УДК 519.7
ББК 22.18

АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТОВ

Епифанов А.С.[1]
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов)

В работе осуществляется анализ свойств законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем (автоматов), представленных в виде геометрических образов – графиков с числовыми координатами точек. В качестве геометрических образов рассматриваются классические геометрические кривые: спираль Фибоначчи, лемниската Бернулли, баллистическая кривая, эвольвента круга, логарифмическая спираль, спираль Архимеда, астроида, спираль Галилео, брахистохрона и т.д. Исследуется зависимость числа состояний у минимального автомата, построенного по кривой, от мощности входного алфавита автомата.

Конечный детерминированный автомат, фазовая картина дискретной детерминированной динамической системы, оценка сложности

1. Введение

Используемые традиционные математические модели дискретных детерминированных динамических систем задаются символьными структурами: таблицами, графами, матрицами, логическими уравнениями. Данные модели не пригодны для

[1] Епифанов Антон Сергеевич, аспирант, г.Саратов, ул.Рабочая д.24 (epifanovas@list.ru)

использования при анализе и синтезе больших и сложных систем, ввиду огромной размерности. Твердохлебовым В.А. в работе [8] предложен и разработан новый подход для задания законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем, основанный на числовых структурах. Данный подход позволяет использовать мощные идеализации классической непрерывной математики: бесконечно малой величины, актуальной бесконечности, суммирования бесконечных рядов, предельного перехода и т.п..

Предложенный подход позволяет задавать законы функционирования геометрическими фигурами, которые в свою очередь могут быть заданы аналитически, совместить средства диагностирования различной природы в единую форму – эксперимент с автоматом, использовать классические методы интерполяции и экстраполяции. Разработанный геометрический образ представляет собой фазовую картину объекта диагностирования, в котором сечениями представлены конкретные варианты функционирования объекта – фазовые траектории.

2. Геометрические образы законов функционирования автоматов

Геометрический образ g_s законов функционирования (см.[2]) (функции переходов $d: S´X®S$ и функции выходов $l: S´X®Y$) инициального конечного детерминированного автомата $A_s=(S, X, Y, d, l, s)$ с множествами состояний S, входных сигналов X и выходных сигналов Y определяется на основе введения линейного порядка w в автоматном отображении $r'_s = \bigcup_{p\in X^*} \{(p, l(s,p))\}$, где $\lambda(s,p)=\lambda(\delta(s,p'),x)$, при $p=p'x$.

Автоматное отображение ρ_s (множество пар) упорядочивается линейным порядком ω, определенным на основе порядка ω_1 на X^* и заданным следующими правилами:

Правило 1. На множестве X вводим некоторый линейный порядок w_1 (который будем обозначать $\mathbf{p}_1$)

Правило 2. Порядок w_1 на X распространим до линейного порядка на множестве X^*, полагая, что

- для любых слов $p_1, p_2 \in X^*$ неодинаковой длины ($|p_1| \neq |p_2|$) $|p_1| < |p_2| \rightarrow p_1 \; \mathbf{p}_1 \; p_2$;

- для любых слов $p_1, p_2 \in X^*$, для которых $|p_1| = |p_2|$ и $p_1 \neq p_2$, их отношение по порядку w_1 повторяет отношение ближайших слева несовпадающих букв слов p_1 и p_2. Аналогично определяется порядок w_2 на множестве слов Y^*.

После введения на множестве X^* линейного порядка w_1, получаем линейно упорядоченное множество $r_s = (r'_s, w'_1)$, где w'_1 - порядок на r'_s, индуцированный порядком w_1 на X^*.

Определив на множестве Y линейный порядок w_2 и разместив в системе координат D_1 с осью абсцисс (X^*, w_1) и осью ординат (Y, w_2) множество точек ρ_s, получаем геометрический образ γ_s законов функционирования инициального конечного детерминированного автомата $A_s=(S, X, Y, d, l, s)$. Линейные порядки w_1 и w_2 позволяют заменять элементы множеств X^* и Y их номерами $r_1(p)$ и $r_2(p)$ по этим порядкам. В результате определяются две формы геометрических образов, во-первых, как символьная структура в системе координат D_1, а во-вторых, как числовая структура в системе координат с целочисленными или вещественными положительными полуосями.

Представление геометрического образа γ_s как числовой структуры позволяет при постановка и в методах решения задач использовать аппарат непрерывной математики: задание законов функционирования автоматов числовыми уравнениями, использование числовых процедур, интерполяцию и аппроксимацию частично заданных законов функционирования и т.п.

Предложенный Твердохлебовым В.А. в работе [8] геометрический подход позволяет использовать для задания законов функционирования сложных систем следующую схему:

- законы функционирования дискретной детерминированной динамической системы представляются как фазовая картина;

- фазовая картина совмещается с автоматным отображением, которое линейно упорядочивается и взаимнооднозначно представляется в форме дискретного числового графика;

- точки графика, соответствующего фазовой картине, рассматриваются на геометрической кривой линии в евклидовой плоскости, что позволяет для представления фазовых картин динамических систем с использованием мощных идеализаций непрерывной математики: актуальной бесконечности, непрерывности, бесконечно малых величин, предельного перехода, суммирования бесконечных рядов и т.п.

3. Классификация и оценка сложности законов функционирования дискретных детерминированных систем

Предложенный и разработанный в работе [8] аппарат геометрических образов автоматов позволяет рассматривать кривую на плоскости как фазовую картину законов функционирования дискретной детерминированной динамической системы. Новый геометрический подход позволяет сопоставить произвольной кривой на плоскости автомат и осуществлять классификацию и оценку сложности кривых на основе свойств автоматов. В данной работе общие свойства кривых и специфические свойства определяются на основе определения числа состояний в минимальном автомате, сопоставленном кривой.

Для анализа выбран банк 2D,3D-кривых и фракталов, представленный в сети интернет по адресу [9]. Данный банк собран коллективом французских математиков и обозначен авторами как «Энциклопедия фундаментальных математических структур» (далее для обозначения банка ENCYCLOPÉDIE DES

FORMES MATHÉMATIQUES REMARQUABLES используется аббревиатура EFMR). В данной работе исследованию подвергаются только 2D –кривые, извлеченные из EFMR. Для анализа выбраны 50 наиболее известных и распространенных геометрических кривых на плоскости: спираль Фибоначчи, лемниската Бернулли, баллистическая кривая, эвольвента круга, логарифмическая спираль, спираль Архимеда, астроида, спираль Галилео брахистохрона, кардиоида, кривая преследования, циссоида, кривая Гаусса, корноида и др. Проведенное исследование свойств 2D-кривых включило:

- построение по каждой кривой 3 автоматов (при |X|=2,5,10);
- минимизация построенных автоматов по числу состояний;
- разбиение класса из 150 автоматов на подклассы по числу состояний в минимальном автомате.

Исследование банка кривых проводилось в предположении, что для представления специфических свойств кривых достаточно их приближения, заданного 30 точками (соответственно извлеченные последовательности состоят из 30 элементов). Существенным является способ доопределения функции переходов δ автомата. Исследованы циклическое доопределение, доопределение в начальное состояние, генерация состояния псевдослучайным образом (из множества возможных состояний). В случае, когда $\frac{k}{|X|} \neq \left[\frac{k}{|X|}\right]$, где $|X|$ - мощность входного алфавита автомата, а k – число точек на кривой (по которой строятся законы функционирования автомата), доопределение требуется и для функции выходов λ. В данной работе доопределение функции переходов осуществляется всеми указанными способами, а значение мощности входного алфавита и количество точек выбраны таким образом, что $\frac{k}{|X|} = \left[\frac{k}{|X|}\right]$, поэтому доопределение функции λ не требуется. В таблицах 1, 2 приведено табличное задание автомата (при $|X|=2$), построенного по спирали Фибоначчи при циклическом доопределении функции переходов.

Таблица 1. Таблица переходов автомата, построенного по спирали Фибоначчи.

δ	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}
x_1	s_1	s_3	s_5	s_7	s_9	s_{11}	s_{13}	s_0	s_2	s_4	s_6	s_8	s_{10}	s_{12}	s_{14}
x_2	s_2	s_4	s_6	s_8	s_{10}	s_{12}	s_{14}	s_1	s_3	s_5	s_7	s_9	s_{11}	s_{13}	s_0

Таблица 2. Таблица выходов автомата (имеющего 2 входных сигнала), построенного по спирали Фибоначчи.

λ	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}
x_1	y_5	y_3	y_6	y_6	y_3	y_1	y_1	y_3	y_8	y_{10}	y_{12}	y_{14}	y_{16}	y_{18}	y_{18}
x_2	y_4	y_5	y_7	y_5	y_2	y_0	y_2	y_7	y_9	y_{11}	y_{13}	y_{15}	y_{17}	y_{18}	y_{17}

Построенные по спирали Фибоначчи 3 автомата (также как и по любой из анализируемых геометрических кривых) имеют соответственно 15, 6 и 3 состояния. Проведенное выделение классов эквивалентных состояний показало, что у всех 150 автоматов, построенных по 50 геометрическим кривым количество классов эквивалентности совпадает с числом состояний автомата, т.е. автоматы уже являются минимальными по числу состояний. Данное свойство присутствует у всех 150 автоматов , построенных при всех использованных способах доопределения функции переходов автомата: при циклическом доопределении функции переходов , при доопределении в начальное состояние, при доопределении с использованием генератора случайных чисел (состояние выбирается случайным образом из множества возможных состояний). В качестве примера автомата, построенного при доопределении функции переходов в начальное состояние в таблице 3 приведен автомат, имеющий 5 входных сигналов (построенный по лемнискате Бернулли). Все три использованных способа доопределения функции переходов автомата дали одинаковые результаты (по числу состояний автомата после минимизации). В общем случае от способа доопределения существенно зависит число состояний у автомата после минимизации.

Таблица 3. Таблицы переходов и выходов автомата (имеющего 5 входных сигналов), построенного по лемнискате Бернулли.

δ	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
x_1	s_1	s_0	s_0	s_0	s_0	s_0
x_2	s_2	s_0	s_0	s_0	s_0	s_0
x_3	s_3	s_0	s_0	s_0	s_0	s_0
x_4	s_4	s_0	s_0	s_0	s_0	s_0
x_5	s_5	s_0	s_0	s_0	s_0	s_0

λ	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
x_1	y_3	y_7	y_2	y_3	y_7	y_2
x_2	y_5	y_6	y_1	y_5	y_6	y_1
x_3	y_6	y_5	y_0	y_6	y_5	y_0
x_4	y_7	y_4	y_1	y_7	y_4	y_1
x_5	y_8	y_3	y_2	y_8	y_3	y_2

В результате проведенного исследования определены классы эквивалентных по сложности кривых и стоящих за ними законов функционирования дискретных динамических систем.

4. Краткие выводы

В работе построены и проанализированы классы дискретных детерминированных автоматов, определенные на основе математических свойств геометрических образов, задающих законы функционирования автоматов. Используемый геометрический подход позволяет исследовать свойства законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем на основе анализа свойств геометрических кривых. Изложенные в статье результаты показывают возможность практического использования аппарата геометрических образов для задания и исследования свойств законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем. Определены эквивалентные по сложности геометрические кривые, т.е. эквивалентные по сложности законы функционирования автоматов.

Литература

1. ЕПИФАНОВ А.С. *Анализ фазовых картин дискретных динамических систем.* - Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. - 156с.
2. ЕПИФАНОВ А.С. *Интерпретация спектра характеристик дискретных систем при проектировании./* Материалы 6-ой международной конф. «Автоматизация проектирования дискретных систем». Т.1, Минск. 2007.
3. ЕПИФАНОВ А.С. *Интерполяция фазовых картин дискретных детерминированных систем* // Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2008, №5. С. 128-132.
4. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Геометрические образы конечных детерминированных автоматов* // Известия Сарат. ун-та (Новая серия). Т.5. Вып.1. Сарат. 2005. С.141-153.
5. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Геометрические образы поведения дискретных детерминированных систем* // Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2006, №5. С. 161-165.
6. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Рекуррентно-автоматные характеристики динамических систем.* / Материалы 9-ой Междунар.конф. «Интеллектуальные системы и компьютерные науки». Т.1,часть2.Москва,2006.С.168-171.
7. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Методы интерполяции в техническом диагностировании.* / Ж-л «Проблемы управления». М. №2 2007. С.28-34.
8. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Геометрические образы законов функционирования автоматов.* – Саратов: Изд-во «Научная книга»,2008. – 183с.
9. http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html (дата обращения: 20.11.2008).

THE ANALYSIS OF GEOMETRICAL IMAGES OF LAWS OF FUNCTIONING OF FINITE STATE MASHINE

Anton Epifanov, Institute of problems of precision mechanics and Control Sciences of RAS, Saratov, PhD student (epifanovas@list.ru).

In work is carried out the analysis of properties of laws of functioning of the discrete determined dynamic systems (finite state machine) presented in the form of geometrical images - schedules with numerical coordinates of points. As geometrical images are considered classical geometrical curves: golden spiral, Lemniscate of Bernouilli, a ballistic curve,Equiangular spiral, Archimedian spiral, Astroid, Galileo's spiral, Brachistochrone (or brachistochronous) curve etc. In article is researched dependence of number of conditions at the minimal finite state machine constructed on a curve, from power of the entrance alphabet of the finite state machine.

Keywords: finite state machine, phase picture of the discrete determined dynamic system, estimation of complexity