

ВЗАИМОСВЯЗЬ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ АЛГЕБР И ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вульфин А.М.¹,

*(Уфимский государственный авиационный
технический университет, Уфа)*

Гиниятуллин В.М.²

*(Уфимский государственный нефтяной
технический университет, Уфа)*

В работе рассматривается взаимосвязь двухкомпонентных алгебр, квадратичных функций и линий второго порядка. Вводится оригинальный способ неявного задания функций. Показано взаимное соответствие некоторой алгебры и конкретного вида кривой. Рассмотрены частные и вырожденные случаи линий второго порядка. Приведен алгоритм перехода от неявного задания функции к её каноническому уравнению, параметрическому виду и обратно.

Ключевые слова: двухкомпонентная алгебра, линия второго порядка, неявное задание функции, каноническое уравнение, параметрический вид зависимости.

1. Введение

Алгебра комплексных чисел, к настоящему времени, считается хорошо изученной и имеет множество практических при-

¹ Алексей Михайлович Вульфин, аспирант (skevalt@bk.ru).

² Вахит Мансурович Гиниятуллин, кандидат технических наук, доцент (fentazer@mail.ru).

ложений. Вместе с ней к классу двухкомпонентных алгебр [1] также относят множество дуальных чисел и множество паракomплексных [2] чисел (в литературе встречаются названия двойные и/или гиперболические числа). Одно из названий последней алгебры прямо указывает на её соответствие определенному виду кривых второго порядка, а именно гиперболам.

Кривых второго порядка существует 3 вида: эллипсы, гиперболы и параболы, все их можно получить сечениями некоторого конуса [3]. Естественно возникает вопрос о соответствии оставшихся двухкомпонентных алгебр и линий второго порядка.

2. Неявное задание линий второго порядка

В статье рассматривается следующий способ неявного задания функций второго порядка с помощью скалярного умножения векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T * \begin{pmatrix} c_0 + i * d_0 & c_1 + i * d_1 & c_1 + i * d_1 \end{pmatrix}^T = z$$

где $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}$ – вещественнозначный вектор,
 x, y – декартовы координаты точки на плоскости,
 $\begin{pmatrix} c_0 + i * d_0 & c_1 + i * d_1 & c_2 + i * d_2 \end{pmatrix}$ – комплексный вектор,
 c_j, d_j – компоненты комплексного вектора,
 i – мнимая единица двухкомпонентной алгебры,
 z – число соответствующей двухкомпонентной алгебры.

Поставив в соответствие каждой точке пространства (x, y) значение модуля числа z , получим некоторую явную функцию двух переменных вида: $t = F(x, y)$. Зафиксировав значение модуля, получим неявно заданную функцию вида $f(x, y) = 0$ двух переменных. Для разных алгебр такие функции будут различаться способом извлечения модуля числа.

2.1. ЭЛЛЕПТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ УРОВНЯ МОДУЛЬНОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Результатом скалярного умножения вещественнозначного вектора координат на комплексный вектор является некоторое комплексное число z . Модуль комплексного числа равен:

$$|z| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2},$$

поскольку квадрат мнимой единицы равен минус единице.

На рисунке 1 дан пример графического представления функции от 2 переменных (слева), и карта изолиний этой поверхности (справа).

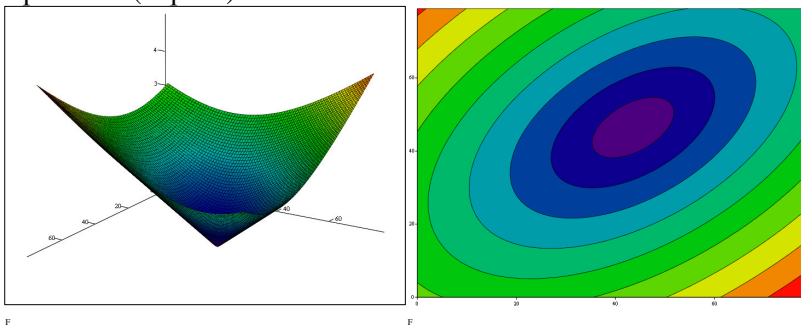


Рис. 1. Функция 2 переменных и её карта изолиний (эллипсы)

Зафиксировав значения модуля комплексного числа, из семейства концентрических эллипсов выбираем некоторую эллиптическую кривую.

2.2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЛИНИИ УРОВНЯ МОДУЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПАРАКОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Результатом скалярного умножения вещественнозначного вектора координат на паракомплексный вектор, является некоторое паракомплексное число z . Модуль паракомплексного числа равен:

$$|z| = \sqrt{\text{Re}^2 - \text{Im}^2},$$

поскольку квадрат мнимой единицы равен плюс единице.

На рисунке 2 приведен пример графического представления функции от 2 переменных (слева), и карта изолиний этой поверхности (справа).

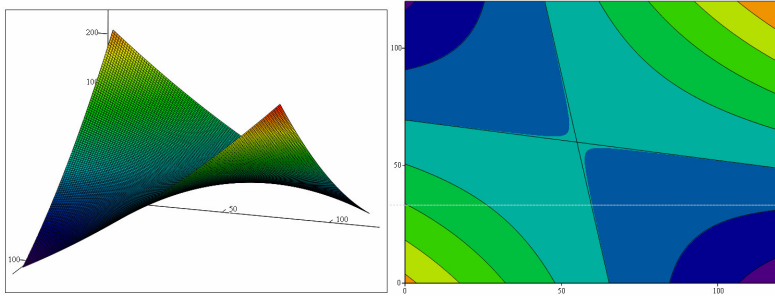


Рис. 2. Функция 2 переменных и её карта изолиний (сопряженные гиперболы)

Модуль паракомплексного числа может быть меньше нуля [5], поэтому на карте изолиний значения модуля в противоположных квадрантах одинаковы по знаку, а в соседних нет. Зафиксировав значения модуля паракомплексного числа, из семейства гипербол выбираем некую гиперболическую кривую.

2.3. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЛИНИИ УРОВНЯ МОДУЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДУАЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Результатом скалярного умножения вещественнозначного вектора координат на дуальный вектор, является некоторое дуальное число z . Модуль дуального числа равен:

$$|z| = \sqrt{\text{Re}^2},$$

поскольку квадрат мнимой единицы равен нулю.

На рисунке 3 дан пример графического представления функции от 2 переменных (слева), и карта изолиний этой поверхности (справа).

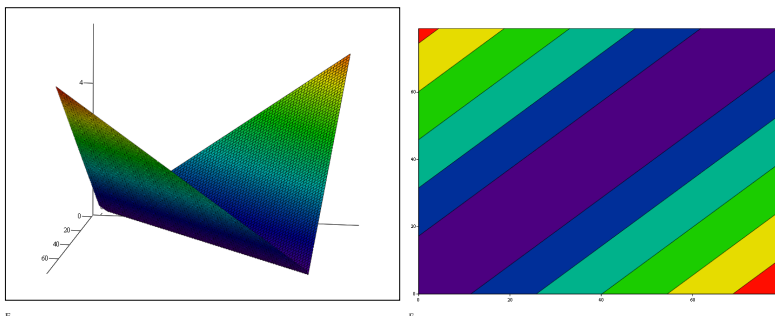


Рис. 3. Функция 2 переменных и её карта изолиний (вырожденные параболы)

Зафиксировав значения модуля, из семейства полос выбираем две параллельные прямые – вырожденный случай параболы.

На практике удобно использовать квадрат модуля - это снижает вычислительные затраты, а для паракомплексных чисел снимает проблему извлечения корня из отрицательных чисел.

3. Исследование свойств полных квадратичных форм

Вычисляя значение модуля произведения вещественнозначного вектора координат на вектор любой из двухкомпонентных алгебр, получаем полную квадратичную форму. Покажем, что каждая из алгебр порождает вполне определенный вид кривой 2 порядка.

3.1 ДУАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Полная квадратичная форма для случая дуальной алгебры выводиться следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}^T * \begin{vmatrix} c_0 + i * d_0 & c_1 + i * d_1 & c_2 + i * d_2 \end{vmatrix}^T = z,$$

$$xc_0 + i * xd_0 + yc_0 + i * yd_1 + c_2 + i * d_2 = z,$$

$$(xc_0 + yc_1 + c_2) + i * (xd_0 + yd_1 + d_2) = z,$$

$$(xc_0 + yc_1 + c_2)^2 = |z|^2 = H.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$(3.1) \quad x^2 c_0^2 + 2xyc_0 c_1 + y^2 c_1^2 + 2xc_0 c_2 + 2yc_1 c_2 + c_2^2 = H.$$

Инвариант квадратичной формы (3.1) при старших членах равен нулю:

$$c_0^2 * c_1^2 - (c_0 c_1)^2 = 0,$$

следовательно, при любых значениях компонент, получаем кривую параболического вида [3].

Повернем систему координат на такой угол α , чтобы коэффициент при множителе xy стал равен нулю, и выразим значения синуса/косинуса этого угла через компоненты вектора. Тангенс удвоенного угла α равен:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2c_0c_1}{c_0^2 - c_1^2},$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2c_0c_1}{c_0^2 - c_1^2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{(c_0^2 - c_1^2) + 4c_0^2c_1^2}{(c_0^2 - c_1^2)^2}}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c_0^2 + c_1^2}{c_0^2 - c_1^2}\right)^2}} = -\frac{c_0^2 - c_1^2}{c_0^2 + c_1^2},\end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{0.5 \left(1 - \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_0^2 + c_1^2}\right)} = \sqrt{0.5 \frac{c_0^2 + c_1^2 - c_0^2 + c_1^2}{c_0^2 + c_1^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{0.5 \left(1 + \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_0^2 + c_1^2}\right)} = \sqrt{0.5 \frac{c_0^2 + c_1^2 + c_0^2 - c_1^2}{c_0^2 + c_1^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}}.$$

Старые координаты x, y , выраженные через координаты X и Y в повернутой на угол α исходной системе, запишутся так:

$$x = \frac{Xc_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} - \frac{Yc_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}},$$

$$y = \frac{Xc_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} + \frac{Yc_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}}.$$

Подставим их в полную квадратичную форму (3.1):

$$\begin{aligned}
& c_0^2 \left(\frac{Xc_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} - \frac{Yc_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} \right)^2 + c_1^2 \left(\frac{Xc_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} + \frac{Yc_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} \right)^2 + \\
& + 2c_0c_1 \left(\frac{Xc_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} - \frac{Yc_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} \right) \left(\frac{Xc_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} + \frac{Yc_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} \right) + \\
& + 2c_0c_2 \left(\frac{Xc_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} - \frac{Yc_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} \right) + 2c_1c_2 \left(\frac{Xc_0}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} + \frac{Yc_1}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} \right) \\
& + c_2^2 = H, \\
& \frac{c_0^2}{c_0^2 + c_1^2} (X^2c_1^2 - 2XYc_1c_0 + Y^2c_0^2) + \frac{c_1^2}{c_0^2 + c_1^2} (X^2c_0^2 + 2XYc_0c_1 + Y^2c_1^2) + \\
& \frac{2c_0c_1}{c_0^2 + c_1^2} (X^2c_0c_1 + XYc_1^2 - XYc_0^2 - Y^2c_0c_1) + \frac{2Xc_0c_1c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} - \frac{2Yc_0^2c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} + \\
& \frac{2Xc_0c_1c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} + \frac{2Yc_1^2c_2}{\sqrt{c_0^2 + c_1^2}} + c_2^2 = H.
\end{aligned}$$

Умножим все слагаемые на подкоренное выражение, перенесем свободный член вправо и обозначим полученную сумму через h .

$$\begin{aligned}
& X^2c_0^2c_1^2 - 2XYc_0^3 + Y^2c_0^4 + X^2c_0^2c_1^2 + 2XYc_0c_1^3 + Y^2c_1^4 + \\
& + 2X^2c_0^2c_1^2 + 2XYc_0c_1^3 - 2XYc_0^3c_1 - 2Y^2c_0^2c_1^2 + \\
& + 2Xc_0c_1c_2\sqrt{c_0^2 + c_1^2} - 2Yc_0^2c_2\sqrt{c_0^2 + c_1^2} + 2Xc_0c_1c_2\sqrt{c_0^2 + c_1^2} + \\
& + 2Yc_1^2c_2 = h, \\
& 4X^2c_0^2c_1^2 + Y^2(c_0^2 - c_1^2) + 4XYc_0c_1(c_0^2 - c_1^2) + \\
& + 4Xc_0c_1c_2\sqrt{c_0^2 + c_1^2} + 2Yc_2(c_1^2 - c_0^2)\sqrt{c_0^2 + c_1^2} = h.
\end{aligned}$$

Поворот системы координат на угол α должен приводить к тому, что коэффициент при множителе XY становится равным нулю, а это возможно в трех случаях:

$$c_0=0 \text{ и } c_1 \neq 0;$$

$$c_0 \neq 0 \text{ и } c_1=0;$$

$$c_0=\pm c_1.$$

В первых двух случаях получаем квадратное уравнение, не зависящее от X , в третьем случае получаем квадратное уравнение, не зависящее от Y , геометрическое представление таких уравнений есть две параллельные прямые. Другими словами, дуальные числа всегда порождают вырожденную параболу.

3.2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Анализ полной квадратичной формы для комплексной алгебры:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}^T * \begin{vmatrix} c_0 + i * d_0 & c_1 + i * d_1 & c_2 + i * d_2 \end{vmatrix}^T = z,$$

$$xc_0 + i * xd_0 + yc_1 + i * yd_1 + c_2 + i * d_2 = z,$$

группируя действительные и мнимые компоненты, получим:

$$(3.2) \quad (xc_0 + yc_1 + c_2) + i * (xd_0 + yd_1 + d_2) = z,$$

$$(xc_0 + yc_1 + c_2)^2 + (xd_0 + yd_1 + d_2)^2 = |z|^2 = H,$$

раскрывая скобки, получим:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & x^2 c_0^2 + y^2 c_1^2 + c_2^2 + 2xyc_0c_1 + 2xc_0c_2 + 2yc_1c_2 + \\ & x^2 d_0^2 + y^2 d_1^2 + d_2^2 + 2xyd_0d_1 + 2xd_0d_2 + 2yd_1d_2 = H. \end{aligned}$$

подобный тому, что был проведен для дуальной алгебры, приводит к громоздким выкладкам. Вместо этого рассмотрим частный и вырожденные случаи эллипсов.

Если компоненты элементов комплексного вектора равны - $c_0=c_1=d_0=d_1=A$ и $c_2=d_2=0$, тогда имеем выражение:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x^2(A^2 + A^2) + y^2(A^2 + A^2) + 2xyA^2 + 2xyA^2 &= H, \\ x^2 + y^2 &= \frac{H}{2A^2}. \end{aligned}$$

уравнение окружности.

Найдем значения компоненты c_2 и d_2 для окружности с центром в произвольной точке $[x_0; y_0]$. В центре окружности модуль комплексного числа z будет равен нулю, следовательно, и действительная и мнимая компоненты z также равны нулю. Тогда уравнение:

$$-x_0A + i * x_0A + y_0A + i * y_0A + c_2 + i * d_2 = 0 + i * 0,$$

можно расписать в виде системы:

$$\begin{cases} -x_0A + y_0A + c_2 = 0 \\ -x_0A + y_0A + d_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} c_2 = A(x_0 - y_0) \\ d_2 = -A(x_0 - y_0) \end{cases},$$

таким образом, коэффициенты c_2 и d_2 отвечают за месторасположение центра.

Для окружности с центром в точке $[0; 0]$ имеем:

$$-xA + i * xA + yA + i * yA = z,$$

пусть $x=0$, тогда:

$$yA + i * yA = z,$$

$$y^2A^2 + y^2A^2 = |z| = H,$$

$$y = A\sqrt{\frac{H}{2}}.$$

В данном случае значение y соответствует радиусу окружности. Геометрический смысл параметра H – расстояние от вершины конуса до точки пересечения его оси с секущей плоскостью.

Если значения компонент d_0 , c_1 , d_1 , c_2 и d_2 зафиксированы, а c_0 стремиться в бесконечность, то эллипс вырождается в отрезок. Доказательство этого утверждения приведено ниже (см. систему уравнений 4.7).

Если $c_0=c_1=d_0=d_1=A$ и $c_2=d_2=0$, тогда получим:

$$x^2(A^2 + A^2) + y^2(A^2 + A^2) + 2xyA^2 + 2xyA^2 = H,$$

$$2A^2x^2 + 2A^2y^2 + 4A^2xy = H,$$

$$(x + y)^2 = \frac{H}{2A^2},$$

$$(3.5) \quad x + y = \pm \sqrt{\frac{H}{2A^2}},$$

уравнение двух параллельных прямых.

Следующий вырожденный случай – это окружность нулевого радиуса, а геометрическая интерпретация – точка, полученная проведением секущей плоскости через вершину конуса. Если секущую сместить ниже вершины конуса, то получим полный набор эллиптических кривых, но уже мнимых.

Другими словами, комплексные числа всегда порождают кривые эллиптического вида.

3.3 ПАРАКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Полная квадратичная форма для случая паракомплексной алгебры выводиться следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}^T * \begin{vmatrix} c_0 + i * d_0 & c_1 + i * d_1 & c_2 + i * d_2 \end{vmatrix}^T = z,$$

$$xc_0 + i * xd_0 + yc_1 + i * yd_1 + c_2 + i * d_2 = z,$$

$$(3.6) \quad (xc_0 + yc_1 + c_2) + i * (xd_0 + yd_1 + d_2) = z,$$

$$(xc_0 + yc_1 + c_2)^2 - (xd_0 + yd_1 + d_2)^2 = |z|^2 = H,$$

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & x^2c_0^2 + y^2c_1^2 + c_2^2 + 2xyc_0c_1 + 2xc_0c_2 + 2yc_1c_2 - \\ & - x^2d_0^2 - y^2d_1^2 - d_2^2 - 2xyd_0d_1 - 2xd_0d_2 - 2yd_1d_2 = H. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный и вырожденные случаи гиперболы.

Если $-d_1=d_0=c_1=c_0=A$ и $c_2=d_2=0$, тогда получим:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & x^2(A^2 - A^2) + y^2(A^2 - A^2) + 2xyA^2 + 2xyA^2 = H, \\ & y = \frac{H}{4A^2x}. \end{aligned}$$

уравнение равносторонней гиперболы, ветви которой расположены в 1 и 3 квадрантах координатной плоскости. Геометрический смысл параметра H – расстояние от вершины конуса до секущей плоскости, которая параллельна оси конуса.

Ранее утверждалось, что мнимые эллипсы получаются перемещением секущей ниже вершины конуса (отрицательные значения H), т.е. «действительная» и «мнимая» секущие параллельны. Сопряженная, она же мнимая гипербола, получится, если «мнимую» секущую провести перпендикулярно «действительной» секущей и параллельно оси конуса.

Вычислительный эксперимент показал, что на асимптотах гиперболы модуль параконкомплексного числа равен нулю:

$$\sqrt{\text{Re}^2 - \text{Im}^2} = 0 \Rightarrow \text{Re}^2 = \text{Im}^2, \Rightarrow \text{Re} = \text{Im},$$

тогда из уравнения (3.6) можно вывести уравнения асимптот:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & xc_0 + yc_1 + c_2 = xd_0 + yd_1 + d_2, \\ & y(c_1 - d_1) = d_2 - c_2 + x(d_0 - c_0), \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & y = x \frac{d_0 - c_0}{c_1 - d_1} + \frac{d_2 - c_2}{c_1 - d_1} \\ & xc_0 + yc_1 + c_2 = -xd_0 - yd_1 - d_2, \\ & y(c_1 + d_1) = -d_2 - c_2 - x(d_0 + c_0), \\ & y = -x \frac{d_0 + c_0}{c_1 + d_1} - \frac{d_2 + c_2}{c_1 + d_1} \end{aligned}$$

Если $c_0=c_1=c_2=0$ или $d_0=d_1=d_2=0$, то асимптоты гиперболы становятся параллельными, кроме того, если $-c_0=c_1=c_2=A$ и $-d_0=d_1=-d_2=B$, или $-c_0=c_1=A$, $-d_0=d_1=B$ и $c_2=d_2=0$, то:

$$y = x \frac{-B + A}{A - B} = x,$$

$$y = -x \frac{-B - A}{A + B} = x,$$

асимптоты ещё и совпадают. В обоих случаях гиперболы вырождаются в две параллельные прямые.

Когда значения компонент c_0, c_1, c_2, d_0 , и d_1 стремятся в бесконечность, гиперболы вырождаются в две пересекающиеся прямые.

Другими словами, паракомплексные числа всегда порождают кривые гиперболического вида.

Таким образом, неявно задавая функцию второго порядка через дуальные числа, получить полного разнообразия параболических кривых не удастся. Далее дуальные числа не рассматриваются, поскольку и комплексные и паракомплексные числа могут порождать две параллельные прямые.

4. Преобразования неявного задания функции

Переходы от неявного задания функции к её каноническому уравнению, параметрическому виду и обратно осуществляются через полную квадратичную форму.

4.1. КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПСА

Воспользуемся общим уравнением кривой второго порядка на плоскости $ХОУ$ в виде [6]:

$$(4.1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Сопоставляя коэффициенты уравнений (3.3) и (4.1), можно установить соответствия между коэффициентами уравнения, описывающего семейство эллипсов и компонентами комплексного вектора:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= c_0^2 + d_0^2, \\
 a_{12} &= c_0 c_1 + d_0 d_1, \\
 a_{22} &= c_1^2 + d_1^2, \\
 a_{13} &= c_0 c_2 + d_0 d_2, \\
 a_{23} &= c_1 c_2 + d_1 d_2, \\
 a_{33} &= c_2^2 + d_2^2 - 1.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Каноническое уравнение эллипса:

$$\tag{4.3} \quad \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

где m и n – величины полуосей эллипса.

Такое уравнение описывает эллипс с центром в начале координат. Чтобы перейти от общего уравнения кривой второго порядка, описывающего произвольный эллипс, к каноническому, необходимо привести повернутую и смещенную систему координат к центральному виду. Координаты каждой точки нужно подвергнуть преобразованию согласно следующим формулам [4]:

$$\begin{aligned}
 x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha - x_0, \\
 y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha - y_0,
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

где α – угол поворота осей координат – определяется как угол между положительным направлением оси OX базовой системы координат и положительным направлением оси O_1X_1 смещенной и повернутой системы;

(x_0, y_0) – точка, в которую осуществляется параллельный перенос базовой системы координат.

Подставим в (4.3) формулы перехода к старым координатам (4.4):

$$(4.5) \quad \frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha + x_0)^2}{m^2} + \frac{(-x \sin \alpha + y \cos \alpha - y_0)^2}{n^2} = 1.$$

Далее раскроем скобки и приведем подобные. Сопоставляя результат преобразования и квадратичную форму (4.1), найдем выражение, позволяющее определить коэффициенты общего уравнения кривой второго порядка посредством базовых характеристик эллипса – длины полуосей, угла поворота относительно базовой системы координат и координат центра эллипса:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{m^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{n^2} \sin^2 \alpha, \\ a_{12} &= -\frac{1}{m^2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{n^2} \sin \alpha \cos \alpha, \\ a_{22} &= \frac{1}{m^2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{n^2} \cos^2 \alpha, \\ a_{13} &= -\frac{x_0}{m^2} \cos^2 \alpha - \frac{y_0}{n^2} \sin^2 \alpha, \\ a_{23} &= -\frac{x_0}{m^2} \sin^2 \alpha - \frac{y_0}{n^2} \cos^2 \alpha, \\ a_{33} &= \frac{x_0^2}{m^2} + \frac{y_0^2}{n^2} - 1. \end{aligned}$$

Далее выразим компоненты комплексного вектора через характеристики эллипса, сопоставив системы (4.2) и (4.6):

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{m} \cos \alpha, \\
 d_0 &= \frac{1}{n} \sin \alpha, \\
 c_1 &= -\frac{1}{m} \sin \alpha, \\
 d_1 &= \frac{1}{n} \cos \alpha, \\
 c_2 &= -\frac{x_0}{m}, \\
 d_2 &= -\frac{y_0}{n}.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

где m и n – величины полуосей эллипса;

(x_0, y_0) – координаты центра эллипса;

α – угол поворота системы координат.

Таким образом, имея геометрические характеристики произвольного эллипса, можно получить соответствующие ему компоненты комплексного вектора.

Анализ системы (4.7) показывает, что если значения компонент d_0 , c_1 , d_1 , c_2 и d_2 зафиксированы, а c_0 стремится в бесконечность, то полуось m и координата x_0 стремятся к нулю, а эллипс вырождается в отрезок – в свою удвоенную полуось, перпендикулярную оси OX . Если в бесконечность стремится компонента c_1 или d_1 , то отрезок будет перпендикулярен оси OY .

Для перехода от компонент комплексного вектора к каноническому уравнению, необходимо выписать полную квадратичную форму и преобразовать её классическим образом [4].

4.2 ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ЭЛЛИПСА

Сопоставляя параметрическое задание эллипса:

$$(4.9) \quad \begin{cases} x = m \cos t \\ y = n \sin t \end{cases}$$

и формулы преобразования координат (4.4) получим:

$$(4.9) \quad \begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha - x_0 = m \cos t \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha - y_0 = n \sin t \end{cases}$$

Разделим первую строку системы (4.9) на $\cos \alpha$, а вторую на $\sin \alpha$, и сложим полученные результаты:

$$(4.10) \quad y \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{m \cos t}{\cos \alpha} + \frac{n \sin t}{\sin \alpha} + \frac{x_0}{\cos \alpha} + \frac{y_0}{\sin \alpha}$$

$$y = \frac{\frac{m \cos t}{\cos \alpha} + \frac{n \sin t}{\sin \alpha} + \frac{x_0}{\cos \alpha} + \frac{y_0}{\sin \alpha}}{\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}}.$$

Окончательный вид выражения (4.10) после упрощения:

$$(4.11) \quad y = (m \cos t + x_0) \sin \alpha + (n \sin t + y_0) \cos \alpha$$

Согласно описанной схеме, выразим из системы (4.9) x через известные характеристики эллипса и параметры поворота и переноса исходной системы координат:

$$(4.12) \quad x \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{m \cos t}{\sin \alpha} - \frac{n \sin t}{\cos \alpha} + \frac{x_0}{\sin \alpha} - \frac{y_0}{\cos \alpha}$$

$$x = \frac{\frac{m \cos t}{\sin \alpha} - \frac{n \sin t}{\cos \alpha} + \frac{x_0}{\sin \alpha} - \frac{y_0}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}}$$

Преобразуем это выражение к виду (4.11):

$$(4.13) \quad x = (m \cos t + x_0) \sin \alpha - (n \sin t + y_0) \cos \alpha$$

Таким образом, параметрическое задание смещенного и повернутого эллипса описывается следующей системой:

$$(4.14) \quad \begin{cases} x = (m \cos t + x_0) \sin \alpha - (n \sin t + y_0) \cos \alpha \\ y = (m \cos t + x_0) \sin \alpha + (n \sin t + y_0) \cos \alpha \end{cases}$$

Распишем уравнение (3.2) в виде системы уравнений:

$$(4.15) \quad \begin{cases} xc_0 + yc_1 + c_2 = \operatorname{Re}(z) \\ xd_0 + yd_1 + d_2 = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

Её решение относительно неизвестных x и y :

$$(4.16) \quad \begin{cases} x = \frac{(\operatorname{Re}(z) - c_2)d_1 - (\operatorname{Im}(z) - d_2)c_1}{c_0d_1 - c_1d_0} \\ y = \frac{(\operatorname{Im}(z) - d_2)c_0 - (\operatorname{Re}(z) - c_0)d_0}{c_0d_1 - c_1d_0} \end{cases}$$

Далее, осуществим подстановку в (4.16) значения коэффициентов комплексного вектора (4.7)

$$(4.17) \quad x = \frac{\left(\operatorname{Re} z + \frac{x_0}{m}\right) \frac{\cos \alpha}{n} - \left(\operatorname{Im} z + \frac{y_0}{n}\right) \frac{\sin \alpha}{m}}{2 \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{mn}} =$$

$$= (m \operatorname{Re} z + x_0) \cos \alpha - (n \operatorname{Im} z + y_0) \sin \alpha$$

Аналогичное выражение можно получить и для y .

Сопоставляя (4.14), (4.17) и используя основное тригонометрическое тождество, приравняем:

$$\operatorname{Re}(z) = \cos(t) \text{ и } \operatorname{Im}(z) = \sin(t),$$

тогда из (4.16) получим:

$$\begin{cases} x = \frac{(\cos t - c_2)d_1 - (\sin t - d_2)c_1}{c_0d_1 - c_1d_0} = \frac{c_1d_2 - c_2d_1 + d_1 \cos t - c_1 \sin t}{c_0d_1 - c_1d_0} \\ y = \frac{(\sin t - d_2)c_0 - (\cos t - c_0)d_0}{c_0d_1 - c_1d_0} = \frac{c_2d_0 - c_0d_2 + c_0 \sin t - d_0 \cos t}{c_0d_1 - c_1d_0} \end{cases}$$

Преобразуя эту систему, с использованием соотношения:

$$A \sin t \pm B \cos t = \sqrt{A^2 + B^2} * \sin(t \mp \varphi)$$

где $\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

получим:

$$(4.18) \quad \begin{cases} x = \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1 + \sqrt{d_1^2 + c_1^2} * \cos(t - \varphi_1)}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ y = \frac{c_2 d_0 - c_0 d_2 + \sqrt{c_0^2 + d_0^2} * \sin(t - \varphi_0)}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2 + c_1^2}}; \sin \varphi_1 = \frac{c_1}{\sqrt{d_1^2 + c_1^2}}$$

где

$$\cos \varphi_0 = \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}}; \sin \varphi_0 = \frac{d_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}}$$

Вычислительный эксперимент показал, что параметрическое представление эллипса, через компоненты вектора весов выглядит следующим образом:

$$(4.19) \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{d_1^2 + c_1^2}}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \cos \left(t - \arccos \left(\frac{d_1}{\sqrt{d_1^2 + c_1^2}} \right) \right) + \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ y = \frac{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \sin \left(t - \arccos \left(\frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}} \right) \right) + \frac{c_2 d_0 - c_0 d_2}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases}$$

Теперь решим обратную задачу – получим компоненты вектора весов исходя из коэффициентов параметрического представления эллипса:

$$(4.20) \quad \begin{cases} x = b_0 \cos(t + b_1) + b_2 \\ y = b_3 \sin(t + b_4) + b_5 \end{cases}$$

Сопоставляя системы уравнений 4.18, 4.19 и 4.20 получим систему уравнений:

$$(4.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{\sqrt{d_1^2 + c_1^2}}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ b_3 = \frac{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ \cos b_1 = \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2 + c_1^2}} \\ \cos b_4 = \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}} \\ \sin b_1 = \frac{c_1}{\sqrt{d_1^2 + c_1^2}} \\ \sin b_4 = \frac{d_0}{\sqrt{c_0^2 + d_0^2}} \\ b_2 = \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ b_5 = \frac{c_2 d_0 - c_0 d_2}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{array} \right.$$

Из 6 первых уравнений системы 4.21, упрощая и проводя замену переменных, получим линейную систему из 4 уравнений с четырьмя неизвестными:

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 \cos(b_1) = g_0 = \frac{d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ b_0 \sin(b_1) = g_1 = \frac{c_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ b_3 \cos(b_4) = g_2 = \frac{c_0}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ b_3 \sin(b_4) = g_3 = \frac{d_0}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{array} \right.$$

Решением системы 4.22 служат соотношения:

$$(4.23) \quad c_0 = \frac{g_2}{g_0 g_2 - g_1 g_3}$$

$$(4.24) \quad c_1 = \frac{g_1}{g_0 g_2 - g_1 g_3}$$

$$(4.25) \quad d_0 = \frac{g_3}{g_0 g_2 - g_1 g_3}$$

$$(4.26) \quad d_1 = \frac{g_0}{g_0 g_2 - g_1 g_3}$$

Теперь последние 2 уравнения системы 4.21 содержат два неизвестных:

$$(4.27) \quad \begin{cases} b_2 = \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ b_5 = \frac{c_2 d_0 - c_0 d_2}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases} \begin{cases} b_2 (c_0 d_1 - c_1 d_0) = c_1 d_2 - c_2 d_1 \\ b_5 (c_0 d_1 - c_1 d_0) = c_2 d_0 - c_0 d_2 \end{cases}$$

Решая систему 4.27, получим:

$$(4.28) \quad c_2 = -b_2 c_0 - b_5 c_1$$

$$(4.28) \quad d_2 = -b_2 d_0 - b_5 d_1$$

Вычислительный эксперимент показал, что компоненты вектора весов зависят от коэффициентов параметрического представления следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_0 &= -\frac{\cos b_4}{b_0 \cos(b_1 - b_4)} \\
d_0 &= -\frac{\sin b_4}{b_0 \cos(b_1 - b_4)} \\
c_1 &= -\frac{\sin b_1}{b_3 \cos(b_1 - b_4)} \\
d_1 &= \frac{\cos b_1}{b_3 \cos(b_1 - b_4)} \\
c_2 &= \frac{b_2 b_3 \cos b_4 + b_0 b_5 \sin b_1}{b_0 b_3 \cos(b_1 - b_4)} \\
d_2 &= \frac{b_2 b_3 \sin b_4 - b_0 b_5 \cos b_1}{b_0 b_3 \cos(b_1 - b_4)}
\end{aligned}
\tag{4.29}$$

4.3 КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Повторяя последовательность преобразований (формулы 4.1–4.7), но уже для канонического уравнения гиперболы:

$$(4.30) \quad \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$$

получим зависимость компонентов паракомплексного вектора от геометрических характеристик произвольной гиперболы:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{m} \cos \alpha, \\
d_0 &= \frac{1}{n} \sin \alpha, \\
c_1 &= -\frac{1}{m} \sin \alpha, \\
d_1 &= \frac{1}{n} \cos \alpha, \\
c_2 &= -\frac{x_0}{m}, \\
d_2 &= -\frac{y_0}{n}.
\end{aligned}
\tag{4.31}$$

4.4 ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Используя параметрическое задание гиперболы:

$$\begin{cases} x = m \cosh t \\ y = n \sinh t \end{cases}
\tag{4.32}$$

и повторяя последовательность преобразований (формулы 4.8 – 4.17), получим параметрическое задание гиперболы через компоненты паракомплексного вектора следующего вида:

$$\begin{cases} x = \frac{d_1 \cosh t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} - \frac{c_1 \sinh t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} + \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \\ y = \frac{c_0 \sinh t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} - \frac{d_0 \cosh t}{c_0 d_1 - c_1 d_0} + \frac{c_2 d_0 - c_0 d_2}{c_0 d_1 - c_1 d_0} \end{cases}
\tag{4.33}$$

Решая обратную задачу – получение коэффициентов паракомплексного вектора из коэффициентов параметрического представления гиперболы:

$$\begin{cases} x = g_0 \cosh t - g_1 \sinh t + g_2 \\ y = g_3 \sinh t - g_4 \cosh t + g_5 \end{cases}
\tag{4.34}$$

получим систему уравнений аналогичную системе 4.22. Далее, повторяя последовательность преобразований (формулы 4.22 – 4.23), получим:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{g_3}{g_0g_3 - g_1g_4} \\
 d_0 &= \frac{g_4}{g_0g_3 - g_1g_4} \\
 c_1 &= \frac{g_1}{g_0g_3 - g_1g_4} \\
 d_1 &= \frac{g_0}{g_0g_3 - g_1g_4} \\
 c_2 &= -\frac{g_2g_3 + g_1g_5}{g_0g_3 - g_1g_4} \\
 d_2 &= -\frac{g_2g_4 + g_0g_5}{g_0g_3 - g_1g_4}
 \end{aligned}
 \tag{4.35}$$

5. Заключение

На рисунке 4 приведено изображение окна программы, которая демонстрирует взаимосвязь различных способов описания эллиптических и гиперболических кривых и идентичность такого представления.

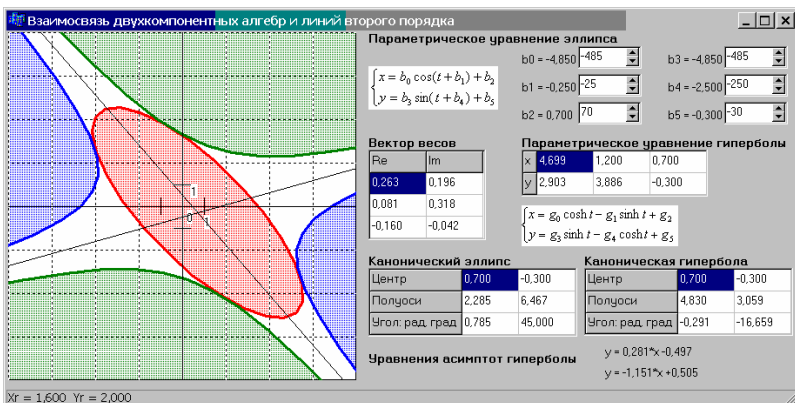


Рис. 4. Скриншот демо программы

В графической части окна программы выводятся:

- асимптоты гипербол;
- действительная гиперболы (синяя линия);
- мнимая гиперболы (зеленая линия);
- эллипс.

Эллиптическая линия рисуется исходя из параметрического представления эллипса, коэффициенты которого можно менять. Значения компонент комплекснозначного вектора весов вычисляются по формулам 4.29.

Из координат каждого пикселя графической части окна формируется вещественнозначный вектор, который умножается на комплекснозначный вектор весов. Если значение модуля результата меньше 1, то соответствующий пиксель окрашивается в красный цвет.

Из компонент комплекснозначного вектора весов вычисляются геометрические характеристики эллипса:

- координаты центра;
- значения полуосей;
- угол поворота системы координат.

Значения компонент комплекснозначного вектора весов приравниваются компонентам паракомплекснозначного вектора.

Из координат каждого пикселя графической части окна формируется вещественнозначный вектор, который умножается на паракомплекснозначный вектор весов. Если значение модуля результата меньше -1 , то соответствующий пиксель окрашивается в зеленый цвет (мнимая гипербола), если значение модуля результата больше 1 , то соответствующий пиксель окрашивается в синий цвет (действительная гипербола).

Из компонент паракомплекснозначного вектора весов вычисляются характеристики гипербол:

- координаты центра;
- значения полуосей;
- угол поворота системы координат;
- уравнения асимптот;
- коэффициенты параметрического представления.

Таким образом, кривые второго порядка отображаются 2 способами: параметрически (собственно линии) и через умножение векторов (заливка областей). Результаты отображения обоих способов соответствуют друг другу, следовательно, приведенные выше математические выкладки верны.

В работе [7] показано существование мнимых дополнений к кривым второго порядка. Мнимым дополнением к эллипсу служит касательная гипербола, и наоборот мнимым дополнением гиперболы будет эллипс. Описанный выше метод можно использовать для построения мнимых дополнений к линиям второго порядка.

Кроме того, по аналогии с сечениями конуса, можно высказать следующие предположения:

- известные двухкомпонентные алгебры есть результат некоторого разложения более общего объекта;
- этот гипотетический объект тоже есть алгебра, причем алгебра 3 компонентная.

Тогда:

- третья компонента гипотетической алгебры должна отвечать за некоторое константное преобразование (предположительно вращение);
- текущая процедура разложения ассиметрична, поскольку с помощью дуальной алгебры не удаётся получить полного разнообразия параболический кривых;
- альтернативная процедура разложения должна давать алгебру изоморфную дуальной с наличием параболической тригонометрии.

Литература

1. КАНТОР И.Л., СОЛОДОВНИКОВ А.С. *Гиперкомплексные числа* – М.: Наука, 1973. – 144 с.
2. КАРАТАЕВ Е.А. *Гиперкомплексные числа. Классификатор* [Электронный ресурс]//URL:<http://karataev.nm.ru/hipclass.pdf> (дата обращения 11.12.2008).
3. ФРОЛОВ С.В., ШОСТАК Р.Я. *Курс высшей математики* : учеб. для вузов. – М. : Высшая школа, 1966. – 663 с.
4. ГИНИЯТУЛЛИН В.М. *Моделирование логических функций в нейросетевом базисе* // Нефтегазовое дело. – 2008. – Т. 6, № 1. – С. 35–43.
5. ПАВЛОВ Д.Г., ПРОСАНДЕЕВА М.С., ПАНЧЕЛЮГА В.А. *О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел* // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2007. – Т 4, № 7. – С. 93–97.
6. ЕФИМОВ Н.В. *Квадратичные формы и матрицы* – М.: Наука, 1975. – 160 с.
7. ГИРШ А.Г. *Теория и практика мнимых образов в геометрии* [Электронный ресурс] // URL: http://www.mai.ru/~aprg/Volume7/v7_n16.htm (дата обращения 11.12.2008).

INTERRELATION OF TWO-COMPONENTAL ALGEBRAS AND LINES OF THE SECOND ORDER

Vulfin A.M., Ufa state aviation technological university, Ufa, post-graduate (skevalt@bk.ru).

Giniatullin V.M., Ufa state petroleum technological university, Ufa, Cand.Sc., assistant professor (fentazer@mail.ru)

Abstract: In work the interrelation of two-componential algebras, square-law functions and lines of the second order is considered. To be entered an original way of the implicit task of functions. Mutual conformity of some algebra and concrete kind of a curve is shown. Are considered private and degenerated cases of lines of the second order. From the implicit task of function the algorithm of transition is resulted in its initial equation, a parametrical kind and back.

Keywords: two-componential algebra, line of the second order, the implicit task of function, the initial equation, parametrical kind of dependence.