

УДК 330 + 336.01

ББК 65.01, 65.9

**ЯВЛЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО УСИЛЕНИЯ
ЦЕНОВЫХ ДИСБАЛАНСОВ ЭКОНОМИКИ НА
(ОЧЕНЬ) БОЛЬШИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
МАСШТАБАХ**

Кривошеев О.И.¹

*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Московская финан-
сово-промышленная академия, МГУЭСИ, Москва)*

Махов С. А.²

(Институт прикладной математики РАН, Москва)

Москаров И. Г.³

(Московская финансово-промышленная академия, Москва)

Известно, что при экономических кризисах и циклах цены в пространстве изменяются неравномерно: периферия испытывает более тяжелые финансовые потрясения и провалы [1]. В работе рассматривается автомодельная – самоподобная динамика распределения средних цен в пространственной экономике, когда форма распределения неизменна. Риск (пропорциональный изменению логарифма цен) в итоге пропорционален радиусу до центра, умноженному на (пространственную) производную цен, нормированную на величину цен.

В работе рассматривается пространственное уравнение платёжно-торгового баланса. Вводится Вальрасовская модель с обменом между соседними регионами. За сальдо торговли

¹ Олег Игоревич Кривошеев, преподаватель, и.о.н.с. (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, posylki@mail.ru).

² Сергей Анатольевич Махов, кандидат физико-математических наук, (Москва, s_makhov@mail.ru).

³ Москаров Иван Галактионович, студент (moskarov-1989@mail.ru).

отвечает Лапласиан цен. Неторговые платежи обусловлены выплатами по процентам, в том числе платой за риск. Торговый баланс периферии призван уравнивать отток капитала с периферии. Феноменологический вариант, когда товарные потоки пропорциональны градиенту цен приводит к тем же выводам.

Рассматриваются экономики с эмиссионным центром и экономики без эмиссии.

Ключевые слова: Пространственная экономика, экспоненциальное распределение ВВП, общее равновесие, торговый баланс, межрегиональный дисбаланс.

1. Введение

В рамках модели мы исходим из посылки, что экономика распалась на развитый центр (характеризующийся высоким уровнем цен, иногда источником эмиссии) и неразвитую периферию (низкий уровень цен). Причины такого распада многообразны и изучаются в рамках пространственной экономики. Отдельные модели изложены [2,3]. Основную роль на практике часто играет трудоизбыточность, когда один регион может обслуживать спрос на относительно легко транспортируемые промышленные товары предъявляемый другими регионами. С точки зрения дальнейшего изложения целесообразнее всего считать такой распад сложившимся фактом. Пожалуй наиболее яркие исторические примеры распада экономики на центр периферию связаны с так называемой эпохой городов-государств длившейся между угасанием Византии и началом периода Англо-Саксонского доминирования, но всегда значимо проявлявшегося во все исторические эпохи во всех частях мира¹. Подробные примеры и факты читатель найдет в [1]. Сейчас, среди прочего, мы игнорируем и качественные отличия, которые

¹ *Всегда имела место иерархия центров, но нам, естественно, удобно рассматривать однородную периферию.*

возникают вследствие такого распада и отчасти его обуславливают.

Сначала мы рассмотрим дискретизованную (теоретико-игровую) модель. Из неё будет следовать непрерывная модель. На основе обеих моделей будет сформулирована гипотеза авторемодельного профиля, позволившая учесть нестабильность цен. Мы напишем уравнение этого профиля. Для него найдется общее решение в виде ряда и аналитические в частных случаях.

2. Дискретная модель.

Мы рассматриваем одномерную цепь регионов, каждый из которых может потреблять собственный продукт и торговать с соседом слева и соседом справа. Кроме того они берут внешний кредит на который создана или приобретена доля θ всех производственных мощностей. Основное уравнение модели описывает тот факт, что торговый баланс должен уравнивать платежи по кредитам.

2.1 ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ПЕРЕМЕННЫЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ:

$$(1) \quad U = C_L^\beta C_R^\beta C_O^{1-2\beta} \rightarrow \text{Max}$$

- степенная мультипликативная функция полезности,

C_L, C_R, C_O - количество потребляемого регионом товара левого и правого соседа и товара своего собственного производства соответственно, вместо этих индексов L, O, R в ряде случаев применены номерные обозначения $n-1, n, n+1$

P_L, P_R, P_O - соответствующие цены тех же товаров,

K - капитал на регион,

Q - чистый выпуск региона: объём продукции региона за вычетом текущих затрат и обновления фондов,

b - процент, включающий риск, b_o - безрисковый процент (может быть не положительным).

$k_p : Q = K \cdot k_p$ - коэффициент производительности фондов,
 $k_p = \frac{Q}{K}$
 r - риск,
 k - коэффициент пропорциональности в формулах для риска:
 $r = k \cdot \frac{\Delta p}{p}$ (с точностью до знака когда мы допускаем отрицательный риск для контрциклических колебаний цен),
 x - пространственная координата, X - диаметр (характерный размер) рассматриваемой экономической системы.
 D - размерность пространства – обычно она 1.

Из основ мат.экономики известно, что для принятой нами степенной мультипликативной функции полезности расходы чистого дохода на конкретные блага делятся пропорционально степеням вхождения количеств каждого блага в функцию полезности потребителя. Значит, при формировании спроса доход каждого региона $Q \cdot p$ делится в долях β , β , $1-2\beta$ между двумя соседями и собственным продуктом соответственно.

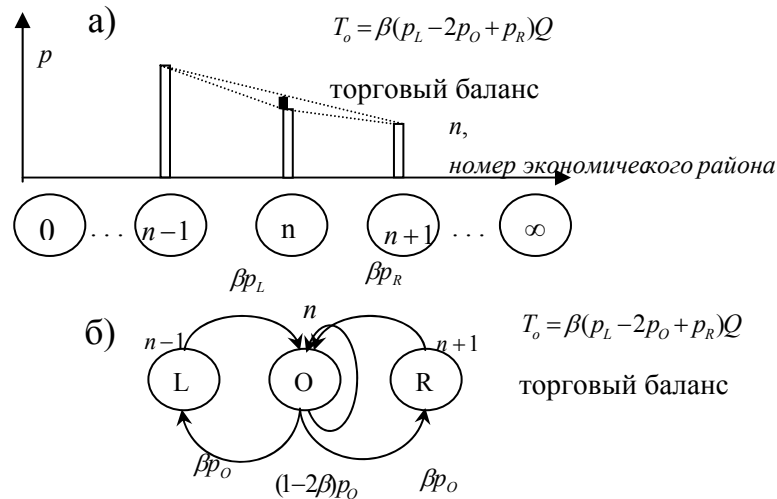


Рис. 1. а) Цены в цепи регионов, б) торговый баланс региона и его составляющие

Таким образом, приток денег в регион $Q\beta(p_L + p_R)$ - спрос соседей, отток $-2Qp_O\beta$ - внутренний спрос на продукцию соседей, итого торговый баланс T для среднего региона:

$$(2) \quad T = Q\beta(p_L - 2p_O + p_R),$$

заменяя L, O, R на номера в цепи на $n-1, n, n+1$, соответственно, получаем

$$(3) \quad T = Q\beta(p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1}) \text{ или}$$

$$T = h^2 \beta \Delta p, \text{ где под } \Delta p = (p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1}) \frac{1}{h^2} \text{ - справа стоит}$$

выражение аппроксимирующее $\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ - вторую производную или Лапласиан (последнее важно при переходе к квадратной (рис.2) или другой не одномерной решетке).

Если θ - доля заимствованных извне средств, а K - капитал, потребный для функционирования экономики, удельная стоимость которого p_K , b - рисковый процент, то платежи банкам $b\theta K p_K$ или $b\theta K p$, если считаем, что $p_K = p$, должны уравниваться торговым балансом:

$$(4) \quad b\theta K p = h^2 Q \beta \Delta p$$

$(Qh^2 \beta \Delta p - bKp = 0$ - условие равенства нулю полного платёжного баланса).

Если Δp рассмотреть как непрерывный оператор $\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ уравнение

$$(5) \quad b k_p \theta p = h^2 \beta \Delta p \text{ или}$$

$$(6) \quad b \theta p = k_p h^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} p$$

имеет непрерывное решение

$$p = Ae^{\pm h^{-1} \sqrt{\frac{\theta b K}{Q \beta}} x}.$$

Полагая, что центр экономики в точке $x = 0$, $p_{x \rightarrow +\infty} = 0$ оставим в ответе только убывающую экспоненту

$$(7) \quad p = Ae^{-h^{-1} \sqrt{\frac{\theta b}{\beta k_p}} x}.$$

Аналогичная дискретная модель имеет вид

$$\beta Q(p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1}) = \theta K b p_n$$

Её решение ищется в виде геометрической прогрессии с знаменателем λ : $p = \lambda^n p_0$. Он удовлетворяет характеристическому полиному $1 - 2\lambda + \lambda^2 = \frac{\theta b}{k_p \beta} \lambda$ имеет решение

$$\lambda = 1 + \frac{\theta b}{2k_p \beta} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\theta b}{2k_p \beta}\right)^2 - 1}, \text{ где мы вновь должны предпочесть}$$

знак «минус»:

$$(8) \quad \lambda = 1 + \frac{\theta b}{2k_p \beta} - \sqrt{\left(1 + \frac{\theta b}{2k_p \beta}\right)^2 - 1} = 1 - \frac{\theta b}{2k_p \beta} - \sqrt{\frac{\theta b}{k_p \beta} + \left(\frac{\theta b}{2k_p \beta}\right)^2} \sim 1 - \sqrt{\frac{\theta b}{k_p \beta}}$$

В пределе это решение $p = \lambda^n p_0$ переходит в непрерывное решение.

Условие значимой пространственной стратификации экономики:

$$h^{-1} \sqrt{\frac{\theta b}{\beta k_p}} X \gg 1$$

Замечания:

1. Коэффициент β в ряде случаев может быть опущен, т.е. сведен к правильному выбору масштаба торговли h . Однако некоторые эффекты проще отследить оставив данный коэффициент в явном виде. Например, в случае применения протекционистской политики (при кризисе) это значение может падать уменьшая характерную длину затухания экспоненты. Что будучи для регионов индивидуально рациональной политикой, оказывается вредно для экономики в целом.

2. Аналогичная модель была бы справедлива на D -мерной кубической или квадратной решетке:

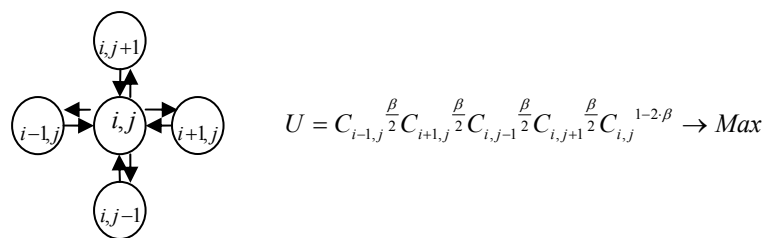


Рис. 2. Схема торговли для квадратной решетки (на плоскости).

В размерности D для функции

$$U = C_{i-1,j}^{\frac{\beta}{D}} C_{i+1,j}^{\frac{\beta}{D}} C_{i,j-1}^{\frac{\beta}{D}} C_{i,j+1}^{\frac{\beta}{D}} \dots C_{i,j}^{1-2\beta} \rightarrow Max$$

Торговый баланс аппроксимируется $T = h^2 \frac{\beta Q}{D} \Delta p$. Это порождает уравнение в пространстве $b \theta p = h^2 \frac{k_p \beta}{D} \Delta p$, где лапласиан определён $\Delta \bullet = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \bullet + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \bullet + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_D^2} \bullet$.

Отметим, что такая же модель (отличающаяся коэффициентом) может быть построена из феноменологических соображений детали которой изложены в приложении 1.

Независимо от вывода мы будем рассматривать

$$(9) \quad (\Delta p) = \zeta p_k$$

В предположении $p_k = p$ решение экспонента

$$(10) \quad p = e^{\sqrt{\zeta} x}$$

Более сложные модели и их решения нами будут рассмотрены после эмпирического раздела. Выше показано, что ζ - функция (вообще говоря, рисковей) процентной ставки.

Исследованию отдельных ситуаций предпослан эмпирический раздел, к которому мы переходим.

Если имеет место предсказанная экспоненциальная зависимость цен от расстояния, то в системе регионов одного размера тоже должно быть экспоненциальное распределение ВВП на душу населения по рангу, т.е. порядковому номеру при упорядочении по данному показателю. Это весьма важно для перехо-

да к наблюдаемым величинам, т.к. мы не в состоянии объективно измерить эффективное транспортно-географическое расстояние, поправленное таможенными пошлинами.

2. Анализ эмпирических данных

Для решения задачи, прежде всего, необходимы источники статистических данных. Были использованы базы данных ООН [6], Всемирного банка [7] и таблицы А. Мэдисона [8]. Наиболее полная информация по всем странам содержится в базе ООН за 1970-2007 годы, поэтому она и использовалась главным образом. Использовались таблицы, показывающие душевой ВВП каждой страны, измеренный в постоянных долларах 1990 года. По ним в текущем году строилась ранг-размерная зависимость по убыванию размера показателя.

Во всех случаях мы видим одну и ту же картину: ранг-размерная кривая хорошо приближается экспонентой, что иллюстрируется нарисованной линией регрессии, имеющей вид прямой в логарифмическом масштабе. Коэффициент детерминации при этом очень высок: от 0,97 до 0,99. Хотя и имеют место некоторые волнообразные отклонения от линии регрессии и отдельные выбросы на концах (что понятно), в целом можно считать ранг-размерную зависимость душевого ВВП страны ничем иным, как показательной функцией. При переходе к эмпирической функции распределения это означает, что она также является прямой линией для *логарифма душевого ВВП*, то есть последняя величина имеет *равномерное распределение*.

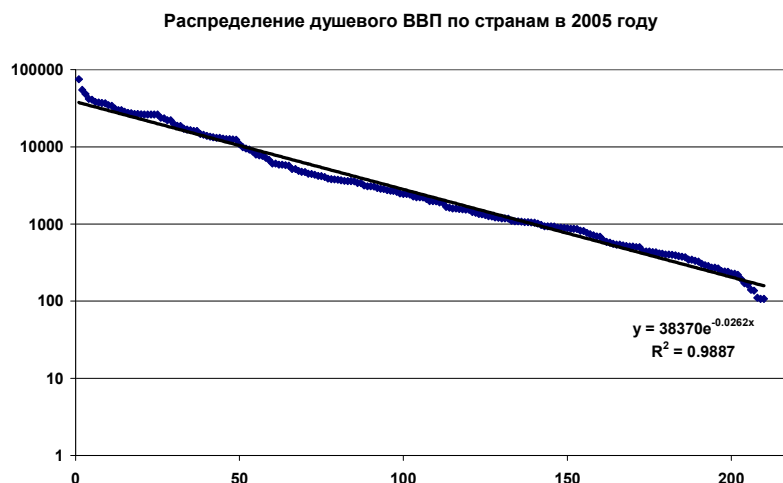


Рис.3. Зависимость ранг-размер для ВВП на душу населения стран мира в 2005 году (отдельные точки-ромбики) и регрессия (сплошная линия). График представлен в логарифмическом масштабе. Душевой ВВП измеряется в долларах 1990 года на человека. Ранг изменяется от 1 до 210.

Чтобы показать, что утверждение о равномерном распределении логарифма душевого ВВП носит неслучайный характер, были построены регрессии для ранг-размерных зависимостей по всем имеющимся годам, с 1970 по 2007 год.

Уравнение регрессии:

$$y = a \exp(br),$$

или

$$\ln y = \ln a + br,$$

где y – душевой ВВП, r – ранг страны, a , b – коэффициенты регрессии.

На рис. 4 приведены значения коэффициента детерминации регрессии по всем годам. Динамика изменения коэффициентов b и $\ln a$ указывает на 1990 год, как время перелома в мировой экономической системе, когда, как известно, произошли значительные изменения в мировой политике и экономике. Несмотря на это, самый характер ранг-размерной зависимости не изме-

нился - на что указывает значение коэффициента детерминации – оно, как было, так и осталось довольно высоким, т.е. распределение логарифма душевого ВВП осталось равномерным.

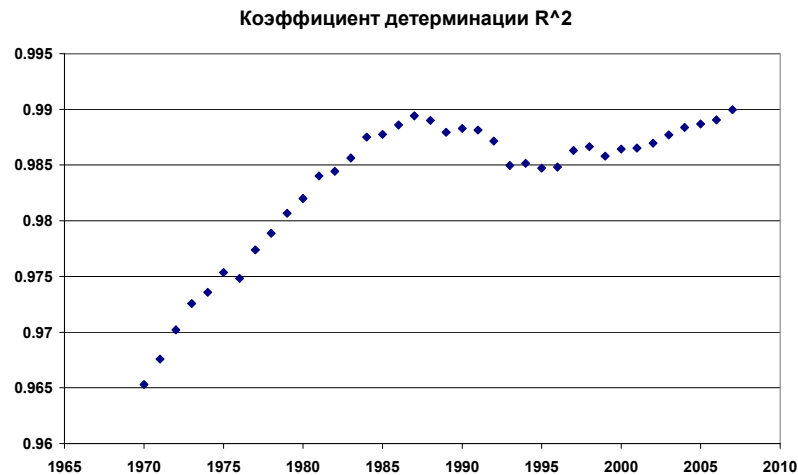


Рис.4. Коэффициент детерминации линейной регрессии (1*) для ранг-размерной зависимости логарифма душевого ВВП, вычисленный по годам. Коэффициент никогда не опускается ниже 0,965 и не поднимается выше 0,990. В 1987-2007 годах ведет себя устойчиво в пределах 0,984÷0,990.

Резюмируя сказанное, имеется линейный участок на графике зависимости «ранг-размер» для логарифма душевого ВВП отдельных стран. Т.е. на этом участке логарифм странового душевого ВВП имеет равномерное распределение. Этот эмпирический закон наблюдается в разные годы (по статистике ООН).

В пользу универсальности логарифмически равномерного распределения, справедливого не только на уровне стран мира при сравнении их между собой, но и для каждой отдельной страны при взаимодействии ее собственных внутренних регионов говорит статистика регионов России. На основании данных Росстата [9] были построены аналогичные ранг-размерные

зависимости для валового регионального продукта на душу населения регионов России в 2001 и 2008 годах – см. рис. 5.

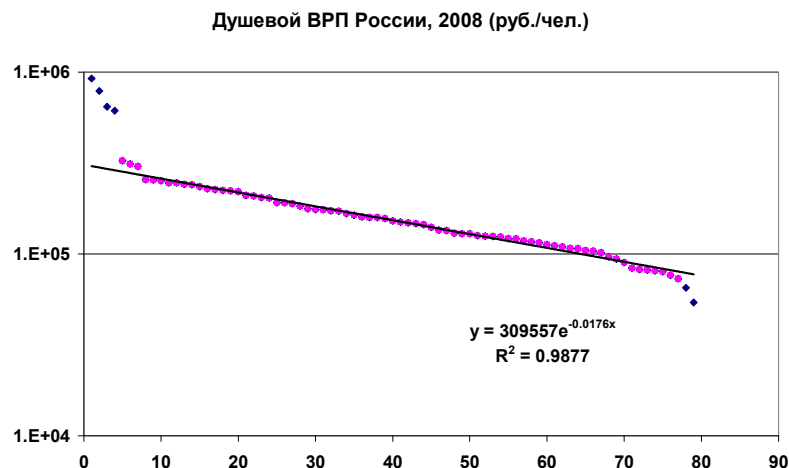


Рис. 5. Ранг-размерная зависимость для ВРП на душу населения регионов России в 2008 году. Всего 79 регионов. Душевой ВРП измеряется в рублях на человека, график показан в логарифмическом масштабе. Регрессия построена для средних точек, отмеченных квадратами, крайние точки, отмеченные ромбами, исключены из рассмотрения.

Далее рассмотрены

3. Более сложные теоретические модели:

Пусть цена создания производственных фондов задаётся как

$$(13) \quad p_K = p + p_0,$$

где p_0 - соответствует технологиям и фондам завозимым из центра.

Похожим образом могут влиять на цену основных фондов торгуемые по мировым ценам товары и ресурсы типа энергоносителей

Решением уравнения

$$(14) \quad h^2 k_p \frac{\beta}{D} \Delta p = b \theta_e (p_0 + p),$$

которое в одномерном случае ($D=1$) переходит в

$$(15) \quad h^2 k_p \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} p = b \theta_e (p_0 + p)$$

при краевых условиях¹

$$p(0) = 0 \text{ и } \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ (в многомерном случае } \nabla p(0) = 0 \text{)}.$$

является цепная линия

$$p = \begin{cases} p_0 \cdot \left(ch \sqrt{\frac{\theta_e b}{h^2 k_p \beta}} x - 1 \right), & \text{при } x < 0 \\ 0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

- здесь x - расстояние от точки обнуления цен: предполагалось, что

Краевые условия отражают обнуление пространственных потоков товаров и цен в точке периферии конечно удаленной от центра. Что имеет место в неоднородном случае.

Если уровень цен центра $p_{\max}$ взять за 1, то решение уравнения $p(x_{\max}) = p_{\max}$, даст масштаб $x_{\max}$ локализации <денежной> экономики.

$$(16) \quad p_{\max} = p_0 \cdot \left(ch \sqrt{\frac{\theta_e b}{h^2 k_p \beta}} x_{\max} - 1 \right).$$

Тогда

учитывая

что

$$chz = k \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = k \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 2k, \text{ при } t = e^z \Leftrightarrow t = k \pm \sqrt{k^2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$z = \ln(k \pm \sqrt{k^2 - 1})$$

$$\sqrt{\frac{\theta_e b}{h^2 k_p \beta}} |x_{\max}| = \operatorname{arcch}\left(1 + \frac{p_{\max}}{p_0}\right) = \ln\left(\frac{p_0 + p_{\max}}{p_0} + \sqrt{\left(\frac{p_0 + p_{\max}}{p_0}\right)^2 - 1}\right), \text{ а}$$

¹ задача со свободным концом

$$|x_{\max}| = \ln \left(\frac{p_0 + p_{\max}}{p_0} + \sqrt{\left(\frac{p_0 + p_{\max}}{p_0} \right)^2 - 1} \right) / \sqrt{\frac{\theta_e b}{h^2 k_p \beta}}.$$

Здесь $\frac{p_0 + p_{\max}}{p_0}$ - обратная доля внешнего фактора в цене основных фондов в центре.

(Мы рассматриваем $|x_{\max}|$, потому, что сдвинув начало координат на край обнуления цен мы, ради сохранения направления оси x , положили $x < 0$ в центре, равно во всей области ненулевых цен.)

Вне радиуса $|x_{\max}|$ можно ожидать господство натуральных - неденежных обменов, наблюдавшееся в средние века [1].

При $p_K = p$ это второе краевое условие отсутствует, точнее переходит в $p(+\infty) = 0$ и получается более простое решение

$$(17) \quad p = e^{-\sqrt{\frac{Kb\theta_e}{\gamma}} x},$$

где теперь стало удобно положить, что x - расстояние от центра.

Условие существенной пространственной неоднородности экономики состоит в том, что выражение

$$(18) \quad \sqrt{\frac{\theta_e b}{h^2 k_p \beta}} X \gtrsim 1$$

- достаточно велико (по сравнению с единицей)- в результате чего получаем неравенство

$$\frac{\theta_e b}{h^2 k_p \beta} \leq \frac{1}{X^2},$$

где константа в правой части, обратно пропорциональная квадрату среднего размера экономики $\frac{1}{X^2}$ очень мала для большой экономики.

Вписаться в это ограничение можно за счет

1. снижения доли θ_e внешних заимствований / заимствований вообще
2. снижения процентной ставки b
3. стимулирования товарообмена через рост β , точнее, βh^2 , на что может влиять, в частности, транспортный тариф.

На практике нарушение неравенства может обуславливаться низким $k_p = \frac{Q}{K}$. Мы не берёмся рекомендовать его снижение, однако полученные некоторыми авторами данные о негативном влиянии инвестиций на экономический рост (по большей части в либеральных экономиках) могут с этим согласовываться.

Модель может быть обобщена с учетом других факторов покупаемых из вне. Это породит дополнительную добавку T в торговом балансе:

$$(19) \quad (\Delta p)_{\gamma_2} = Kb\theta_e(\beta p + p_0) + T,$$

где T – издержки на отсутствующие на месте внешние товары, например импортируемая (ввозимая) в регион нефть, иные ресурсы или напротив отсутствующие высокотехнологичные товары¹.

Решение с добавкой $T = const$ выглядит как

$$p = \begin{cases} \beta^{-1} \left(\frac{T}{Kb\theta_e} + p_0 \right) \left(ch \sqrt{\frac{\theta_e b}{h^2 k_p \beta}} x - 1 \right), & \text{при } x < 0. \\ 0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

¹ T при необходимости могло бы пониматься и как невозвращаемые в регион «центральные налоги».

Масштаб локализации денежной экономики (решение $\min_{p(x)=0} x$) будет негативно зависеть от T . Такие вещи как налоги, отчисляемые в федеральный центр, тарифы (цены на энергоносители), вытеснение импортом отечественных товаров могут быть интерпретированы как управляющий длиной локализации экономики параметр T .

Также на периферии будут по меньшей мере линейно (по расстоянию x) усилены колебания цен и рентабельности, ведущие к росту рисковому процента.

Чтобы продемонстрировать это возьмём наиболее простую модель $p = A e^{-\sqrt{\frac{K\theta_e}{\gamma}} x}$ и для простоты предположим, что $p(0)$ - уровень цен в центре не меняется по времени $A = const$, тогда как адиабатически медленно меняется банковский процент $b = b(t)$, а остальные параметры фиксированы. Тогда

$$\left| \frac{d}{dt} \ln p \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K\theta_e}{b\gamma}} x \cdot \left| \frac{d}{dt} b \right| \sim x,$$

т.е. риски пропорциональные $\left| \frac{d}{dt} \ln p \right|$ будут линейно **расти** с расстоянием x .

Наличие локализации при $T > 0$ или $p_0 > 0$ сделает рост рисков у периферии неограниченно (сингулярно) быстрым.

3. Учет риска, зависящего от пространственно неоднородных колебаний цен.

В предыдущем случае при квази-статически медленном изменении процента пространственный профиль цен сохранял самоподобие – сжимался-растягивался вдоль пространственной координаты (менялся коэффициент при пространственной переменной - аргументе).

В литературе известен [1] феномен, что при спаде наблюдается усиление пространственной неоднородности, а удар кризи-

са и изменение цен на периферии оказывается сильнее. Мы попробуем отчасти описать такие явления.

Введём новые агрегаты переменных

$$a = \frac{k\theta K}{\gamma},$$

$$(20) \quad \alpha = \frac{\theta K b_0}{\gamma}$$

χ - коэффициент пропорциональности в одном из упрощенных вариантов связи между пространственным сжатием пространственного (унимодального) распределения цен и изменением его высоты.

Рассмотрим самоподобное во времени

$$(21) \quad p(x, t) = \kappa_2(t) \cdot p(x \cdot \kappa(t))$$

- зависящее от времени пространственное распределение цен, которое будем кратко именовать профиль цен.

Считая $\kappa(t)$ и $\kappa_2(t)$ близкими 1 запишем

(22) $p(x, t) = (1 + \varphi_2(t)) \cdot p(x \cdot (1 + \varphi(t)))$, где $\varphi(t)$ периодическая (ограниченная) функция времени. Неравенства $-1 < \varphi(t) < 1$ и $-1 < \varphi_2(t) < 1$ считаются выполненными.

Рассмотрим частный случай чисто пространственной автомодельности:

$$p(x, t) = p(x \cdot (1 + \varphi(t)))$$

В последствии, когда мы перейдем к полной автомодельности, мы рассмотрим

$$(23) \quad p(x, t) = (1 + \chi \varphi(t)) \cdot p(x \cdot (1 + \varphi(t))),$$

где $\chi < 1$, и может быть даже отрицательным, но так чтобы выполнялось $1 + \chi \varphi(t) > 0$. $\chi < 0$, в частности, актуальна в пространственно однородной экономике, в которой имеет место деловой цикл меняющийся только по времени везде одинаковый уровень цен.

Дисперсия отклонений цен пропорциональна модулю производной по времени:

$$(24) \quad \delta p \sim p'_t(x, t) = |\chi \varphi'_t(t) \cdot p(x, t) + \varphi'_t(t) p'_x| = |\chi \cdot p + p'_x| \cdot |\varphi'_t(t)|$$

Игнорируя $|\varphi'_t(t)|$, играющий роль коэффициента, получаем

$$\delta p \sim |\chi \cdot p + p'_x|.$$

Если центр в нуле производная отрицательна. χ по выше сказанному знаконеопределено. Если $\chi < 0$ раскрытие модуля $\delta p \sim -(\chi \cdot p + p'_x)$, если $\chi > 0$ при совершенном рынке можно пользоваться той же формулой

$$(25) \quad \delta p \sim -(\chi \cdot p + p'_x)$$

риск r определенный как

$$(26) \quad r = \frac{\delta p}{p}$$

будет иногда отрицателен, что соответствует движущемуся в противофазе с рынком (антикоррелирующему) активу в факторных моделях инвестирования (например в CAPM) с отрицательным условно обозначаемым «Бета». Такие активы пользуются повышенным спросом, т.к. их добавка в портфель позволяет снизить его дисперсию.

Фактически в центре предприятия будут получать субсидию – плату за тихую гавань в период шторма. Мы вернемся к этому механизму позже.

Пока пусть $\chi = 0$.

$$(27) \quad r = \frac{\delta p}{p} \sim \frac{|p'_x| \cdot x}{p}, \quad r = \rho \frac{|p'_x| \cdot x}{p}.$$

Подставляя риск r вместо процента b в уравнение торгового-платежного баланса

$$(28) \quad (\Delta p)\gamma = \theta_e K p_K b$$

получим

$$(\Delta p)\gamma = k \theta_e K |p'_x| \cdot x : \text{здесь мы воспользовались } p_K = p$$

преобразуя

$$(29) \quad (\Delta p) = \frac{k \theta_e K}{\gamma} |p'_x| \cdot x \text{ и заменяя } a = \frac{k \theta_e K}{\gamma}$$

получим

$\Delta p = a |p'_x| \cdot x$. При монотонном профиле $p(x)$ можно избавиться от модуля. Если центр расположить в нуле, то при положительных x ввиду убывания функции $p(x)$: $|p'_x| = -p'_x$.

Что даст

$$(30) \Delta p = -ap'_x \cdot x$$

Решение данного уравнения $p'_x \sim -e^{-\frac{x^2 a}{2}}$, а далее (нормировка $p(0) = 1$).

$$(31) p = 1 - S \int_0^x e^{-\frac{x^2 a}{2}} dx,$$

Это решение предполагает эмиссионный центр в точке x равное нулю, мощность эмиссионного центра

$$S = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \text{ находится из краевого условия: } p(+\infty) = 0.$$

Возможно, рассмотреть экономику без источника (замкнутую по финансам). Выражение для процентной ставки получит в дополнение к риску r (отрицательную) константу $-b_o$:

$$b = r - b_o,$$

интерпретация $b_o = \chi$ приведена выше (и должна служить оценкой для b_o снизу).

Но, имея ввиду, что заемщики платят кредиторам равновесие на рынке возникает, когда суммарный доход кредиторов равен расходу заемщиков. При постоянстве коэффициента заимствования θ_e (и иных местных параметров) в рамках гипотезы $p = p_K$ в пространстве имеем условие:

$$(32) \int_0^{+\infty} b p dx = 0$$

В частности, агенты экономики в центре несут выгоды от пользования относительно малорисковыми возможностями

вложения денег. Из-за того, что некоторые процентные ставки при этом отрицательны, этот сценарий подразумевает инфляцию, технически способную обеспечить реально отрицательную процентную ставку. Необходимая для его реализации инфляция ограничена с низу порогом $i \geq \max(\chi, 0)$. Это ограничение более существенно в сильно неоднородной экономике (χ велико), а в однородной вообще исчезает, т.к. в однородной ситуации всегда $\chi < 0$.

Подставляя

$$b = r - b_o = k \frac{|p_x'| \cdot x}{p} - b_o$$

в уравнение баланса

$$(\Delta p)\gamma = \theta_e K p b,$$

параллельно заменяя $\frac{1}{\gamma} \theta_e K b_o = \alpha$.

Получаем

$$\Delta p = a |p_x'| \cdot x - \alpha p \quad \text{с граничными условиями} \quad p(+\infty) = 0 \quad \text{и}$$

$$\frac{dp}{dx}(0) = 0.$$

По-прежнему возьмем в качестве нормировки $p(0) = 1$. Для убывающей $p(x)$ $\Delta p = -a |p_x'| \cdot x - \alpha p$

решение данного уравнения имеет при любых (не слишком больших) α совместно с условием $\int_0^{+\infty} b p dx = 0$ потому что

$$\int_0^{+\infty} b p dx = \int_0^{+\infty} h \Delta p dx = h(p_x'(+\infty) - p_x'(0)) = 0 \quad \text{т.к.} \quad \Delta p = h b p$$

$$\int_0^{+\infty} h \Delta p dx = h(p_x'(+\infty) - p_x'(0)) = 0 \quad \text{в силу граничных условий}$$

$$p_x'(+\infty) = p_x'(0) = 0$$

В частности $\Delta p = a |p_x'| \cdot x - \alpha p$: случай $a = \alpha$.

Имеет точное решение

$$(33) \quad p = e^{\frac{x^2 a}{2}}$$

При $a > \alpha$ (при тех же граничных условиях) можно предложить приближенное решение

$$p \cong e^{\frac{ax^2}{2}} \operatorname{ch}(x\sqrt{a-\alpha}),$$

$$\text{Где } \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x).$$

Это решение приближает истинное при $a - \alpha \gg ax$. Оно мажорирует решение $p = e^{\frac{x^2 a}{2}}$ и имеет сходную асимптотику (так как множитель $\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) \sim e^x$ - пропорционально экспоненте изменяется относительно медленно по сравнению с e^{x^2} в знаменателе).

Изменением масштаба по оси x : $x = \mu \tilde{x}$, если применить преобразование $x = \sqrt{\alpha} \tilde{x}$ можно сократить число параметров уравнения до одного:

$$(34) \quad \alpha \Delta p = a |p_x'| \cdot x - \alpha p$$

или

$$(35) \quad \Delta p = \frac{a}{\alpha} |p_x'| \cdot x - p$$

где волна при x опущена.

Можно предложить рекуррентную формулу для коэффициентов разложения в ряд решения

$$(36) \quad p = \sum_{f=0}^{+\infty} c_f x^f.$$

Приравнивая коэффициенты при одних одинаковых степенях получим:

$$c_{j+2}(j+2)(j+1) = -(ja + \alpha)c_j \text{ или}$$

$$c_{j+2} = -\frac{ja + \alpha}{(j+2)(j+1)} c_j \text{ и}$$

считая $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, что задаёт $p = 1$ и $p_x' = 0$

получим $c_{2(j+1)} = -\frac{2ja + \alpha}{(2j+2)(2j+1)} c_{2j}$,

$c_0 = 1$ и $\forall j \ c_{2j+1} = 0$ m -й член ряда будет иметь вид

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{\prod_{k=0}^{m-1} (2ka + \alpha)}{(2m)!}.$$

Этот ряд в большой мере похож на ряд функции $e^{-\eta x^2}$, где η - числовой коэффициент и имеет бесконечный круг сходимости.

В преобразованных координатах $x = \sqrt{\alpha} \tilde{x}$ этот же ряд бу-

дет иметь вид $\tilde{c}_{2m} = (-1)^m \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \left(2m \frac{a}{\alpha} + 1 \right)}{(2m)!}$.

Численное решение приведено на рисунке

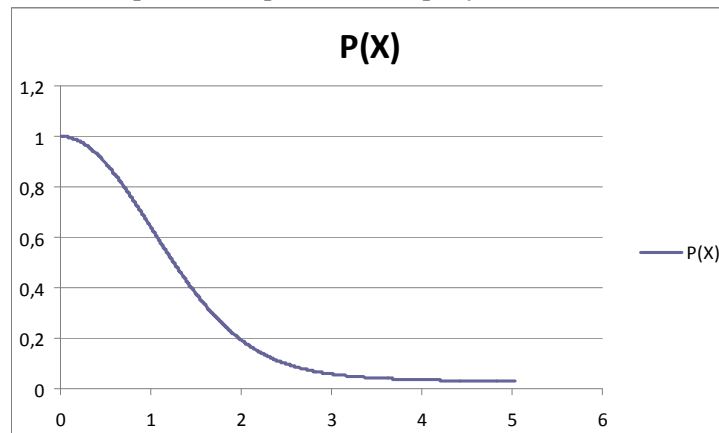


Рис. 6. $a=1$, $\alpha=0.92$, шаг схемы $h=0,002$

При $a < \alpha$ из-за возникновения колебаний начинают отсутствовать монотонные решения определенные на всей числовой оси.

Уравнение в пространстве размерности D , если изначально предположить и рассматривать сферически симметричные решения получается заменой лапласиана на выражение

$$\Delta p = p_r' \cdot \frac{(D-1)}{r} + p_{rr}'', \text{ на плоскости это } \Delta p = p_r' \cdot \frac{1}{r} + p_{rr}''.$$

Первая производная изменений не претерпевает: $p_r' = p_x'$.

Получаем:

$$(37) \quad p_{rr}'' + \frac{1}{r} p_r' = -a p_r' \cdot r - \alpha p \quad \text{или}$$

$$(38) \quad p_{rr}'' + \frac{D-1}{r} p_r' = -a p_r' \cdot r - \alpha p$$

(где правая часть представляет рисковую ставку, умноженную на капитал...).

5. Выводы.

5.1 СТАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ.

Мы показали, что может возникать дифференциация территорий на центр-периферию. Не возникает какой-либо резкой границы, но удалённые территории радикально отличаются по базовым параметрам от центра. Первичный механизм раздела периферии и центра по функциям может быть связан либо с приводящим к притоку средств преимуществом по рискам (модель без эмиссионного центра), либо с эмиссионным центром служащим источником средств (в современной глобальной эконоике это доллары). В простейшем случае возникает экспоненциальная модель распределения областей пространства по ценам или объёмам ВВП. Это с очень высокой точностью подтверждается экспоненциальным распределением стран Мира по ВВП на душу населения и также экспоненциальным распределением регионов России по душевому ВВП.

Из практических соображений можно дополнительно рассматривать нагрузку на торговые балансы в точках периферии покупки набора уникальных товаров или ресурсов, поставляемых из центра (или «через локальный центр»). Не изменяя

выведенных уравнений, новые эффекты выступают добавкой в управляющий параметр.

При решении задач управления важны факторы, приводящие к региональным дисбалансам. Им способствует высокая процентная ставка, снижающий эффективное расстояние торговли высокий транспортный тариф, высокие цены на поставляемые из центра (торгуемые на внешнем рынке) ресурсы, такие как энергоносители. Также управления в рамках централизованной большой системы могут касаться выравнивания платежного баланса регионов.

5.2 ДИНАМИКА.

Особым аспектом явилось рассмотрение автомодельной динамики квазиравновесного распределения пространственных цен, основанной на эвристическом наблюдении, что распределение цен в пространстве для статической модели автомодельно меняется под воздействием таких параметров как процентная ставка. В силу неустойчивости параметров b , T и p_0 радиус локализации экономики должен претерпевать и претерпевает изменения. Это дало возможность написать нелинейное уравнение, и, моделируя риск как изменение логарифма локальных цен, показать, что периферия подвергается *большим* рискам, чем центр. Оказавшиеся на периферии – в зоне приобоя предприятия являются жертвами неустойчивости в большей степени, чем какие-либо другие предприятия, в силу чего в экономической политике географически стратифицированных государств должны присутствовать обеспеченные государственным регулированием компенсирующее перераспределение доходов от центральных предприятий региональным, а также от внешних производителей внутренним.

Модель в частности важна для понимания режима функционирования экономики России, являющейся одновременно сильно *пространственно-стратифицированной* экономикой и сильно подверженной неустойчивости *периферийной* частью экономики *Мира*.

Библиография

1. БРОДЕЛЬ Ф. Материальная цивилизация, экономика и капитализм. XV-XVIII вв. В 3-х тт (Структуры повседневности: возможное и невозможное. Игры обмена. Время мира). 2-е изд.; пер. с фр. Л. Е. Куббеля; вступ. ст. Ю. Н. Афанасьева. - М.: Изд-во "Весь мир", 2006-2007 гг.
2. КРИВОШЕЕВ О.И. Модель экстренного спроса на кредит в контексте возникновения географической стратификации экономики Математика и математическое моделирование. Труды научно-практической конференции: 13-14 октября 2011 года Мордовский государственный педагогический институт им. М. Е. Евсеева. – Саранск, 2011. стр. 149-157.
3. КРИВОШЕЕВ О.И. Границы применимости политики либерального дерегулирования (laissez-fair) в аграрном обществе (I часть). 2-я Международная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем», М.: Янус - К, 2011 2 стр. (с.130-131).
4. КРИВОШЕЕВ О.И. Возможность применения доктрины laissez-fair, эффективность видов регулирования и вопросы классификации экономик по этим признакам (II часть). 2-я Международная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем», М.: Янус - К, 2011 3 стр. (с.132-135).
5. МОСКАРОВ И.Г. Модели экстренного спроса на кредит. Дипломная работа под рук. Кривошеева О.И., МФПА, 2012 г.
6. Базы данных ООН (<http://data.un.org>).
7. Всемирный банк. Индикаторы всемирного развития. (www.worldbank.org).
8. Maddison Historical Statistics for the World Economy (<http://www.ggdc.net/MADDISON/oriindex.htm>).

9. Росстат (<http://www.gks.ru/dbscripts/Cbsd/DBInet.cgi#1>).

**ARTICLE TITLE, ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ НА
АНГЛИЙСКИЙ**

Oleg Krivosheev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, posylki@mail.ru).

Sergey Mahov, Institute of Applied Mathematics, KIAM RAS (s_makhov@mail.ru).

Alexander Moskarov, student (moskarov-1989@mail.ru).

Abstract: We consider general equilibrium model of inter-regional trade, which is totally or mainly local while borrowing is global. Local trade produce one component of pay balance and interest payments the another. This produce price equilibrium with non-trivial dependence price from spatial coordinates.

The simplest model demonstrate exponential diminishing of price level from center to periphery. This is in a perfect coincidence with econometrics.

The more sophisticated model consider conserving shape oscillations (auto model), with hire risks for peripheral agents.

The dependence of risk level from coordinate may be quite sophisticated, but in some analytically easy cases it was quadratic or linear.

Key words: Spatial economics, regional inequality, general equilibrium, GDP distribution, trade balance.

Keywords: перевод на английский язык ключевых слов.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...заполняется редакто-
ром...*

Поступила в редакцию ...заполняется редактором...

Опубликована ...заполняется редактором...