4) \quad B = \left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{L1} & a_{L2} & \dots & a_{Ln} & k_{L1} & k_{L2} & \dots & k_{Ln} \end{array} \right\|,$$

где  $L = C_s^n$ .

В любой  $i$ -ой строке матрицы  $B$  в первых  $n$  позициях перечислены номера строк  $a_{ij}$  матрицы  $A$ , использованные для вычисления  $n$  оценок  $k_{ij}$ , вычисленных по этим строкам и расположенных в (4) в  $i$ -ой строке на последних  $n$  позициях. Априорное условие (2) учитывается путем вычеркивания из (4) всех строк, в которых оценки  $k$  не удовлетворяют условию

$$k_i \in H,$$

где

$$k_i = \|k_{i1} \quad k_{i2} \quad \dots \quad k_{in}\|, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

В результате вычеркивания получается матрица

$$B_0 = \left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} & k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nn} \end{array} \right\|,$$

$$k_i \in H,$$

где  $N \leq L$ .

Введем вектор частоты  $w$ , размерности  $s$ , имеющий вид

$$w^T = \|w(1) \quad w(2) \quad \dots \quad w(s)\|,$$

где  $w(j)$  - частота использования номера  $j$ -ой строки матрицы  $A$  в матрице  $B_0$ .

Введем новую матрицу  $F$ , отличающуюся от  $A$  тем, что в нее добавлен столбец, включающий вектор  $w$

$$(5) \quad F = \left\| \begin{array}{cccccc} w(1) & 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & y_1 \\ w(2) & 2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w(s) & s & x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} & y_s \end{array} \right\|.$$

Последний шаг алгоритма состоит в следующем. Строки матрицы  $F$  сортируются по первому столбцу так, чтобы значения  $w(j)$  возрастали снизу вверх. Обозначим полученную таким образом матрицу через  $F_0$ .

Оператор, реализующий описанный алгоритм, обозначим через  $\Psi$ . Этот оператор преобразует матрицу исходных данных  $A$  в матрицу данных, отсортированную по частоте использования строк, в матрице  $B_0$ , учитывающей априорные условия  $k_i \in H$ . Это можно записать так

$$(6) \quad F_0 = \Psi\{A\} \quad k_i \in H.$$

Рассмотрим некоторые свойства оператора  $\Psi$ , позволяющие существенно увеличить точность идентификации, но для начала приведем сравнение приведенного алгоритма идентификации статического объекта с алгоритмом идентификации статического объекта работы [1].

В работе [1] алгоритм идентификации статического объекта состоит в следующем. Из матрицы исходных данных (3) выбираются блоки из произвольных  $n$  строк (по размерности объекта). Для каждого блока составляется своя система уравнений. Из матрицы (3) можно получить  $C_s^n$  таких  $n$ -мерных блоков, для каждого из которых строится свой вектор оценок параметров объекта (1). Все эти оценки параметров собраны в матрицу  $B$ , содержащую  $C_s^n$  строк и  $2n$  столбцов.

Отличительной особенностью приведенного выше алгоритма от алгоритма, описанного в работе [1] является наличие дополнительного вектора частоты  $w$ , по которому сортируются строки, представляя новую матрицу  $F$ , которая отличается от матрицы  $A$  тем, что в нее добавлен столбец, включающий вектор

частости  $w$ . Строки матрицы  $F$  сортируются по первому столбцу так, чтобы значения  $w(j)$  возрастали снизу вверх.

#### 4. Основные результаты

Докажем, что оператор  $\Psi$  преобразует матрицу исходных данных (3) таким образом, что данные с большими ошибками измерения с большой вероятностью оказываются внизу блока данных. Это позволяет отбросить часть данных с большими ошибками и использовать для идентификации только отфильтрованные данные.

Предположим, что входные переменные  $x$  измеряются без ошибок, а выход  $y$  - с ошибкой  $\varepsilon$ . Рассмотрим несколько основных случаев.

##### 4.1 БОЛЬШИЕ ОШИБКИ

Предварительно введем некоторые определения.

Будем называть ошибку измерения конкретного выхода  $y_i$  большой, если при использовании этого выхода в любом  $n$ -мерном блоке оценки  $k \notin H$ .

Докажем следующее утверждение.

*Теорема 1.* Если в блоке исходных данных (3) точно в  $m$  произвольных строках выход  $y$  измеряется с большой ошибкой, и выполняется условие  $s > n + m$ , то в результате использования оператора  $\Psi$  все строки с ошибкой окажутся внизу матрицы  $F_0$ , по верхним  $s - m - n$  строкам этой матрицы могут быть получены точные оценки параметров объекта (1).

Доказательство приведено в [3].

##### 4.2 ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим теперь случай, когда ошибка измерения выхода  $y$  приводит к выходу оценок за область  $H$  только с некоторой вероятностью  $p$  для всех  $n$ -мерных блоков, в который вошел этот выход  $y$ . Ранее, при больших ошибках, эта вероятность строго была равна единице.

Пусть среди всех  $s$  данных (3) только два произвольных измерения выхода сделаны с ошибкой. Для краткости будем называть  $n$ -мерных блок, не содержащий строки с ошибочными измерениями чистым, а содержащий – ошибочным. Ссылки на  $n$ -мерный блок и однозначно ему соответствующую строку в  $B$ , будем использовать одновременно.

Тогда имеет место следующая теорема.

*Теорема 2.* Если среди исходных данных (3) есть только два измерения выхода  $y_i$  и  $y_j$  сделанных с ошибками, которые приводят к выходу оценок за область  $H$  с вероятностью  $p_i$  и  $p_j$ , соответственно, и для определенности  $p_i > p_j$ , то в результате применения оператора  $\Psi$  в среднем будут выполняться неравенства

$$(7) \quad w(k) > w(j) > w(i), \quad k \neq i, \quad k \neq j.$$

*Доказательство.* Число всех возможных  $n$ -мерных блоков равно  $C_s^n$  и столько же строк в матрице  $B$ . Вычислим число строк матрицы  $B$ , содержащих 0, 1 и 2 ошибки, соответственно.

Не содержат ошибок

$$(8) \quad N_0 = C_{s-2}^n \text{ строк.}$$

При этом каждая из  $(s-2)$  чистых строк упоминается

$$(9) \quad N_{01} = \frac{n}{s-2} C_{s-2}^n = C_{s-3}^{n-1} \text{ раз.}$$

Содержит строку  $i$

$$(10) \quad N_i = C_{s-1}^{n-1}.$$

Грязная строка  $i$  в этом блоке упоминается все  $N_i$  раз

$$N_{i1} = C_{s-1}^{n-1},$$

Каждая чистая в этом блоке упоминается

$$N_{i01} = \frac{n-1}{s-1} C_{s-2}^{n-2}.$$

Содержит строку  $j$

$$(11) \quad N_j = C_{s-1}^{n-1}.$$

Содержит строки  $j$  и  $i$

$$(12) \quad N_{ij} = C_{s-2}^{n-2}.$$

Среднее число строк с одной ошибкой  $i$  или  $j$  или двойной ошибкой  $i, j$ , попавших в блок  $B_0$  (то есть в которых оценки не вышли за границы области  $H$ ) будет равно

$$(13) \quad N_{iq} = (1 - p_i)C_{s-1}^{n-1}, \quad N_{jq} = (1 - p_j)C_{s-1}^{n-1}.$$

$$(14) \quad N_{ij} = (1 - p_i)(1 - p_j)C_{s-2}^{n-2}.$$

Комбинируя формулы (5)-(14) вычислим средние частоты упоминания строк в матрице  $B_0$ .

Частота упоминания каждой чистой строки состоит из четырех компонент

$$N_{01} = C_{s-3}^{n-1} = \frac{n(s-n)(s-n-1)}{s(s-1)} C_s^n,$$

$$N_{0i} = (1 - p_i)C_{s-2}^{n-2} = (1 - p_i) \frac{n(n-1)}{s(s-1)} C_s^n,$$

$$N_{0j} = (1 - p_j) \frac{n(n-1)}{s(s-1)} C_s^n,$$

$$N_{0ij} = (1 - p_i p_j) \frac{n(n-1)(n-2)}{s(s-1)(s-2)} C_s^n.$$

Общая частота упоминания каждой чистой строки

$$N_{01} = \frac{n(n-1)}{s(s-1)} \left[ \frac{(s-n)(s-n-1)}{(n-1)} + (2 - p_i - p_j) + (1 - p_i p_j) \frac{(n-2)}{(s-2)} \right] C_s^n.$$

Частота упоминания строк с помехой  $i$  и  $j$

$$(15) \quad N_i = \frac{n(n-1)}{s(s-1)} \left[ (1 - p_i) + (1 - p_i p_j) \frac{n-2}{s-2} \right] C_s^n,$$

$$(16) \quad N_j = \frac{n(n-1)}{s(s-1)} \left[ (1 - p_j) + (1 - p_i p_j) \frac{n-2}{s-2} \right] C_s^n.$$

Чтобы частота упоминания чистых строк была больше частоты упоминания грязных строк, т.е. соблюдалось условие

$$N_i > N_j,$$

как следует из (15) и (16), должно соблюдаться условие

$$N_i = 1 - p_i > 1 - p_j = N_j$$

или  $p_j > p_i$ . Что доказывает требования теоремы.

Чтобы соблюдалось условие

$$N_{01} > N_i,$$

необходимо

$$N_{01} = \left[ \frac{(s-n)(s-n-1)}{(n-1)} + (2 - p_i - p_j) + (1 - p_i p_j) \frac{(n-2)}{(s-2)} \right] >$$
$$> (1 - p_i) + (1 - p_i p_j) \frac{(n-2)}{(s-2)}$$

$$N_{01} = \frac{(s-n)(s-n-1)}{(n-1)} + 2 - p_j > 1,$$

$$\frac{(s-n)(s-n-1)}{(n-1)} + 1 > p_j.$$

То есть всегда, когда  $s > n + 2$ .

Стоит подчеркнуть, что последовательность строк, задаваемая теоремой 2, выполняется только в среднем, а не в каждом конкретном случае.

## **5. Связь ошибки и вероятностей**

При реализации описанного алгоритма промежуточные оценки вычисляются по МНК с использованием формулы Крамера

$$k_i = \frac{|U_i|}{|U|}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $U = X^T X$  – определитель матрицы (3),  $U_i$  – определитель, который получается из определителя матрицы  $U$  заменой  $i$ -ого столбца столбцом свободных членов.

При наличии ошибок измерения выхода оценки можно представить в следующем виде [2]

$$k_j = \frac{|U_j|}{|U|} = h_j + \frac{|U_\varepsilon|}{|U|},$$

где  $U_\varepsilon$  - матрица, содержащая ошибку  $\varepsilon$  в  $j$ -ом столбце.

Или подробнее, ошибка определения оценки  $k$  будет определяться формулой

$$(17) \quad k_j = h_j + \varepsilon \frac{|B_{ij}|}{|U|},$$

где  $|B_{ij}|$  - минор матрицы  $U_j$ , не содержащий ошибок измерения выхода.

Ошибка оценки параметров

$$\Delta h_j = h_j - k_j$$

и ошибка измерения выхода  $\varepsilon$  связаны, как следует из (17), следующим образом.

$$\Delta h = -\varepsilon \frac{|B_{ij}|}{|U|}.$$

Вероятностное распределение ошибки определения параметра  $\Delta h$  будет иметь то же самое распределение, что и распределение ошибки измерения выхода с точностью до не зависящего от помехи коэффициента  $|B_{ij}|/|U|$ .

Если  $f(\varepsilon)$  - плотность вероятности распределения централизованной ошибки измерения выхода ( $M\{\varepsilon\} = 0$ ), то среднее значение ошибки определения параметра объекта будет определяться формулой

$$M\{\Delta h\} = - \int_{\varepsilon \in Q} f(\varepsilon) \varepsilon \frac{|B_{ij}|}{|U|} d\varepsilon$$

И, очевидно, будет равно нулю.

Дисперсия ошибки определения параметра будет равна

$$D\{\Delta h\} = - \int_{\varepsilon \in Q} f(\varepsilon) \varepsilon^2 \frac{|B_{ij}|^2}{|U|^2} d\varepsilon.$$

Рассмотрим случай, когда априорно известная область существования параметров  $H$  представляет собой параллелепипед с ребрами, параллельными осям в пространстве параметров. Ошибка измерения выхода имеет центрированное нормальное распределение  $N(0, \sigma)$ . Для оценок параметров используются блоки (типа (4)), в которых только один выход измеряется с ошибкой. Рассмотрим два блока данных отличающихся тем и только тем, что в одном случае ошибка измерения выхода имеет распределение  $N(0, \sigma_1)$ , а в другом  $N(0, \sigma_2)$ . Для определенности  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

Тогда имеет место следующее утверждение.

При прочих равных условиях, вероятность  $p_1$  выхода оценки  $k_j$  за границы области  $H$  в первом случае будет больше вероятности  $p_2$  выхода оценки  $k_j$  за границы области  $H$  во втором.

Доказательство непосредственно следует из рисунка.

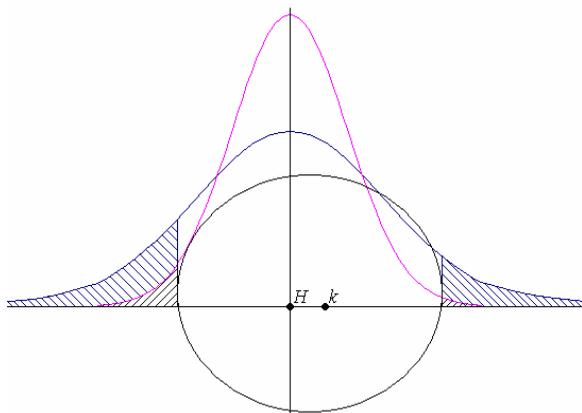


Рис. 1. Распределение ошибки оценки

Дисперсии ошибки измерения выхода  $\varepsilon$  и ошибки оценки  $\Delta h$  параметров связаны (в соответствии с (17)) коэффициентом

$$a = -\frac{|B_{ij}|}{|U|},$$

то есть дисперсии оценок  $\sigma_{1h}$  и  $\sigma_{2h}$  вычисляются через дисперсии ошибки измерения выхода по формулам

$$\sigma_{1h} = a\sigma_1$$

$$\sigma_{2h} = a\sigma_2$$

Плотность вероятности ошибки определения параметров при ошибке измерения выхода с параметрами  $N(0, \sigma_1)$  и  $N(0, \sigma_2)$  определяется формулами

$$f_1(k_1) = \frac{1}{\sigma_{1h} \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-k_1)^2}{2\sigma_{1h}^2}},$$

$$f_2(k_2) = \frac{1}{\sigma_{2h} \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-k_2)^2}{2\sigma_{2h}^2}}.$$

Поскольку априорная область существования оценок в обоих случаях одна и та же

$$h_{\min} < h_i < h_{\max},$$

то для вычисления вероятностей необходимо выполнять интегрирование то же в одинаковых пределах.

Вероятности выхода оценок за область  $H$  задаются формулами

$$p_1 = 1 - \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f_1(k_1) dh, \quad p_2 = 1 - \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f_2(k_2) dh.$$

## 6. Пример идентификации статического объекта

### 6.1 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для примера рассмотрим статический объект с тремя входами [1]. Структура модели, которая считается известной, задается уравнением

$$(18) \quad y_i^* = ax1_i + bx2_i + cx3_i, \quad (i=1, 2, \dots, 9).$$

Исходные данные приведены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные для идентификации трехмерного объекта

No	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	1	2	3	11
2	1	1	4	9
3	1	5	3	15
4	2	2	3	14
5	2	6	1	11
6	3	2	2	15
7	1	0	3	6
8	1	3	1	8
9	0	0	7	7

Заранее известно, что оценки параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  лежат в пределах

$$(19) \quad 0 < a < 2; \quad -1 < b < 0; \quad 0 < c < 1,4.$$

Необходимо по данным 9 экспериментов получить оценки параметров модели (18), учитывая априорную информацию о неизвестных параметрах  $a$ ,  $b$  и  $c$ , содержащуюся в неравенствах (19), и оценить точность полученных оценок.

### 6.2 МНК ОЦЕНКИ БЕЗ УЧЕТА АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Прежде чем использовать алгоритм, учитывающий априорную информацию, вычислим оценки параметров модели (18) с помощью обычной процедуры метода наименьших

квадратов. В результате получим следующие значения оценок параметров по 9 экспериментам

$$\hat{a} = 0,18 \pm 0,33; \quad \hat{b} = 0,29 \pm 0,41; \quad \hat{c} = 0,78 \pm 0,23.$$

Множественный коэффициент корреляции для такой модели будет равен  $R^2 = 0,83$ . Эти результаты используем в дальнейшем для сравнения с методом идентификации, учитывающим априорную информацию. Множественный коэффициент корреляции используется для исследования тесноты взаимосвязи между одним показателем и некоторым набором других показателей [6, 7].

### 6.3 ПЕРЕХОД В ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ

Поскольку нам задан трехмерный объект, то для получения какой-либо оценки требуется не менее трех экспериментов, то есть трех строк из таблицы 1. Используя все возможные комбинации из 9 по 3 получим 84 оценки, вычисленные по разным сочетаниям трех строк из таблицы исходных данных. На рис. 2 показана схема отбора трехстрочных блоков из блока исходных данных.



16

Рис. 2. Схема отбора трехстрочных блоков из блока исходных данных

Для вычисления одного вектора оценок необходимо отобрать не менее трех строк. На рисунке выбираются 2, 6 и 8 строки из блока исходных данных.

Все данные о промежуточных оценках сведены в таблицу 2. Таблица содержит 84 строки оценок параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  и номера строк блока исходных данных, которые были использованы для получения оценок в данной строке. Все полученные 84 оценки сведены в блок промежуточных оценок, показанный в таблице 2.

Таблица 2. Полный блок промежуточных оценок

No	Оценки параметров			Номера выбранных строк			Ind
	$a$	$b$	$c$	$n1$	$n2$	$n3$	
1	10	1,3	2	1	2	3	1
2	4	2,6	0,6	1	2	4	1
3	-18	7	5	1	2	5	1
...	...	...	...	...	...	...	
$i$	3,5	1,1	1,1	2	6	8	1
...	...	...	...	...	...	...	
84	3	1,3	1	7	8	9	1

Для учета априорных ограничений нужно из таблицы 2 удалить строки, в которых содержатся оценки, не удовлетворяющие ограничениям (19). Выполнив это удаление, получим усеченный блок промежуточных оценок, фрагмент которого приведен в таблице 3.

Таблица 3. Усеченный блок промежуточных оценок

No	Оценки параметров			Номера выбранных строк		
	$a$	$b$	$c$	$n1$	$n2$	$n3$
1	0,73	-0,56	1,03	1	2	3
2	0,68	-0,52	1,02	1	2	4
3	0,72	-0,55	1,03	1	2	5
...	...	...	...	...	...	...
$i$	0,73	-0,57	1,01	2	6	9
...	...	...	...	...	...	...
35	0,72	-0,53	1,03	7	8	9

В таблице 3 содержатся только оценки, удовлетворяющие априорным ограничениям (14). Номера строк исходных данных, по которым вычислялись эти «хорошие» оценки записаны в трех последних столбцах таблицы 3. На рис. 3 приведены гистограммы частоты использования разных строк блока исходных данных.

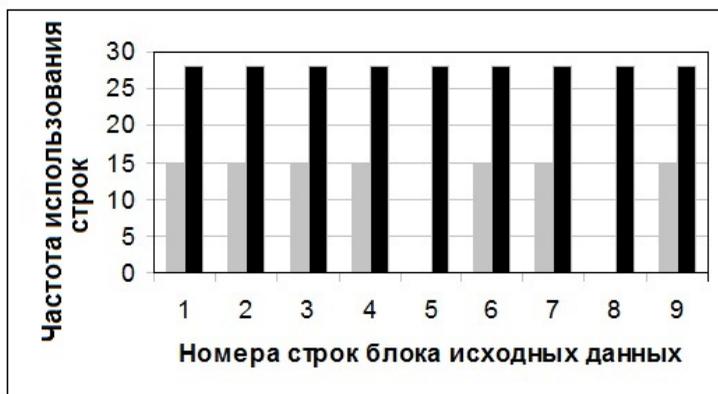


Рис. 3. Гистограммы частоты использования разных строк блока исходных данных; черные прямоугольники в полном блоке промежуточных оценок, серые - в усеченном блоке

Как видно из рис. 3, в полном блоке промежуточных оценок (черные прямоугольники) все строки блока исходных данных

используются одинаковое число раз, а именно 28. Совершенно другая картина в усеченном блоке промежуточных оценок, хранящем только «хорошие» оценки, удовлетворяющие условиям (19).

Серые прямоугольники, соответствующие усеченному блоку, имеют разную высоту. Строки 1-4, 6,7 и 9 используются по 15 раз, а строки 5 и 8 не используются совсем. Естественно предположить, что для получения «хороших» оценок, удовлетворяющих априорным условиям, использовались менее зашумленные исходные данные. Если принять эту гипотезу, то следует из блока исходных данных удалить те строки, которые редко используются.

#### *6.4 ВОЗВРАЩЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВО ИСХОДНЫХ ДАННЫХ*

После удаления 5 и 8 строки блок исходных данных примет вид таблицы 4.

*Таблица 4. Блок исходных данных, в котором удалены малоинформативные строки 5 и 8*

УСЕЧЕННЫЙ БЛОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ				
No	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	1	2	3	11
2	1	1	4	9
3	1	5	3	15
4	2	2	3	14
5	2	6	1	11
6	3	2	2	15
7	1	0	3	6
8	1	3	1	8
9	0	0	7	7

Проведем определение параметров модели (18) методом наименьших квадратов, используя данные из усеченной таблицы данных 3.

В результате получим следующие значения оценок параметров по 7 экспериментам

$$\hat{a} = 0,72 \pm 0,0099; \quad \hat{b} = -0,53 \pm 0,0149; \quad \hat{c} = 1,01 \pm 0,0066.$$

Множественный коэффициент корреляции для такой модели будет равен  $R^2 = 0,999910$ . Сравнивая эти результаты с идентификацией по 9 экспериментам, видим, что точность оценок резко увеличилась.

В заключение заметим, что истинные значения параметров объекта были равны

$$a = 0,7; \quad b = -0,5; \quad c = 1.$$

## **7. Алгоритмы идентификации класса статических объектов управления**

### **7.1. ПРИМЕР АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ КЛАССА СТАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ**

Примером исследуемого алгоритма идентификации для класса статических объектов будет служить метод идентификации статического объекта работы Чадеева–Илюшина, приведенный в работе [1].

В работе [1] рассматривается алгоритм идентификации по вероятностному критерию. Исходные экспериментальные данные из пространства входов-выходов преобразуются в пространство оценок параметров. В пространстве параметров [1] выделяется множество оценок, удовлетворяющих априорным ограничениям. На этом множестве по вероятностному критерию строятся оценки параметров. Приводится пример, иллюстрирующий эффективность предлагаемой процедуры, учитывающей априорную информацию о параметрах.

## *7.2. СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМА СТАТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ПЕРЕХОДОМ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ВХОДОВ-ВЫХОДОВ В ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ С ПРИВЕДЕННЫМ АЛГОРИТМОМ ДЛЯ ДАННОГО КЛАССА ОБЪЕКТОВ*

Отличительной особенностью выбранного для сравнения алгоритма Чадеева–Илюшина работы [1] с алгоритмом идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров является то, что алгоритмы схожи по своей структуре и математическому описанию, за исключением отсутствия вектора частоты  $w$  (частоте упоминания строк) в алгоритме Чадеева–Илюшина по сравнению с алгоритмом идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров. Вектор-столбец частоты  $w$  в алгоритме идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров позволяет структурировать матрицу с исходными данными по частоте упоминания строк, что позволяет отсеивать нижние строки матрицы, которые являются малоинформативными, тем самым сокращая число строк в матрице, количество всевозможных переборов из оставшихся строк в усеченной матрице и, соответственно, сокращает время перебора «хороших» строк. Этой положительной особенностью не обладают другие алгоритмы идентификации статических объектов. Можно сказать, что алгоритм идентификации статических объектов управления является своего рода продолжением развития алгоритма Чадеева–Илюшина класса статических объектов. Поэтому излагать математические итерации алгоритма Чадеева–Илюшина, подобные тем, которые приведены в статье для алгоритма идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров, нет смысла, так как результаты расчетов будут отличаться только отсутствием вектора частоты  $w$  алгоритма Чадеева–Илюшина работы [1]. Использование алгоритма идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров на практике показывает, что автор настоящей статьи, разработавший данный

алгоритм идентификации для класса статических объектов, внес изменения в класс статических объектов. Единственным фактором алгоритма идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров является наличие вектора частоты  $w$ , которая позволяет существенно увеличить точность расчета оценки параметров объекта управления путем отсеивания малоинформативных строк. Эти небольшие изменения в алгоритме идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров, во-первых, отличают его от других алгоритмов класса статических объектов управления, а во-вторых, позволяют получать более точные оценки параметров объекта управления. Это позволяет обеспечить получение более точного значения множественного коэффициента корреляции для объекта управления и существенно повысить его быстродействие.

Научную новизну и практическую ценность [9] настоящей работы, обусловленные сравнительным результатом обоих алгоритмов, определяет:

- введение вектора частоты  $w$ , позволяющего отсеивать малоинформативные строки [9], тем самым сокращая время перебора строк блока преобразованных исходных данных статического объекта управления;
- увеличение точности расчета оценок параметров статических объектов управления;
- практическое применение алгоритма идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров;
- математическая простота [9] использования математического аппарата на практике применительно к статическим объектам управления.

### *7.3 ВЫВОДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИССЛЕДОВАНИЯ*

Результаты исследований уже существующих алгоритмов идентификации для класса статических объектов управления с алгоритмом идентификации статического объекта с переходом

из пространства входов-выходов в пространство параметров показывают, что разработанный алгоритм идентификации для класса статических объектов управления показывает лучшие результаты в увеличении точности расчета оценок параметров статических объектов управления, определении множественного коэффициента корреляции [9] и других характерных показателей для данного класса объектов. Алгоритм идентификации статического объекта с переходом из пространства входов-выходов в пространство параметров подходит для решения задач, связанных с классом статических объектов. Результат очевиден.

## **8. Заключение**

В работе рассмотрен алгоритм идентификации статического объекта, учитывающий априорную информацию о его параметрах. Алгоритм преобразовывал блок исходных данных в множество блоков меньшей размерности. Для каждого из этих блоков вычислялись оценки параметров объекта и запоминались номера строк, использованных для вычисления этих оценок. Оператор, реализующий описанный алгоритм, преобразовывал матрицу исходных данных в специальную матрицу, учитывающую частоту попадания оценок в область  $H$ . При этом рассматривался объект, в котором входные переменные измерялись без ошибки, а выходные – с ошибкой.

Также проведен анализ связи ошибки измерения выхода с вероятностью выхода оценок параметров за априорно известную область существования параметров объекта.

## **Литература**

1. ЧАДЕЕВ В.М., ИЛЮШИН В.Б. *Метод идентификации, учитывающий априорную информацию о параметрах объекта* // Труды V Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '06. Москва,

- 30 января – 2 февраля 2006 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006. С. 1091-1105.
2. РАЙБМАН Н.С., ЧАДЕЕВ В.М. *Построение моделей процессов производства*. М., «Энергия», 1975. – 376 с.
  3. ЧАДЕЕВ В.М., ГУСЕВ С.С. *Идентификация с ограничениями. Определение оценок параметров статического объекта* // Труды VII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '08. Москва, 28 - 31 января 2008 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2008. С. 261-269.
  4. САМАРСКИЙ А.А., МИХАЙЛОВ А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
  5. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: Московский психолого-социальный институт, 2005. – 584 с.
  6. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Изд-во 2, стерео., 1975. – 648 с.
  7. КЕНДАЛЛ М.Дж., СТЬЮАРД А. *Статистические выводы и связи*. – М.: Изд-во Наука, 1973. – 896 с.
  8. ЛИННИК Ю.В. *Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений*. – М.: Изд-во Физматгиз, 1962. – 349 с.
  9. ГУСЕВ С.С. *Построение модифицированного алгоритма идентификации динамического объекта управления по экспериментальным данным ядерной энергетической установки* // Управление большими системами. Выпуск 47. М.: ИПУ РАН. 2014. С. 167-186.

## **ALGORITHM FOR THE IDENTIFICATION OF A STATIC OBJECT WITH THE TRANSITION FROM THE SPACE OF INPUT-OUTPUT IN THE PARAMETER SPACES**

**Sergey Gusev**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, per-  
graduated ([gs-serg@mail.ru](mailto:gs-serg@mail.ru)).

Рубрика Сборника (окончательно выбирается редактором)

*Abstract: An algorithm for identification of a static object with restrictions. Features case when the measurement error output object  $y$  leads to the release of estimates of parameters for the region of admissible parameters estimates  $H$  only with a certain probability  $p$  for all  $n$ -dimensional blocks and a case of large errors when the probability is strictly equal to zero. Analysis of uncertainties and probabilities using Cramer's formulas.*

Keywords: identification, limitations, static object, parameter estimation, measurement error output.

Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии ...заполняется редактором...

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...  
Опубликована ...заполняется редактором...