

УДК 519.833.2

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ РЫНКИ КУРНО¹

В.И. Зоркальцев, М.А. Киселева

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130
zork@isem.sei.irk.ru, marinee@mail.ru

Аннотация. Рассматривается модель функционирования нескольких взаимодействующих рынков Курно. Рынки названы взаимодействующими, поскольку на каждом из них действует один и тот же состав продавцов. Каждый из них выбирает объемы поставок своей продукции на разные рынки, исходя из складывающихся на них ценовых ситуаций, своих затрат и своих ограничений на используемые технологии по производству и поставкам продукции. Доказано, что в случае линейных функций спроса на всех рынках проблема поиска равновесия на взаимодействующих рынках Курно является «потенциальной игрой», то есть равносильна некоторой задаче математического программирования.

Ключевые слова: модель Курно, равновесие Нэша, потенциальная игра.

Введение

Многие сферы российской экономики функционируют в виде олигопольных рынков, то есть с небольшим количеством продавцов, которые могут существенно влиять на ценовую ситуацию. Эти рынки характеризуются большим многообразием форм организации конкуренции, потенциальной неустойчивостью из-за возможных, непредсказуемых смен правил поведения отдельных участников, возможностями использования продавцами разных форм сговора. Причем олигопольными в нашей стране являются многие инфраструктурные отрасли экономики, в том числе электроэнергетика, железнодорожный транспорт, трубопроводные системы, авиаперевозки, связь. Поэтому исследование особенностей функционирования олигопольных рынков, в том числе на базе математического моделирования, является важной в теоретическом и практическом аспектах задачей.

Часто исследования олигополий ограничиваются примерами изучения свойств одного, единого рынка. Вместе с тем, нередко ситуации, когда один и тот же состав олигополистов конкурирует на нескольких рынках. Например, в электроэнергетике небольшое число предприятий-производителей продает свою продукцию не только на нескольких территориально разных рынках, но и на рынках разных видов продукции

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 13-06-00152а «Рынки несовершенной конкуренции в электроэнергетике: модели и механизмы функционирования».

- на рынках мощности, электроэнергии в разные часы суток и с разной заблаговременностью.

Объектом исследования в данной статье является модель функционирования нескольких взаимосвязанных олигопольных рынков с одним и тем же составом продавцов. Рынки названы «взаимодействующими», поскольку отдельный продавец может перераспределять свои поставки товаров на разные рынки с учетом своих возможностей и затрат, особенностей ценообразования на разных рынках.

В данной статье рассматривается модель формирования равновесных состояний рынков Курно с линейными (линеаризованными) функциями спроса. Равновесными здесь названы такие ситуации, в которых ни одному из продавцов не выгодно менять принятое им решение. Такое состояние принято называть равновесием Нэша. Рассматриваемая модель называется моделью взаимодействующих рынков Курно, поскольку каждый из продавцов в качестве инструментальных переменных использует только объемы поставляемых им товаров на каждый из рынков. Цены на рынках формируются из обратных функций спроса на этих рынках, задающих связь цены с суммарным по всем поставщикам объемом поставок товара на этот рынок.

Равновесие в модели Курно находится из совокупного решения задач максимизации прибыли каждым производителем при фиксированных объемах продаж остальных, т.е. равновесие – это решение задачи многосубъектной оптимизации. Если задача оптимизации каждого субъекта при заданных решениях других субъектов имеет вид задачи выпуклого программирования, то, как известно, ее можно представить в виде равносильной системы уравнений и неравенств, отражающей условия оптимальности (Каруша-Куна-Таккера) этой задачи. Собрав воедино такие системы для всех субъектов, получим систему уравнений и неравенств, решения которой будут составлять равновесия Нэша. В отдельных случаях такая обобщенная система сама может интерпретироваться как система условий оптимальности некоторой единой задачи оптимизации. Возможность представления задачи согласования решений в модели Курно в виде одной задачи оптимизации представляет теоретический и практический интерес. Уже сама по себе интересна ситуация, когда участники рынка, ведущие себя эгоистически, неявно максимизируют какую-то одну общую целевую функцию.

В теории игр такой феномен, когда задача поиска равновесия эквивалентна некоторой задаче оптимизации, называется потенциальной игрой. Потенциальность позволяет пользоваться хорошо разработанным аппаратом теории и методов оптимизации при теоретических исследованиях (в том числе для выяснения вопросов существования и единственности решений), для поиска равновесных решений.

Вопрос потенциальности модели рынка Курно поднимался и исследовался в работах Bergstrom and Varian [3], M. Slade [6], Monderer and Shapley [5], Кукушкин [4]. Так, впервые в [6], позже в общем виде в [5, 4] показано, что игра, соответствующая модели рынка Курно, является потенциальной, если и только если спрос является линейной функцией.

Ранее в [1] мы рассматривали модель нескольких взаимодействующих олигопсонных рынков – ситуацию согласования решений в производственных системах при использовании некоторых общих ресурсов, когда затраты на использование каждого из этих ресурсов зависят от того, в какой мере они используются другими производителями-участниками рынка. В [1] доказана потенциальность такой модели при линейных функциях удельных затрат и указывается способ конструирования потенциала для нахождения равновесия. Одна из целей настоящей работы – перенести использованный ранее подход описанию олигопсонных рынков [1] на ситуацию взаимодействующих олигопольных рынков.

В олигопольных рынках нередко возникают ситуации, когда некоторые продавцы пользуются каким-то единым ограниченным ресурсом. Например, это могут быть линии электропередач из одного пункта в другой, которыми пользуются несколько генерирующих компаний. Это может быть также газопровод, по которому перекачивают газ несколько поставщиков этого ресурса на данный рынок. Одной из целей данной статьи является исследование и интерпретация потенциальных моделей взаимодействующих рынков Курно при наличии общих ограничивающих ресурсов у нескольких продавцов.

1. Исходные определения

Рассмотрим модель взаимодействия производителей-олигополистов, когда они продают свою продукцию на разных рынках. Обозначим $l = 1, \dots, L$ номера предприятий, поставляющих продукцию на рынки с номерами $m = 1, \dots, M$. На каждом рынке продается один вид товара в объеме

$$z_m = \sum_{l=1}^L z_m^l, \quad m = 1, \dots, M, \quad (1)$$

где z_m^l – объем товара m (объем товара на рынке m), поставляемого поставщиком (производителем) l . Будем обозначать z и z^l векторы R^M с компонентами z_m и z_m^l , $l = 1, \dots, L$.

На каждом рынке задана обратная функция спроса, характеризующая зависимость уровня цены от объема продаваемого товара. Считаем, что эта линейная функция. Она имеет вид

$$P_m(z_m) = \beta_m - \alpha_m z_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (2)$$

где β_m , α_m – заданные весовые коэффициенты, причем $\alpha_m > 0$.

Произведение цены на объем проданного товара рынка m и составляет доход на этом рынке производится l . Этот доход является функцией от величин z_m и z_m^l . Обозначим эту функцию

$$I_m^l(z_m, z_m^l) = P_m(z_m) z_m^l. \quad (3)$$

Соответственно, суммарный доход поставщика l на всех рынках является функцией от векторов z и z^l . Обозначим эту функцию

$$I^l(z, z^l) = \sum_{m=1}^M I_m^l(z_m, z_m^l). \quad (4)$$

В рассматриваемой далее модели компоненты векторов z и z^l , $l = 1, \dots, L$ являются переменными величинами. В качестве переменных выступают также компоненты векторов интенсивности технологических способов x^l из R^{n_l} , где n_l – число технологических способов у производителя l .

Отметим, что частная производная функции I^l по переменной z_m^l равна частной производной функции I_m^l по той же переменной и имеет следующее выражение

$$\frac{\partial I^l(z, z^l)}{\partial z_m^l} = \beta_m - \alpha_m z_m - \alpha_m z_m^l. \quad (5)$$

У каждого производителя $l = 1, \dots, L$ имеется система линейных ограничений на переменные

$$A^l x^l = b^l, \quad x^l \geq 0, \quad (6)$$

$$z^l - D^l x^l = g^l. \quad (7)$$

Здесь заданными являются матрица A^l размера $t_l \times n_l$ при некотором целом t_l , матрица D^l размера $M \times n_l$, векторы $b^l \in R^{t_l}$ и $g^l \in R^M$.

Условия (6) представляют стандартные балансовые ограничения и ограничения на неотрицательность значений интенсивностей технологий. В частности, в систему линейных уравнений могут входить ограничения на суммарное потребление в разных технологиях производителя l располагаемого им какого-либо производственного ресурса, заданный объем которого составляет соответствующую компоненту вектора b^l .

Коэффициент d_{ij}^l матрицы D^l в условии (7) можно интерпретировать как объем выпуска при единичной интенсивности технологического способа $j = 1, \dots, n_l$ продукции для рынка $i = 1, \dots, M$. Не исключено, что d_{ij}^l – отрицательные величины, что соответствует использованию продукции i в технологии j . Компоненты вектора g^l (при $g^l < 0$) можно интерпретировать как заданные объемы потребности в соответствующих товарах самого l -го производителя.

Обозначим $F_j^l(x_j^l)$ функцию затрат на технологию j производителя l . Будем считать, что это выпуклая дифференцируемая функция. Ее производную обозначим

$$f_j^l(x_j^l) = \frac{dF_j^l(x_j^l)}{dx_j^l}. \quad (8)$$

Прибыль каждого поставщика равна разнице между доходами от реализации товаров на всех рынках и затратами производства. Ее представим в виде функции от векторов z , z^l , x^l

$$\pi^l(z, z^l, x^l) = \sum_{m=1}^M (\beta_m - \alpha_m z_m) z_m^l - \sum_{j=1}^{n_l} F_j^l(x_j^l). \quad (9)$$

2. Модель олигополии Курно

Допустимыми решениями для поставщика $l = 1, \dots, L$ назовем такие векторы x^l , z^l , при которых выполняются ограничения (6), (7) этого поставщика. Будем считать, что каждый поставщик стремится выбрать такие допустимые для него решения, при которых его прибыль (9) будет как можно больше. То есть, поставщик l решает задачу

$$\pi^l(z^{-l} + z^l, x^l) \rightarrow \max_{z^l, x^l} \quad (10)$$

при ограничениях (6), (7). Здесь считается фиксированным вектор

$$z^{-l} = z - z^l, \quad (11)$$

где z – определяемый правилом (1) вектор суммарных объемов поставок товаров на каждый рынок.

Отметим, что оптимизация решения каждого субъекта l осуществляется только по контролируемым им переменным, составляющим векторы z^l и x^l . При этом оптимальное решение каждого из субъектов зависит от решений, принятых остальными субъектами, что отражается в зависимости значения целевой функции от вектора z^{-l} . При изменении решений остальных субъектов, приводящих к изменениям компонент вектора z^{-l} , может меняться оптимальное решение l -го субъекта. В свою очередь, изменение решения l -го субъекта может привести к изменениям решений остальных поставщиков. Особый интерес в такой ситуации представляет поиск равновесия Нэша – такого набора решений отдельных субъектов, в рамках которого ни одному из них не выгодно менять свое решение на другое, допустимое по его ограничениям.

Определение. Векторы $(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$ составляют равновесные по Нэшу решения рассматриваемой модели взаимодействующих олигопольных рынков в том и только том случае, если для каждого $l = 1, \dots, L$ пара векторов z^l, x^l является решением задачи оптимизации (10), где вектор z^{-l} определяется из условий (1), (11), в которых используются векторы z^i , входящие в решение аналогичной задачи оптимизации субъектов $i \neq l$.

Согласно приведенному определению задача поиска равновесия Нэша представляется как сложная в теоретическом и алгоритмическом отношениях проблема многосубъектной оптимизации, как проблема одновременного поиска оптимальных решений задач (10) для всех субъектов $l = 1, \dots, L$. Один из возможных путей поиска решения этой проблемы – сведение ее к системе уравнений и неравенств на основе использования условий оптимальности для задачи каждого субъекта.

Отметим, что задача (10) относится к классу задач выпуклого программирования с дифференцируемой целевой функцией при линейных ограничениях. Для того, чтобы векторы z^l, x^l составляли оптимальное решение данной задачи, необходимо и достаточно выполнения для этих векторов исходных ограничений (6), (7), и условий

$$f_j^l(x_j^l) + \left((A^l)^T \lambda^l \right)_j - \left((D^l)^T u^l \right)_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_l \quad (12)$$

$$(x^l)^T f^l(x^l) + (b^l)^T \lambda^l + (g^l - z^l)^T u^l = 0, \quad (13)$$

$$u_m^l = \beta_m - \alpha_m z_m^{-l} - 2\alpha_m z_m^l, \quad m = 1, \dots, M, \quad (14)$$

при некоторых $\lambda^l \in R^{t_l}$, $u^l \in R^M$. Здесь λ^l – вектор множителей Лагранжа ограничений-равенств в (6), u^l – вектор множителей Лагранжа ограничений (7). Отметим, что в условии (14) вектор z^{-l} априори, применительно только к задаче оптимизации (10) при данном l , рассматривается как фиксированный.

Рассмотрим одновременно L систем (6), (7), (12) – (14) для всех $l = 1, \dots, L$ как одну систему. Дополним её условием (1), считая что в условии (14) величины z_m^l для всех $l = 1, \dots, L$ являются переменными. То есть считаем, что в условиях (14) вектор z_m^{-l} состоит уже из переменных величин, связанных условиями (1), (11) с векторами z^i , $i = 1, \dots, L$. Решения такой обобщенной и расширенной системы будут состоять из согласованных (равновесных по Нэшу) решений задач оптимизации (10) каждого субъекта и, наоборот, любое равновесное по Нэшу решение будет решением данной расширенной и дополненной системы. Справедлива

Теорема 1. Векторы $(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$ составляют равновесные по Нэшу решения набора задач оптимизации (10) при $l = 1, \dots, L$ в том и только том случае, если эти векторы при некоторых векторах $\lambda^l \in R^{t_l}$, $u^l \in R^M$ для всех $l = 1, \dots, L$ удовлетворяют условиям (1), (6), (7), (12) – (14).

Заметим, что равенство (13), отражающее условие дополняющей нежесткости в условиях оптимальности Куна-Таккера, содержит нелинейность, что представляет значительную вычислительную трудность.

3. Представление проблемы поиска равновесия Нэша в виде задачи выпуклого программирования

Введем функцию от векторов $x^l \in R^{n_l}$, $z^l \in R^M$, $l = 1, \dots, L$. Пусть

$$\begin{aligned} H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L) = & \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M (\beta_m - \alpha_m z_m^{-l}) z_m^l + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \alpha_m \left(\left(\sum_{l=1}^L z_m^l \right)^2 - \sum_{l=1}^L (z_m^l)^2 \right) - \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^{n_l} F_j^l(x_j^l). \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу выпуклого программирования с переменными, составляющими векторы $z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L$

$$H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L) \rightarrow \max, \quad (15)$$

при условиях (6), (7) для всех $l = 1, \dots, L$.

Отметим, что для введенной здесь функции H ее производные по оптимизируемым переменным каждого производителя совпадают с производными его функции прибыли по тем же переменным: для всех $l = 1, \dots, L$

$$\frac{\partial H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)}{\partial z_m^l} = \frac{\partial \pi^l(z, z^l, x^l)}{\partial z_m^l}, \quad m = 1, \dots, M,$$

$$\frac{\partial H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)}{\partial x_j^l} = \frac{\partial \pi^l(z, z^l, x^l)}{\partial x_j^l}, \quad j = 1, \dots, n_l.$$

Функция $H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$ является строго вогнутой по векторам $z^1, \dots, z^L$. Для доказательства этого факта достаточно показать строгую выпуклость функции $-H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$ по этим векторам. Выпишем вторые производные функции $-H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$:

$$\frac{\partial^2 (-H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L))}{\partial z_m^l \partial z_m^l} = 2\alpha_m,$$

$$\frac{\partial^2 (-H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L))}{\partial z_m^l \partial z_m^k} = \alpha_m, k \neq l.$$

Матрица Гессе вторых производных функции $-H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$ – блочно-диагональная. Ее ненулевые элементы образуют M размещенных по главной диагонали подматриц размера $L \times L$:

$$G_m = \begin{pmatrix} 2\alpha_m & \alpha_m & \dots & \alpha_m \\ \alpha_m & 2\alpha_m & & \alpha_m \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_m & \dots & 2\alpha_m \end{pmatrix}, \quad m = 1, \dots, M.$$

Квадратичная форма с такой подматрицей для вектора переменных $z \in R^L$ имеет вид

$$z^T G_m z = \alpha_m \left(\sum_{j=1}^L z_j^2 + \left(\sum_{j=1}^L z_j \right)^2 \right).$$

Учитывая условие $\alpha_m > 0$, получаем, что при любом $z \in R^L$, $z \neq 0$,

$$\alpha_m \left(\sum_{j=1}^L z_j^2 + \left(\sum_{j=1}^L z_j \right)^2 \right) > 0.$$

Следовательно, все подматрицы G_m и, соответственно, вся рассматриваемая матрица Гессе положительно определены. Поэтому, функция $-H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$ является строго выпуклой по векторам $z^1, \dots, z^L$. Отсюда следует строгая вогнутость функции $H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$ по этим же векторам.

Функция $H(z^1, \dots, z^L, x^1, \dots, x^L)$ вогнута по векторам $x^1, \dots, x^L$ в силу выпуклости функций $F_j^l(x_j^l)$. Итак, доказано, что функция H – выпуклая, задача (15) относится к классу задач выпуклого программирования.

Согласно условиям оптимальности Куна-Таккера для задачи (15) набор векторов $z^1, \dots, z^L$ из R^M , $x^1, \dots, x^L$ из R^{n_l} , $l = 1, \dots, L$ будет составлять оптимальное решение в том и только том случае, если это решение удовлетворяет условиям (1), (6), (7), (12) – (14) для всех $l = 1, \dots, L$ при некоторых $\lambda^l \in R^{t_l}$, $u^l \in R^M$. Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Оптимальный набор векторов $z^1, \dots, z^L$ из R^M , $x^1, \dots, x^L$ из R^n , $l = 1, \dots, L$ задачи (15) является равновесным по Нэшу, и, наоборот, равновесный по Нэшу набор векторов рассматриваемой модели является решением задачи (15).*

Таким образом, задача нахождения равновесия Нэша в виде системы уравнений и неравенств (1), (6), (7), (12) - (14) эквивалентна задаче выпуклого программирования (15).

4. Обсуждения

1). Теорема 2 дает удобный способ доказательства существования и единственности равновесия Нэша, а также конструктивный путь его нахождения.

Из строгой вогнутости функции H по векторам z^l , $l = 1, \dots, L$ следует, что если равновесие Нэша существует, то оно единственное по данным векторам. Если функции издержек $F_j^l(x_j^l)$ строго выпуклые по своим переменным, то равновесие в рассматриваемой модели будет единственным и по векторам x^l , $l = 1, \dots, L$.

Если функции $F_j^l(x_j^l)$ – линейные или квадратичные, то (15) будет задачей квадратичного программирования, для решения которой существует много эффективных алгоритмов и вычислительных программ. В этом случае для существования у нее решения достаточно совместности ограничений этой и двойственной к ней задач.

2). Условия оптимальности (1), (6), (7), (12) – (14) представляют объем сведений, которыми должен располагать каждый поставщик при формировании равновесных решений. Кроме своих технологических ограничений (6), (7) каждый поставщик должен иметь оценки значений векторов множителей Лагранжа своих ограничений λ^l , u^l , которые связаны с его инструментальными переменными условиями (12), (13).

Принципиально новым по сравнению с условиями оптимальности стандартных задач производственно-распределительной оптимизации является условие (14). Оно выражает равенство множителей Лагранжа ограничений (7) частным производным функции доходов данного поставщика по объемам его поставок на разные рынки. Эти частные производные (правая часть условия (14)) зависят не только от решения данного поставщика, но и через вектор z суммарных объемов поставок на все рынки, от решений других поставщиков. Через условия (1), (14) выражается связь решения данного поставщика l с решениями других поставщиков $i \neq l$.

3). В случае нелинейных функций спроса можно воспользоваться их итеративной линеаризацией. Это позволит свести проблему поиска равновесия Нэша в модели Курно к последовательности задач выпуклого программирования с линейными ограничениями. Такой путь поиска равновесия на взаимодействующих олигопольных рынках намечен и проиллюстрирован на примере в [2].

4). Рассматриваемую здесь модель можно интерпретировать не только как модель взаимодействующих олигопольных, но и олигопсонных рынков. Одни и те же субъекты на одних рынках конкурируют как

продавцы, а на других как покупатели. Примером из реальной экономики служат производители электроэнергии, которые являются не только олигополистами на рынках энергии и мощности, но и олигопсонистами на рынках топлива.

5). Использование потенциальной функции позволяет продемонстрировать отклонение равновесного исхода в рассмотренной модели взаимодействующих рынков Курно от „народнохозяйственного оптимума“. „Народнохозяйственный оптимум“ соответствует ситуации совершенной конкуренции, когда производители и потребители не могут оказывать влияния на рыночную цену. При совершенной конкуренции неявно максимизируется функция общественного благосостояния, равная сумме дополнительных доходов производителей и потребителей. Так, в [2] показано, что при конкуренции Курно неявно максимизируется функция H "неполного" по сравнению с совершенно конкурентным рынком общественного благосостояния, а именно функция благосостояния за вычетом некоторого положительного слагаемого $(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \alpha_m \sum_{l=1}^L (z_m^l)^2)$ из дополнительного дохода потребителей. Следовательно, при олигополии Курно равновесная цена продаваемого товара будет выше, а размер выигрыша потребителей меньше по сравнению с совершенно конкурентным рынком.

6). На разных рынках могут сложиться (как правило, складываются) разные цены.

Дадим на основе условий оптимальности Куна-Таккера (1), (6), – (14) экономическую интерпретацию ценообразования. Рассмотрим случай, когда все производители участвуют на рынке с ненулевыми объемами продаж и поставок, т.е. условие (12) выполняется в виде равенства, и матрица D^l имеет все единичные коэффициенты. В этом случае множитель Лагранжа ограничения (7) для каждого производителя равен его предельным издержкам, а именно сумме предельных затрат от использования технологий и предельных затрат от использования ресурсов

$$u_j^l = f_j^l(x_j^l) + \left((A^l)^T \lambda^l \right)_j, \quad j = 1, \dots, n_l.$$

Из условия (14) получаем, что цена, складывающаяся на рынке m $P_m(z_m) = \beta_m - \alpha_m z_m$, представляется для каждого поставщика в виде суммы его предельных издержек и некоторого слагаемого $\alpha_m z_m^l$, или, что то же самое, она равна превышению предельного дохода каждого поставщика на величину $\alpha_m z_m^l$

$$\beta_m - \alpha_m z_m = u_m^l + \alpha_m z_m^l, \quad m = 1, \dots, M.$$

Это означает также, что рынок Курно приходит в равновесие, когда суммы предельных издержек и величин $\alpha_m z_m^l$ для всех производителей уравниваются. Отсюда вывод, что в рассматриваемой модели на разных рынках будут разные цены в силу разных параметров наклона функций спроса, и, соответственно, цены будут одинаковыми в случае равенства этих параметров.

5. Взаимодействующие олигопольные рынки при наличии общих ограничений у нескольких продавцов

В рассмотренной модели взаимодействующих рынков Курно каждый производитель имел допустимое множество решений, не зависящее от множеств допустимых решений других участников рынка, т.е. ограничения задачи максимизации выигрыша каждого производителя не зависели от переменных оптимизации других участников рыночного взаимодействия. В этом случае, как было продемонстрировано выше, ограничения потенциальной задачи представляют собой объединение ограничений всех производителей.

Возможна ситуация, когда у производителей имеются общие ограничения. Примером таких общих ограничений, например, для производителей электроэнергии, служит наличие единственной линии электропередач; для нескольких продавцов газа – единственного газопровода и т.д.

Дополним рассмотренную в разделах 1,2 модель взаимодействующих рынков Курно K общими для всех производителей линейными ограничениями

$$\sum_{l=1}^L C_i^l x^l \leq t_i, \quad i = 1, \dots, K. \quad (16)$$

Здесь заданными являются матрицы C_i размера $t_i \times n_i$ и величины $t_i \in R^1$, $i = 1, \dots, K$

Тогда каждый поставщик l , считая фиксированным вектор (11) суммарных объемов поставок всех остальных поставщиков, решает задачу (10), в которой к ограничениям (6), (7) добавляются ограничения (16). Условия на равновесие Нэша задаются системой уравнений и неравенств, составленной из условий оптимальности этих задач для всех L игроков. А именно, эти условия включают ограничения (6), (7), (16) и соотношения

$$f_j^l(x_j^l) + \left((A^l)^T \lambda^l \right)_j - \left((D^l)^T u^l \right)_j + \sum_{i=1}^K ((C_i^l)^T v_i^l)_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_l \quad (17)$$

$$(x^l)^T f^l(x^l) + (b^l)^T \lambda^l + (g^l - z^l)^T u^l + \sum_{i=1}^K (x^l)^T (C_i^l)^T v_i^l = 0, \quad (18)$$

$$u_m^l = \beta_m - \alpha_m z_m^{-l} - 2\alpha_m z_m^l, \quad m = 1, \dots, M, \quad (19)$$

$$v_i^l (C_i^l x^l + \sum_{v=1, v \neq l}^L C_i^v x^v - t_i) = 0, \quad v_i^l \geq 0, \quad i = 1, \dots, K, \quad (20)$$

при некоторых $\lambda^l \in R^{t_l}$, $u^l \in R^M$, $v^l \in R^K$. Здесь λ^l – вектор множителей Лагранжа ограничений-равенств в (6), u^l – вектор множителей Лагранжа ограничений (7), v^l – вектор множителей Лагранжа ограничений (16).

Потенциальная задача с введенными общими ограничениями будет иметь вид (15) с добавленными условиями (16). Условия оптимальности

Куна-Таккера для нее включают ограничения (6), (7), (16), условие (19) и условия

$$f_j^l(x_j^l) + \left((A^l)^T \lambda^l \right)_j - \left((D^l)^T u^l \right)_j + \sum_{i=1}^K (C_i^l)^T v_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_l \quad (21)$$

$$(x^l)^T f^l(x^l) + (b^l)^T \lambda^l + (g^l - z^l)^T u^l + \sum_{i=1}^K (x^l)^T (C_i^l)^T v_i = 0, \quad (22)$$

$$v_i \left(\sum_{l=1}^L C_i^l x^l - t_i \right) = 0, v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, K, \quad (23)$$

при некоторых $\lambda^l \in R^{t_l}$, $u^l \in R^M$, $v \in R^1$. Здесь λ^l – вектор множителей Лагранжа ограничений-равенств в (6), u^l – вектор множителей Лагранжа ограничений (7), v_i – множители Лагранжа ограничений (16).

Применительно к решению потенциальной задачи каждое из K общих ограничений будет иметь только один множитель Лагранжа v_i , то есть для всех производителей „теневые цены“ этого ограничения будут одинаковыми. При нахождении же равновесия Нэша из решения системы уравнений и неравенств, составленной из условий оптимальности для всех поставщиков, это ограничение для каждого поставщика будет иметь свой множитель Лагранжа v_i^l (всего $L \times K$ множителей), т.е. обладать своей „теневой ценой“. Следовательно, равновесие Нэша, найденное из решения потенциальной задачи, будет подмножеством равновесий Нэша, найденных из решения системы уравнений и неравенств (условий Куна-Таккера) для всех поставщиков. Равновесные решения этих задач будут совпадать при дополнительном условии равенства множителей Лагранжа этого общего ограничения для всех поставщиков, т.е. когда „теневые цены“ этого ограничения для всех производителей будут одинаковыми.

Таким образом, для модели взаимодействующих рынков Курно с общими ограничениями можем сформулировать следующее утверждение : если потенциальная задача имеет решение, то оно является одним из равновесий Нэша. Если существует равновесие Нэша при дополнительном условии равенства множителей Лагранжа каждого из общих ограничений для всех производителей, то это равновесие совпадает с решением потенциальной задачи. Более полное и детальное изучение вопроса соотношения этих двух задач составляет предмет дальнейших исследований.

Список литературы

- [1] Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Равновесие Нэша производственных планов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. – №3. – С. 219-224.
- [2] Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Олигопольные и олигопсонные взаимосвязанные рынки (препринт). – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. – 19с.

- [3] Bergstrom, T. C. and Varian, H. R. Two Remarks on Cournot Equilibria // Economic Letters. – 1985. – № 19, pp. 5-8.
- [4] Kukushkin N. Congestion games revisited // Int.J Game Theory. – 2007. 36: 57-83.
- [5] Monderer, D. and L. Shapley Potential games // Games and Economic Behavior. – 1996. – № 14, pp. 124-143.
- [6] Margaret E. Slade What does an Oligopoly Maximize? // The Journal of Industrial Economics. – 1994. – Vol. 42, No.1, pp. 45-61.

Interacting Cournot markets

V.I. Zorkaltsev, M.A. Kiseleva

Abstract. The model of several interacting Cournot markets is considered. The markets are named interacting because the same number of producers act on each of them. Every producer chooses his own supply volumes on every market using price situations, his own costs and production and delivery limitations. It is proved that in the linear demand functions case the problem of finding Nash equilibria in the interacting Cournot markets model represents a potential game, i.e. it is equivalent to a mathematical programming problem.

Key words: Cournot model, Nash equilibrium, potential game.

Зоркальцев Валерий Иванович, д.т.н. , профессор, зав. лаб. методов математического моделирования и оптимизации в энергетике ИСЭМ СО РАН, zork@isem.sei.irk.ru

Киселёва Марина Александровна, ст. инженер ИСЭМ СО РАН, marinee@mail.ru

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева (ИСЭМ СО РАН), 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел. +7(3952) 42-97-64.