

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 102
Март 2023***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2023

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 102

Москва – 2023

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Новиков Д.А., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галяев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Кульба В.В. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Поляк Б.Т. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербakov П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фургат И.Б. (ИПМ РАН).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Щеголев А.А.

О центральной предельной теореме для однородных нелинейных цепей Маркова в дискретном времени 5

Математическая теория управления

Зверкина Г.А.

Неравенство Лордена и скорость сходимости распределения одной обобщённой системы массового обслуживания Эрланга – Севастьянова 15

Анализ и синтез систем управления

**Фуртат И.Б., Гущин П.А., Нгуен Б.Х.,
Колесник Н.С.**

Адаптивное управление с гарантией заданного качества регулирования 44

Фуртат И.Б., Гущин П.А., Копысова Е.А.

Нелинейные законы управления, построенные на базе линейных с использованием нечетных функций 58

Сетевые модели в управлении

Тырсин А.Н., Кашеев С.Е.

Индикаторы риска каскадных сбоев взаимосвязанных сетевых структур 76

Надежность и диагностика средств и систем управления

Задиран К.С., Щербаков М.В., Сай Ван Квонг

Прогнозирование остаточного ресурса оборудования в условиях малой выборки данных..... 99

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ¹

Щеголев А. А.²

(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

Класс нелинейных марковских процессов характеризуется наличием зависимости текущего состояния процесса от текущего распределения процесса в дополнение к зависимости от предыдущего состояния процесса. Благодаря этой особенности данные процессы характеризуются сложным предельным поведением и эргодическими свойствами, для которых привычных критериев для марковских процессов недостаточно. Будучи разновидностью нелинейных марковских процессов, нелинейные цепи Маркова унаследовали эти особенности. В работе исследованы условия для выполнения центральной предельной теоремы для однородных нелинейных цепей Маркова в дискретном времени с конечным дискретным фазовым пространством. Также приведен краткий обзор известных результатов об эргодических свойствах нелинейных цепей Маркова. Полученный результат дополняет существующие результаты в данной области и может быть полезен для дальнейших приложений в статистике.

Ключевые слова: нелинейные марковские цепи, центральная предельная теорема, экспоненциальная скорость сходимости.

1. Введение

Класс случайных процессов, имеющих зависимость от закона распределения, впервые был впервые предложен А.А. Власовым [2] для описания динамики плазмы, представляющей собой большую систему заряженных частиц. В дальнейшем, общий класс процессов был изучен Г.П. Маккином [6]. Данные процессы в литературе называют процессами Маккина – Власова, или нелинейными марковскими процессами. Процессы этого вида естественным образом возникают при описании предельного поведения системы большого количества взаимодействующих

¹ Статья подготовлена в ходе проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ). Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №20-01-00575а.

² Александр Алексеевич Щеголев, аспирант НИУ ВШЭ (ashchegolev@hse.ru).

частиц. Данный вид процессов изучался в работах множества авторов, среди которых можно выделить монографии А.С. Шнитмана [11] и В.Н. Колокольцова [5]. В отличие от марковских процессов, нелинейные марковские процессы могут обладать сложными эргодическими свойствами [7, 8], так что классические результаты для марковских процессов могут быть неприменимы.

Изучению эргодических свойств нелинейных цепей Маркова также посвящен ряд работ. Одни из первых результатов изучения эргодических свойств однородных нелинейных цепей Маркова в дискретном времени были получены О.А. Бутковским [1]. В работе были установлены условия существования и единственности инвариантной меры для нелинейных марковских цепей, а также показано на примерах, что стандартного результата для цепей Маркова (выполнения условия Маркова – Добрушина) в данном случае недостаточно для эргодичности процесса. В работе М.Х. Сабурова [9] рассматривается определенный класс (более узкий, чем в работе [1]) нелинейных полиномиальных марковских операторов на конечном пространстве, для которых показано, что при некоторых условиях на коэффициент эргодичности Добрушина достигается эргодичность. В работах [4, 10] также рассматриваются нелинейные цепи Маркова в дискретном времени, обобщается оценка [1] для скорости сходимости на случай использования переходных вероятностей за несколько шагов. На примерах показано, что для переходных ядер за несколько шагов скорость сходимости может быть выше, и показан пример, демонстрирующий, что невыполнение условий [1] в общем случае не препятствует сходимости к единственной инвариантной мере. Также в работе [10] представлен результат об условиях выполнения закона больших чисел для нелинейных цепей Маркова в дискретном времени. В работе Б.А. Нойман [8] рассматриваются эргодические свойства нелинейных цепей Маркова с конечным пространством состояний в непрерывном времени, где показано, что для эргодичности нелинейной цепи Маркова с непрерывным временем должен существовать непрерывный нелинейный генератор.

В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением класса нелинейных цепей Маркова в дискретном времени. Статья рассматривает условия выполнения центральной теоремы для нелинейных цепей Маркова, продолжая идею [10], где был рассмотрен соответствующий закон больших чисел. Полученный результат важен для статистических приложений и дальнейшего построения статистики.

2. Постановка задачи и основной результат

Прежде всего напомним определение нелинейной цепи Маркова в дискретном времени.

Определение 1. Нелинейной цепью Маркова с дискретным временем назовем процесс $(X_n^\mu)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, принимающий значения на пространстве состояний $(E, \mathcal{E})$, который имеет начальное распределение $\mathcal{L}(X_0^\mu) = \mu$, $\mu \in \mathcal{P}(E)$ и переходные вероятности

$$\begin{aligned} P_{\mu_n}(x, B) &= \mathbb{P}(X_{n+1}^\mu \in B | X_n^\mu = x_n, \dots, X_0^\mu = x_0; \\ &\quad \mathcal{L}(X_n^\mu) = \mu_n, \dots, \mathcal{L}(X_0^\mu) = \mu_0) = \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1}^\mu \in B | X_n^\mu = x; \mathcal{L}(X_{n-1}^\mu) = \mu_{n-1}), \end{aligned}$$

где $x_0, \dots, x_n \in E$, $B \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Рассматриваемый далее результат устанавливает достаточные условия, чтобы для нелинейной марковской цепи с конечным дискретным фазовым пространством выполнялась центральная предельная теорема.

Теорема 1. Пусть нелинейная цепь Маркова X_k^μ , определена на измеримом пространстве состояний $(E, \mathcal{E})$ и имеет единственную инвариантную меру, скорость сходимости к которой экспоненциальна. Обозначим через X_k^π копию исходной нелинейной цепи Маркова X_k^μ с начальным распределением, равным инвариантной мере π , и переходными вероятностями $P_{x,y}^\pi$, равномерно отделенными от нуля,

$$\inf_{\mu} \min_{x, x'} P_{x, x'}^\mu > 0.$$

Тогда для нелинейной цепи Маркова выполнена центральная предельная теорема,

$$\mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \rightarrow \mathbb{E} [g(\eta)], \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

где $g \in \mathcal{C}_b$,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (f(X_i^\mu) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)]),$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{0 \leq i \leq j \leq \infty} (f(X_i^\mu) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)]) (f(X_j^\mu) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)]) \right].$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку функция g ограничена, то для доказательства слабой сходимости достаточно рассмотреть неотрицательные $g \in \mathcal{C}_b$, такие что $g \geq \kappa$, где κ – некоторая положительная постоянная.

Также обратим внимание на то, что инвариантная копия исходного процесса, X_k^π , является однородной цепью Маркова, не зависящей от меры, а также обладает β -перемешиванием благодаря равномерной экспоненциальной сходимости относительно начального распределения.

Рассмотрим последовательность сумм центрированных компонент для инвариантной копии исходного процесса:

$$S_n^\pi = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k^\pi) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)].$$

Тогда, в соответствии с результатами Ибрагимова и Линника [3, теорема 18.5.3], мы имеем, что

$$\mathbb{E}[|f(X_k^\pi) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)]|^{2+\zeta}] < \infty$$

для некоторого $\zeta > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{\zeta/(2+\zeta)} < \infty$, где $\alpha(n)$ – коэффициент перемешивания. Дисперсия случайной величины S_n^π

$$\sigma^2 = \text{Var}(S_n^\pi) = \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{0 \leq i \leq j \leq \infty} (f(X_i^\pi) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)]) (f(X_j^\pi) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)]) \right]$$

является конечной благодаря тому, что случайные величины $f(X_k^\pi) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)]$ удовлетворяют условию β -перемешивания, в данном случае экспоненциального, и ограничены.

Тогда последовательность S_n^π удовлетворяет центральной предельной теореме, таким образом, $S_n^\pi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/n)$. При этом случай $\sigma^2 = 0$ может быть интерпретирован как вырожденное нормальное распределение, или δ -мера Дирака, сконцентрированная в точке 0.

Таким образом, центральная предельная теорема верна для нелинейной цепи Маркова, стартовой из инвариантного распределения, а именно:

$$(1) \quad \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n^\pi}{\sqrt{n}} \right) \right] \rightarrow \mathbb{E} [g(\eta)], \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

В случае $\sigma = 0$ получаем тождественное равенство обеих частей (1) величине $g(W)$, где W – некоторая константа.

Далее покажем, что центральная предельная теорема верна и в более общем случае, т.е. для нелинейной цепи Маркова, не находящейся изначально в стационарном состоянии.

Обозначим $\xi(X_i^\mu) = f(X_i^\mu) - \mathbb{E}[f(X_0^\pi)]$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] &= \mathbb{E} \left[g \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \xi(X_i^\mu)}{\sqrt{n}} \right) \right] = \\ &= \iint \dots \int g \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \xi(X_i^\mu)}{\sqrt{n}} \right) \mu_0(x_0) P_{x_0, dx_1}^{\mu_0} P_{x_1, dx_2}^{\mu_1} \dots P_{x_{n-2}, dx_{n-1}}^{\mu_{n-2}} \\ &= \iint \dots \int g \left(\frac{\xi(x_0) + \dots + \xi(x_{n-1})}{\sqrt{n}} \right) \mu_0(x_0) P_{x_0, dx_1}^{\mu_0} \dots P_{x_{n-2}, dx_{n-1}}^{\mu_{n-2}}. \end{aligned}$$

Благодаря существованию единственной инвариантной меры и экспоненциальной скорости сходимости начальной меры к ней, имеем $\|\mu_n - \pi\|_{TV} \leq 2e^{-Cn}$, где C – некоторая константа, не зависящая от n . Исходя из предположения, что все элементы переходного ядра $P_{x,y}^\pi$ отделены от нуля, получаем нижнюю и верхнюю оценки:

$$-\frac{\|\mu_n - \pi\|_{TV}}{2P_{x,y}^\pi} \leq \frac{P_{x,y}^{\mu_n} - P_{x,y}^\pi}{P_{x,y}^\pi} \leq \frac{\|\mu_n - \pi\|_{TV}}{2P_{x,y}^\pi},$$

откуда мы делаем вывод, что

$$(2) \quad 1 - e^{\ln K - Cn} \leq 1 - \frac{e^{-Cn}}{P_{x,y}^{\pi}} \leq \frac{P_{x,y}^{\mu_n}}{P_{x,y}^{\pi}} \leq 1 + \frac{e^{-Cn}}{P_{x,y}^{\pi}} \leq 1 + e^{\ln K - Cn},$$

где K – некоторая константа, не зависящая от n .

Обозначим ρ_g – модуль непрерывности функции g на замкнутом интервале $[-\|\xi\|, \|\xi\|]$ и выберем $\delta > 0$ такое, что $\rho_g(\delta) < \kappa < g$. Также выберем n по заданным δ, k : $n \geq k\|\xi\|/\delta$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, и, начиная с момента $k + 1$, переходные ядра $P_{x,y}^{\mu_n}$ близки к инвариантному переходному ядру $P_{x,y}^{\pi}$ согласно (2). Определим переходное ядро за k шагов как $Q_{x_0, dx_k}^{\mu_0, k}$, такое что

$$\mu_k = \mu_0 Q_{x_0, dx_k}^{\mu_0, k}(dx_k) = \int \mu_0(dx_0) Q^{\mu_0, k}(x_0, dx_k).$$

Используя введенные обозначения, перепишем

(3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] &= \\ &= \iint \dots \int g \left(\frac{\sum_{i=0}^k \xi(x_i)}{\sqrt{n}} + \frac{\sum_{i=k+1}^{n-1} \xi(x_i)}{\sqrt{n}} \right) \mu_0 Q^{\mu_0, k}(dx_k) \prod_{j=k}^{n-2} P_{x_j, dx_{j+1}}^{\mu_k} \leq \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} &\leq \rho_g(\delta) + \prod_{j=k-1}^{n-2} \left(1 + e^{\ln K - Cj} \right) \times \\ &\times \left(\iint \dots \int g \left(\frac{\sum_{i=k+1}^{n-1} \xi(x_i)}{\sqrt{n}} \right) \pi(dx_k) \prod_{j=k}^{n-2} P_{x_j, dx_{j+1}}^{\pi} \right). \end{aligned}$$

Распишем в явном виде аналогичное выражение для S_n^{π} :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n^{\pi}}{\sqrt{n}} \right) \right] &= \\ &= \iint \dots \int g \left(\frac{\sum_{j=0}^k \xi(x_j)}{\sqrt{n}} + \frac{\sum_{j=k+1}^{n-1} \xi(x_j)}{\sqrt{n}} \right) \pi(dx_k) \prod_{j=k}^{n-2} P_{x_j, dx_{j+1}}^{\pi} \geq \\ &\geq -\rho_g(\delta) + \iint \dots \int g \left(\frac{\sum_{j=k+1}^{n-1} \xi(x_j)}{\sqrt{n}} \right) \pi(dx_k) \prod_{j=k}^{n-2} P_{x_j, dx_{j+1}}^{\pi}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем подставить последний результат в формулу (4), благодаря чему получаем

$$\mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \leq \rho_g(\delta) + \left(\rho_g(\delta) + \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n^\pi}{\sqrt{n}} \right) \right] \right) \prod_{j=k-1}^{n-2} \left(1 + e^{\ln K - Cj} \right).$$

Аналогичным образом мы можем вычислить оценку и для нижней границы $\mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right]$, получая

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] &\geq -\rho_g(\delta) + \prod_{j=k-1}^{n-2} \left(1 - e^{\ln K - Cj} \right) \times \\ &\times \left(\iint \dots \int g \left(\frac{\sum_{i=k+1}^{n-1} \xi(x_i)}{\sqrt{n}} \right) \pi(dx_k) \prod_{j=k+1}^{n-2} P_{x_j, dx_{j+1}}^\pi \right) \geq \\ &\geq -\rho_g(\delta) + \left(\mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n^\pi}{\sqrt{n}} \right) \right] - \rho_g(\delta) \right) \times \prod_{j=k-1}^{n-2} \left(1 - e^{\ln K - Cj} \right). \end{aligned}$$

В результате получаем границы для $\mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right]$:

$$\begin{cases} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \geq -\rho_g(\delta) + \left(\mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n^\pi}{\sqrt{n}} \right) \right] - \rho_g(\delta) \right) \times \prod_{j=k-1}^{n-2} \left(1 - e^{\ln K - Cj} \right), \\ \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \leq \rho_g(\delta) + \left(\rho_g(\delta) + \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n^\pi}{\sqrt{n}} \right) \right] \right) \times \prod_{j=k-1}^{n-2} \left(1 + e^{\ln K - Cj} \right). \end{cases}$$

Для этих границ вычислим нижний и верхний пределы последовательности при $\delta \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$, получая

$$\begin{aligned} &\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \geq \\ &\geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{k \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-\rho_g(\delta) + \left(\mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n^\pi}{\sqrt{n}} \right) \right] - \rho_g(\delta) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=k-1}^{n-2} \left(1 - e^{\ln K - Cj} \right) \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \leq \\ & \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\rho_g(\delta) + \left(\rho_g(\delta) + \mathbb{E} \left[g \left(\frac{S_n^\pi}{\sqrt{n}} \right) \right] \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{j=k-1}^{n-2} \left(1 + e^{\ln K - Cj} \right) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что при $\delta \rightarrow 0$ модуль непрерывности $\rho_g(\delta)$ стремится к нулю. Множители $\prod_{j=k-1}^{n-2} (1 - e^{\ln K - Cj})$ и $\prod_{j=k-1}^{n-2} (1 + e^{\ln K - Cj})$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно стремятся к 1 благодаря показателю в экспоненте. Используя результат (1), мы получаем, что для любой неотрицательной функции $g \in \mathcal{C}_b$, большей κ ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(S_n/\sqrt{n})] \geq \mathbb{E}[g(\eta)]$$

и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(S_n/\sqrt{n})] \leq \mathbb{E}[g(\eta)],$$

где η – гауссовская случайная величина с распределением $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Стало быть, эти неравенства имеют место и для любой функции $g \in \mathcal{C}_b$. Тогда по теореме о двух милиционерах имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(S_n/\sqrt{n})] = \mathbb{E}[g(\eta)],$$

что эквивалентно слабой сходимости, а следовательно, как и требовалось, центральная предельная теорема выполнена. Теорема 1 доказана.

Литература

1. БУТКОВСКИЙ О.А. Об эргодических свойствах нелинейных марковских цепей и стохастических уравнений Маккина–Власова // Теория вероятностей и ее применения. – 2013. – Т. 58, №4. – С. 782–794.
2. ВЛАСОВ А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1938. – Т. 8, №3. – С. 291–318.

3. ИБРАГИМОВ И.А., ЛИННИК Ю.В. *Независимые и стационарно связанные величины*. — М.: Изд-во «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1965.
4. ЩЕГОЛЕВ А.А. *Об оценках скорости сходимости однородных нелинейных цепей Маркова в дискретном времени* // Управление большими системами. — 2021. — Вып. 90. — С. 36–48.
5. KOLOKOLTSOV V.N. *Nonlinear Markov processes and kinetic equations* // Cambridge Tracts in Mathematics. — Cambridge University Press, Cambridge — 2010. — Vol. 182.
6. MCKEAN H.P. *A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations* // Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1966. — Vol. 56. — P. 1907–1911.
7. MUZYCHKA S.A., VANINSKY K.L. *A class of nonlinear random walks related to the Ornstein–Uhlenbeck process* // Markov Process. Related Fields. — 2011. — Vol. 17, No. 2. — P. 277–304.
8. NEUMANN B. *Nonlinear Markov chains with finite state space: Invariant distributions and long-term behaviour* // Journal of Applied Probability. — 2022. — P. 1–15.
9. SABUROV M. *Ergodicity of nonlinear Markov operators on the finite dimensional space* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 2015. — Vol. 143. — P. 105–119.
10. SHCHEGOLEV A.A. *A new rate of convergence estimate for homogeneous discrete-time nonlinear Markov chains* // Random Operators and Stochastic Equations. — 2022. — Vol. 30, No. 3. — P. 205–213.
11. SZNITMAN A.-S. *Topics in propagation of chaos* // École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX.—1989. — Lecture Notes in Math. — 1991. — Vol. 1464. — P. 165–251.

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR HOMOGENEOUS DISCRETE-TIME NONLINEAR MARKOV CHAINS

Aleksandr Shchegolev, postgraduate student, HSE University,
Moscow (ashchegolev@hse.ru).

Abstract: The class of nonlinear Markov processes is characterized by the dependence of the current state of the process on its current distribution in addition to the dependence on the previous state. Due to this feature, these processes are characterized by complex limit behavior and ergodic properties, for which the usual criteria for Markov processes are not sufficient. Being a subclass of nonlinear Markov processes, nonlinear Markov chains have inherited these features. In this paper, conditions for the fulfillment of the central limit theorem for homogeneous nonlinear Markov chains in discrete time and with a discrete finite state space are studied. Also, a brief review of known results on the ergodic properties of nonlinear Markov chains is included. The obtained result complements the existing results in this area and may be useful for further applications in statistics.

Keywords: nonlinear Markov chains, central limit theorem, exponential rate of convergence.

УДК 519.2

ББК 22.171

DOI: 10.25728/ubs.2023.102.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

*Поступила в редакцию 23.12.2022.
Дата опубликования 31.03.2023.*

НЕРАВЕНСТВО ЛОРДЕНА И СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОЙ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЭРЛАНГА – СЕВАСТЬЯНОВА¹

Зверкина Г. А.²

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Во многих прикладных задачах теории надежности и массового обслуживания очень важно не только доказывать существование стационарного распределения, но и уметь оценивать скорость сходимости распределения к стационарному. Стандартные методы получения таких оценок предполагают, что времена обслуживания (ремонта или работы) экспоненциальны, входящий поток – пуассоновский и все формирующие процесс обслуживания (надёжности) случайные величины (сл.в.) независимы. Результаты для таких простейших случаев хорошо известны. Отказ от предположений независимости и экспоненциальности этих сл.в. приводит к довольно сложным случайным процессам, которые очень трудно изучать с помощью стандартных процедур. Для таких процессов нужно использовать более сложную технику. Для этого потребуется некоторое обобщение (и доказательство) ряда известных результатов. Один из таких результатов – обобщённое неравенство Лордена, используемое в данной статье. «Классическое» неравенство Лордена касается «классических» процессов восстановления. В работе используется обобщение этого неравенства для случая «слабо зависимых» и имеющих в некотором смысле «близкие» распределения интервалов между моментами восстановления. Такое обобщение позволяет изучать скорость сходимости для широкого класса сложных процессов в ТМО и в смежных дисциплинах. В данной работе изучается одна обобщённая система массового обслуживания Эрланга – Севастьянова.

Ключевые слова: регенерирующие марковские процессы, метод склеивания, метрика полной вариации, обобщённая система Эрланга – Севастьянова, скорость сходимости.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №20-01-00575А.

Автор признателен Э.Ю. Калимулиной за ценное обсуждение содержания статьи.

² Галина Александровна Зверкина, к.ф.-м.н., доцент (zverkina@gmail.com).

1. Введение

Формулы Эрланга дают явные выражения для количества заявок в системах массового обслуживания (СМО) вида $M|M|\infty$ в стационарном режиме [11]. Рассмотренные Эрлангом модели по-прежнему являются важными в современной теории массового обслуживания. Однако для приложений важно не только знать стационарное распределение, но и уметь оценивать скорость сходимости к этому распределению. В общем виде эта проблема не решена до сих пор, однако предпринимались некоторые попытки её решения. Так, в случае экспоненциально распределённых времён обслуживания и входящего пуассоновского потока такая проблема рассматривалась в [8, 25] и др.

Известная теорема Б.А. Севастьянова [4, 5] для марковских процессов позволила доказывать не только существование и единственность стационарного распределения для большого класса СМО, но и сходимость в метрике полной вариации. Несколько ранее П. Форте показал [13], что стационарное распределение существует в рассмотренных Б.А. Севастьяновым моделях при несколько более сильных предположениях, чем в работе [5], и указал вид стационарного распределения (без исследования скорости сходимости).

Таким образом, для системы с входящим пуассоновским потоком и произвольным (одинаковым) временем обслуживания с конечным средним значением на всех приборах было известно стационарное распределение; более того, в работах Л. Такача [24] были получены характеристики периода занятости и длины очереди для СМО $M|GI|\infty$.

Однако только в некоторых специальных случаях оценивалась скорость сходимости к стационарному распределению стохастических систем (не обязательно систем Эрланга). Обычно на практике оценки характеристик работы СМО вычисляются для стационарного состояния, но, как правило, в явном виде они не получены, за исключением ряда специальных случаев (см., например, [20]).

Итак, для СМО $M|GI|\infty$ известны стационарные характеристики, но до момента достаточно близкого сближения нестационарных и стационарных значений без знания оценки скорости сходимости распределения состояния СМО к стационарному состоянию невозможно использовать стационарные характеристики. То есть очень важно знать оценку сверху скорости сходимости распределения СМО к стационарному распределению. Более того, если не удаётся определить или оценить стационарное распределение СМО, знание оценки скорости сходимости к нему позволяет получать адекватные оценки характеристик СМО с помощью математического моделирования, а также численно определять стационарные характеристики СМО.

В работах [26, 27, 28, 30] были рассмотрены методы, с помощью которых можно получить оценки скорости сходимости для СМО в случае, когда все распределения абсолютно непрерывны и их интенсивности отделены от нуля и ограничены сверху. Во всех рассмотренных в этих работах моделях предполагалось, что обслуживание начинается сразу в момент поступления требования в систему, что является естественной идеализацией. Также в некоторых случаях предполагалось, что интенсивности (скорости) поступления требований и обслуживания могут зависеть от полного состояния системы.

Задача представленной статьи – построить строгую оценку сверху для скорости сходимости распределения СМО с непустым входящим потоком, возможным запаздыванием начала обслуживания при поступлении требования и отказом от абсолютной непрерывности распределения (зависимых между собой) времён обслуживания.

2. Обобщённая СМО Эрланга – Севастьянова

Итак, мы рассматриваем обобщённую СМО $M|G|\infty$, где интенсивность входящего потока и интенсивности обслуживания зависят от полного состояния системы X_t , которое будет описано ниже. Вообще говоря, при произвольном виде зависимостей изучение поведения такого сорта СМО практически невозможно.

2.1. ПОЛНОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ X_T

Полное состояние системы в момент времени t включает:

- $x_t^{(0)}$ – время, прошедшее с последнего поступления требования в СМО;
- $x_t^{(i)}$ – времена нахождения требований, занумерованных по порядку поступления, в системе;
- для удобства добавим n_t – количество требований в СМО в момент t .

То есть полное состояние системы записывается вектором

$$X_t = \left(n_t, x_t^{(0)}; x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n_t)} \right),$$

при этом $x_t^{(i)} \geq x_t^{(i+1)}$ для $i = 1, \dots, n_t$, поскольку требования занумерованы в порядке поступления.

Очевидно, $x_t^{(0)} \leq x_t^{(n_t)}$, поскольку требование с номером n_t обслуживалось не дольше чем $t - x_t^{(0)}$.

Пространство состояний процесса X_t – это объединение декартовых произведений $\mathcal{X} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{n\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}) = \{\vec{x}\}$.

Итак, мы предполагаем, что интенсивность входящего потока – это $\lambda = \lambda(X_t)$, а интенсивность обслуживания i -го требования – $h_i = h_i(X_t)$ (рис. 1).

Для упрощения изложения здесь мы полагаем $X_0 = (0; 0)$.

Заметим, что нулевое значение первой n_t компоненты вектора X_t указывает на то, что описываемая СМО свободна – в ней нет требований, т.е. множество свободных состояний процесса обслуживания X_t – это множество

$$S_0 = \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0} = \{X_t : n_t = 0\}.$$

Если же $n_t > 0$, то в системе находится n_t требований. С течением времени периоды, где система свободна, чередуются с периодами занятости, когда в системе находится некоторое (переменное) количество требований. Обозначим свободные периоды σ_i , а периоды занятости – ζ_i .

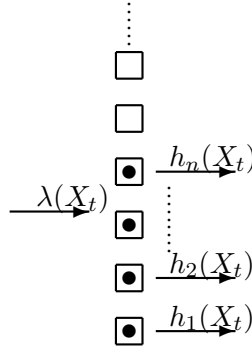


Рис. 1. Входящий поток $\lambda(X_t)$, заняты приборы $1, 2, \dots, n$, интенсивность обслуживания на занятых приборах $h_i(X_t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

2.1.1. Интенсивность

Напомним, что такое интенсивность.

Пусть длительность некоторого периода ξ , начавшегося в момент $t = 0$, имеет функцию распределения (ф.р.) $F(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\xi \leq s\}$, и почти всюду (п.в.) существует $f(s) \stackrel{\text{def}}{=} F'(s)$. Тогда если к моменту времени s этот период не закончился, то при малых $\Delta > 0$ вероятность того, что он закончится в промежутке $(s, s + \Delta)$, равна

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi \in (s, s + \Delta) \mid \xi > s\} &= \frac{\mathbb{P}\{\xi \in (s, s + \Delta) \& \xi > s\}}{\mathbb{P}\{\xi > s\}} = \\ &= \frac{F(s + \Delta) - F(s)}{1 - F(s)} = \frac{f(s + \theta\Delta)\Delta}{1 - F(s)}, \end{aligned}$$

где $\theta \in [0, 1]$. Поэтому существует предел

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}\{\xi \in (s, s + \Delta) \mid \xi > s\}}{\Delta} = \frac{f(s)}{1 - F(s)} = I_F(s),$$

который называется интенсивность завершения периода ξ в момент s (естественно, при условии, что до момента s период ξ не завершился).

Несложно заметить, что $F(s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{F'(s)}{1 - F(s)} = I_F(s)$, и

$$(1) \quad F(s) = 1 - \exp \left(- \int_0^s I_F(u) du \right).$$

Для случая, когда ф.р. $F(s)$ имеет точки разрыва, т.е. распределение случайной величины (сл.в.) ξ имеет дискретную составляющую, то в [35] было замечено, что производная разрывной ф.р. представляется как

$$f(s) = \begin{cases} F'(s), & \text{если существует } F'(s); \\ \delta(0)(F(s+0) - F(s-0)) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\delta(s)$ — хорошо известная (обобщённая) δ -функция, т.е.

$$\delta(s) \equiv 0 \text{ при } s \neq 0 \text{ и } \int_{-a}^a \delta(s) ds = 1 \text{ для всех } a > 0.$$

Так что можно определить *обобщённую интенсивность* периода ξ следующим образом:

$$I_F(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(s)}{1 - F(s)} - \sum_i \delta(s - a_i) \ln (F(a_i + 0) - F(a_i - 0)),$$

где $\{a_i\}$ — множество точек разрыва ф.р. $F(s)$.

При этом несложно убедиться, что соотношение (1) остаётся в силе.

Таким образом, неотрицательные (смешанные) случайные величины можно задавать как с помощью ф.р. и плотности, так и с помощью интенсивности.

Замечание 1. Для того чтобы неотрицательная (обобщённая) функция $\mu(s)$, заданная для $s \geq 0$, задавала распределение собственной сл.в., необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{\infty} \mu(s) ds = +\infty.$$

Напомним, что сл.в. является собственной, если она с вероятностью 1 меньше бесконечности.

Итак, входящий поток имеет (переменную) обобщённую интенсивность $\lambda(X_t)$, времена обслуживания имеют (переменные) обобщённые интенсивности $h_i(X_t)$, и все эти интенсивности зависят от полного состояния СМО X_t ; при этом *весь процесс* X_t является марковским процессом на пространстве состояний $\mathcal{X}$; его переходные вероятности определяются функциями $\lambda(X_t)$ и $h_i(X_t)$.

Очевидно, что абсолютно произвольная зависимость $\lambda(X_t)$ и $h_i(X_t)$ от состояния процесса X_t не позволяет сделать какие-либо выводы о поведении и распределении процесса X_t .

Поэтому далее вводятся условия, при которых рассматривается поведение процесса X_t .

2.2. УСЛОВИЯ НА (ОБОБЩЁННЫЕ) ИНТЕНСИВНОСТИ

1. Существует п.в. неотрицательная функция $\lambda_0(s)$ и постоянная Λ такие, что для всех возможных значений X_t выполнено условие: $\lambda_0\left(x_t^{(0)}\right) \leq \lambda(X_t) \leq \Lambda < \infty$.

2. $\mathfrak{M}_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} s^k d\mathfrak{L}(s) < \infty$ для $k \geq 2$, где

$$\mathfrak{L}(s) = 1 - \exp\left(-\int_0^s \lambda_0(s) ds\right) \quad \mathfrak{L}(+\infty) = 1.$$

3. Существует постоянная $T \geq 0$ и существуют две неотрицательные (обобщённые) функции $\varphi(t)$ и $q(t)$, причём при всех $t > T$ п.в. $\varphi(t) > 0$; кроме того, $q(t) \neq \delta(0)$.

Интенсивности $h_i(X_t)$ ($i = 1, 2, \dots, n_t$) удовлетворяют условию $\varphi\left(x_t^{(i)}\right) \leq h_i(X_t) \leq q\left(x_t^{(i)}\right)$ для всех возможных значений $X_t = \left(n_t; x_t^{(0)}; x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n_t)}\right)$.

$$4. \int_0^{\infty} s^k d\Phi(s) < \infty \text{ для } k \geq 2, \text{ где}$$

$$\Phi(s) = 1 - \exp \left(- \int_0^s \varphi(u) du \right) \quad \Phi(+\infty) = 1.$$

Замечание 2. Условия 1 и 2 гарантируют, что входящий поток требований имеет, возможно, переменную интенсивность, но в любом случае эта интенсивность является необобщённой функцией и не превосходит величины Λ , и математическое ожидание времени между поступлениями требований имеет не менее k конечных моментов.

Замечание 3. Условие 3 показывает:

– Время запаздывания обслуживания (т.е. время от момента поступления в СМО до начала обслуживания) не превосходит величины T (на промежутке $(0, T)$ интенсивность обслуживания может быть нулевой).

– Функция распределения (ф.р.) времени пребывания в системе (запаздывание + обслуживание) любого требования заключена в границах $\Phi(s) \leq F_j(s) \leq Q(s)$, где

$$Q(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \exp \left(- \int_0^s q(u) du \right),$$

а $F_j(s)$ – ф.р. времени обслуживания j -го по порядку поступления в систему требования ς_j .

– При этом $\int_0^{\infty} s^k dF_j(s) \leq \int_0^{\infty} s^k d\Phi(s) < \infty$, т.е. существует не менее k конечных моментов у всех времён обслуживания.

– Ф.р. $F_i(s) = 1 - \exp \left(- \int_0^s \lambda(u) du \right)$ времени между поступлениями требований $\hat{\sigma}_i$ заключена в границах

$$\mathfrak{L}(s) \leq F_i(s) \leq \tilde{\mathfrak{L}}(s), \text{ где } \tilde{\mathfrak{L}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \exp \left(- \int_0^s \Lambda(s) ds \right).$$

Соответственно, плотность распределения $F'_i(s)$ времени между поступлениями требований $\hat{\sigma}_i$ оценивается как $\lambda_0 \exp \left(- \int_0^s \Lambda(s) ds \right) \leq F'_i(s) \leq \Lambda \exp \left(- \int_0^s \lambda_0(s) ds \right).$

Из условия $q(t) \neq \delta(0)$ следует, что все (существующие) моменты всех времён обслуживания положительны.

Замечание 4. Условие 4 гарантирует наличие не менее k конечных моментов у времени пребывания требований в системе.

Наша цель – доказать эргодичность процесса X_t и оценить сверху скорость сходимости его распределения к предельному.

Для этого процесс сначала сравним с хорошо исследованным процессом обслуживания «классической» СМО Эрланга – Севастьянова $M|G|\infty$ и получим предварительные оценки характеристик исследуемой СМО. Будет доказана эргодичность процесса обслуживания исследуемой СМО. Затем с использованием метода склеивания будет представлен алгоритм получения строгих оценок скорости сходимости распределения этой СМО к стационарному распределению.

3. Эргодичность процесса X_t

Напомним, что период занятости СМО – это период, который начинается, когда требование приходит в систему, в которой нет других требований, и заканчивается, когда (это же или другое) требование покидает систему, в которой больше нет требований; причём на всём этом периоде в СМО присутствует по крайней мере одно требование.

Отметим, что X_t – это регенерирующий процесс: моменты регенерации – это моменты времени, когда X_t попадает в состояние $X_t = (1; 0; 0)$, т.е. до этого времени система была свободна ($n_t = 0$), и в этот момент в свободную систему приходит требование.

Обозначим $R_1, R_2, R_3, \dots$ – длины последовательных пери-

одов регенерации. Эти сл.в. являются независимыми и одинаково распределёнными (н.о.р.), они состоят из свободного периода (или периода простоя) σ_i и периода занятости ζ_i .

Для эргодичности процесса X_t достаточно ограниченности математического ожидания периодов регенерации:

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\sigma_i + \zeta_i) < C < \infty \Rightarrow X_t \Longrightarrow \tilde{X}.$$

В этом случае $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}_t(A) = \tilde{\mathcal{P}}$ для любых измеримых A из пространства состояний $\mathcal{F}$ процесса X_t :

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_+ \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \cup \mathbb{R}_+^3 \cup \dots \cup \mathbb{R}_+^n \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_+^i,$$

а $\mathcal{P}_t$ – распределение процесса X_t : $\mathcal{P}_t(A) = \mathbb{P}\{X_t \in A\}$; $\tilde{\mathcal{P}}$ – стационарное распределение этого процесса, инвариантное относительно переходных вероятностей, задаваемых интенсивностями $\lambda(\tilde{X})$, $h_i(\tilde{X})$.

3.1. ПЕРИОД ПРОСТОЯ ПРОЦЕССА X_T

Период простоя σ_i не превосходит интервала $\hat{\sigma}_i$ – времени между поступлением $(i - 1)$ -го и i -го требований в систему ($\hat{\sigma}_1 = \sigma_1$ – момент поступления 1-го требования в систему).

Из условия 2 раздела 2.2 имеем для всех $\ell \in [0, k]$

$$(2) \quad \mathbb{E} \sigma_i^\ell \leq \mathbb{E} \hat{\sigma}_i^\ell \leq \int_0^\infty s^\ell d\mathfrak{L}(s) = \mathfrak{M}_\ell.$$

3.2. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ ПРОЦЕССА X_T

Оценим моменты сл.в. ζ_i . Для этого сравним поведение процесса X_t с уже изученным во многих работах процессом обслуживания СМО $M|G|_\infty$ (см., например, [24]).

3.3. СРАВНЕНИЕ ПРОЦЕССА X_T СО «СТАНДАРТНЫМ» ПРОЦЕССОМ ДЛЯ $M|G|_\infty$

Рассмотрим «стандартную» систему массового обслуживания $M|G|_\infty$, в которой входящий поток имеет постоянную ин-

тенсивность Λ , т.е. времена между поступлениями требований независимы и имеют ф.р. $\mathcal{L}(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - e^{-\Lambda s}$.

Обозначим σ_i^Y – свободные периоды процесса Y_t , а ζ_i^Y – его периоды занятости.

Времена обслуживания ζ_j^Y поступающих в систему независимы и имеют одинаковую ф.р.

$$\Phi(s) = 1 - \exp \left(- \int_0^s \varphi(u) du \right)$$

(Λ и $\varphi(s)$ – из условий раздела 2.2).

Времена между поступлением заявок и времена обслуживания независимы в совокупности.

Как и в рассматриваемой обобщённой СМО Эрланга – Севастьянова, мы строим марковский процесс $Y_t = (m_t; y_t^{(0)}; y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(n_t)})$, где m_t – количество требований в системе в момент t , $y_t^{(0)}$ – время, прошедшее с момента последнего поступления требования, а $y_t^{(i)}$ – это время, в течение которого i -е требование находилось в системе до момента t ; $Y_0 = (0; 0)$.

Определение 1. Мы говорим, что $\xi \prec \eta$, если $\mathbb{P}\{\xi < s\} \geq \mathbb{P}\{\eta < s\}$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Отношение $\prec$ – это отношение порядка на множестве случайных величин.

Заметим, что для любых номеров i и j выполнены соотношения $\sigma_i^Y \prec \sigma_i$ и $\zeta_i \prec \zeta_i^Y$, т.е. в процессе Y_t требования приходят чаще, а обслуживаются дольше, чем в процессе X_t .

Лемма 1. Можно построить процессы X_t и Y_t на одном и том же вероятностном пространстве таким образом, что:

- 1) $X_0 = Y_0 = (0; 0)$;
- 2) $n_t \leq m_t$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство основано на фактах из [23]; см. также [2].

Поэтому период занятости ζ^X для X_t не превосходит периода занятости ζ^Y для Y_t в смысле определения 1: $\zeta^X \prec \zeta^Y$; более

того, $\mathbb{P}\{n_t = 0\} \geq \mathbb{P}\{m_t = 0\}$, и $\mathbb{E} [\zeta^X]^k \leq \mathbb{E} [\zeta^Y]^k$ для всех $k > 0$.

3.3.1. Хорошо известные факты о «стандартной» системе $M|G|_\infty$

В «стандартной» системе $M|G|_\infty$, поведение которой описывается процессом Y_t , интенсивность входящего потока – постоянная Λ , времена обслуживания ξ_i^Y являются н.о.р.сл.в. с ф.р.

$$\mathbb{P}\{\xi_i^Y < s\} = \Phi(s) = 1 - \exp \left(- \int_0^s \varphi(t) dt \right).$$

Для этой системы (при $X_0 = (0; 0)$) [12, 22, 24]:

$$- \mathbb{P}\{m_t = k\} = \frac{e^{-\mathcal{G}(t)} (\mathcal{G}(t))^k}{k!}, \text{ где } \mathcal{G}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda \int_0^t (1 - \Phi(s)) ds.$$

То есть для всех $t \geq 0$ верно

$$(3) \quad \mathbb{P}\{m_t = 0\} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{m_t = 0\} = e^{-\rho},$$

где

$$(4) \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda m_1 = \Lambda \int_0^\infty (1 - \Phi(s)) ds.$$

– Для периода занятости рассматриваемой системы $M|G|_\infty$ (это периоды занятости ζ_i^Y) известна функция распределения

$$(5) \quad B(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\zeta_i^Y \leq s\} = 1 - \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^\infty c^{n*}(s),$$

где $c(s) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(1 - \Phi(s))e^{-\mathcal{G}(s)}$, и $c^{n*}(s)$ является n -й свёрткой функции $c(s)$.

– Кроме того, мы знаем преобразование Лапласа для $B(s)$:

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}[B](s) &= \\ &= 1 + \frac{s}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda \int_0^\infty \exp \left(-st - \Lambda \int_0^t [1 - \Phi(v)] dv \right) dt}. \end{aligned}$$

– Также известны формулы:

$$(7) \quad \mathbb{E} (\zeta_i^Y)^n = (-1)^{n+1} \left\{ \frac{e^\rho n C^{(n-1)}}{\Lambda} - e^\rho \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \mathbb{E} (\zeta_i^Y)^{n-k} C^{(p)} \right\},$$

$n \in \mathbb{N},$

где

$$C^{(n)} = \int_0^\infty (-t)^n \exp \left(-\Lambda \int_0^\infty [1 - \Phi(v)] dv \right) \Lambda [1 - \Phi(t)] dt.$$

Из формул (5)–(7) несложно получить

$$\mathbb{E} \zeta_i^Y = \frac{e^\rho - 1}{\Lambda} < \infty.$$

Следовательно, период регенерации процесса X_t , который представляет собой сумму $\sigma_i + \zeta_i$, имеет конечное математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(\sigma_i + \zeta_i) \leq \mathfrak{M}_1 + \frac{e^\rho - 1}{\Lambda} < \infty.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. В условиях 1–4 (раздел 2.2) процесс X_t эргодичен, т.е. распределение $\mathcal{P}_t$ процесса X_t слабо сходится к стационарному инвариантному распределению $\tilde{\mathcal{P}}$.

4. Скорость сходимости распределения процесса X к стационарному распределению

Для того чтобы оценить скорость сходимости $\mathcal{P}_t \Rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$, достаточно уметь оценивать моменты периода регенерации процесса X_t .

Как было показано в (2), для свободных периодов σ_i верно неравенство $\mathbb{E} \sigma_i^\ell \leq \mathfrak{M}_\ell$ для $\ell \in [0, k]$.

Из формул (6) и (7) выше была получена формула

$$\mathbb{E} \zeta_i \leq \mathbb{E} \zeta_i^Y = \frac{e^\rho - 1}{\Lambda},$$

также несложно показать, что

$$\mathbb{E}(\zeta_i)^2 \leq \mathbb{E}(\zeta_i^Y)^2 = \frac{2e^{2\rho}}{\Lambda} \int_0^\infty \exp\left(-\Lambda \int_0^\infty [1 - \Phi(v)] dv\right) dt.$$

Но для $\ell > 2$ вычисления моментов $\mathbb{E}(\zeta_i^Y)^\ell$ очень сложны, поэтому мы хотим оценить эти моменты.

4.1. ОЦЕНКА МОМЕНТОВ ζ_I^Y

Вернёмся к формуле $B(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\zeta_i^Y \leq s\} = 1 - \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^\infty c^{n*}(s)$,

где $c(s) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(1 - \Phi(s))e^{-\mathcal{G}(s)}$, и c^{n*} – n -я свёртка функции $c(s)$.

Легко видеть, что

$$\int_0^\infty c(s) ds = 1 - e^{-\Lambda m_1} = 1 - e^{-\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \varrho \in (0; 1).$$

Поэтому $r(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c(s)}{\varrho}$ – это плотность распределения (п.р.) некоторой сл.в. ζ .

Заметим, что $c^{n*}(s) = \varrho^n r_n(s)$, где $r_n(s)$ – п.р. суммы $\sum_{i=1}^n \zeta_i$,

и ζ_i – это н.о.р.сл.в. с п.р. $r(s)$.

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \zeta^k &= \int_0^\infty s^k \varrho^{-1} \Lambda(1 - \Phi(s)) e^{-\mathcal{G}(s)} ds \leq \\ &\leq \frac{\Lambda}{\varrho} \int_0^\infty s^k (1 - \Phi(s)) ds = \frac{\Lambda \mathbb{E} \xi_i^{k+1}}{(k+1)\varrho}. \end{aligned}$$

Теперь, применяя неравенство Йенсена в виде

$$(a_1 + \dots + a_n)^k \leq n^{k-1} (a_1^k + \dots + a_n^k),$$

для неотрицательных $a_1, \dots, a_n$ и $\ell \leq k$ (см. условия раздела 2.2), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\zeta_i^Y)^\ell &= \int_0^\infty \ell s^{\ell-1} (1-B(s)) ds = \frac{1}{\Lambda} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \ell s^{\ell-1} c^{n*}(s) ds = \\ &= \frac{1}{\Lambda} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \ell s^{\ell-1} \varrho^n r^{n*}(s) ds = \frac{1}{\Lambda} \sum_{n=1}^\infty \varrho^n \ell \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^n \zeta_j \right)^{\ell-1} \leq \\ &\leq \frac{1}{\Lambda} \sum_{n=1}^\infty \varrho^n \ell n^{\ell-1} \frac{\Lambda \mathbb{E}(\xi_i^Y)^\ell}{\varrho^\ell} = \frac{\mathbb{E}(\xi_i^Y)^\ell}{\varrho} \sum_{n=1}^\infty n^{\ell-1} \varrho^n = \\ &= \frac{\mathbb{E}(\xi_i^Y)^\ell}{\varrho} \times \varphi(\varrho, \ell - 1), \end{aligned}$$

где $\varphi(s, \ell) \stackrel{\text{def}}{=} \left(s \frac{d}{ds} \right)^\ell \frac{1}{1-s}$, и, в частности,

$$(8) \quad \mathbb{E} \zeta_i^Y \leq \frac{e^\varrho - 1}{\Lambda}.$$

4.1.1. Период регенерации процесса X_t

Поскольку период регенерации – это сумма двух (зависимых) сл.в. $\sigma_i + \zeta_i \leq \sigma_i^Y + \zeta_i^Y$, и их м.о. ограничены (см. (2), (8)), то длина периода регенерации ограничена.

Кроме того, поскольку выполнены условия 1–4 из раздела 2.2 мы выводим, что $\mathbb{E}(\sigma_i + \zeta_i) \leq \mathbb{E}(\sigma_i^Y + \zeta_i^Y) < \infty$. Т.е. процесс X_t регенерирующий и эргодический. Следовательно, его распределение $\mathcal{P}_t$ в момент t сходится к инвариантному предельному распределению $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}_t \Rightarrow \mathcal{P}$. Итак, процесс X_t эргодичен.

Построим оценку сверху для скорости сходимости распределения $\mathcal{P}$ процесса X_t к предельному распределению. Для вычисления оценки скорости сходимости $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}_t \Rightarrow \mathcal{P}$ будет использоваться метод склеивания. Этот метод хорошо известен в зарубежной литературе, но в русскоязычных изданиях информация о нём крайне отрывочна (см., например, [1]).

При этом многие отечественные исследователи использовали и развивали этот метод склеивания в англоязычных публикациях (см., например, [15]).

4.2. МЕТОД СКЛЕИВАНИЯ

Принцип использования метода склеивания заключается в следующем.

Если два однородных марковских процесса X_t и X'_t с одной и той же переходной функцией (переходными вероятностями), но с различными начальными состояниями совпали в момент τ , то после момента τ их распределения одинаковы.

Поэтому выполнено основное неравенство склеивания

$$\begin{aligned} (9) \quad & |\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X'_t \in S\}| = \\ & = |\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X'_t \in S\}| \times (\mathbf{1}(\tau > t) + \mathbf{1}(\tau \leq t)) \leq \mathbb{P}\{\tau > t\}, \end{aligned}$$

и для любой положительной неубывающей функции $\phi(s)$ верно

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X'_t \in S\}| &\leq \mathbb{P}\{\tau > t\} = \\ &= \mathbb{P}\{\phi(\tau) > \phi(t)\} \leq \frac{\mathbb{E} \phi(\tau)}{\phi(t)}. \end{aligned}$$

(В данной работе мы будем рассматривать функцию $\phi(s) = s^\ell$).

Для цепей Маркова (т.е. процессов Маркова в дискретном времени) метод склеивания впервые был предложен в [10].

Для марковских процессов в непрерывном времени в [14] была предложена следующая модификация метода склеивания.

4.2.1. Параллельное склеивание (“successful coupling”)

Для реализации этого приёма для пары двух однородных марковских процессов X_t и X'_t с одинаковыми переходными функциями, но разными начальными состояниями, на некотором вероятностном пространстве конструируется «параллельная» пара процессов $Z_t = (Z_t, Z'_t)$ такая, что

- (i) Для всех $s \geq 0$ и $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ выполнены равенства $\mathbf{P}\{Z_t \in S\} = \mathbf{P}\{X_t \in S\}$, $\mathbf{P}\{Z'_t \in S\} = \mathbf{P}\{X'_t \in S\}$.
(Соответственно, $Z_0 = X_0$ и $Z'_0 = X'_0$.)

- (ii) Для всех

$$t > \tau(X_0, X'_0) = \tau(Z_0, Z'_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : Z_t = Z'_t\}$$

выполняется равенство $Z_t = Z'_t$.

- (iii) Для всех возможных начальных состояний X_0, X'_0 процессов X_t и X'_t из пространства состояний $\mathcal{X}$ верно равенство $\mathbf{P}\{\tau(X_0, X'_0) < \infty\} = 1$.

Если условия (i)–(iii) выполнены, то для парного («параллельного» паре (X_t, X'_t)) процесса Z_t момент $\tau = \tau(X_0, X'_0)$ назовём успешной параллельной склейкой [14]. Основное неравенство склеивания (9) преобразуется так:

$$|\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X'_t \in S\}| = |\mathbb{P}\{Z_t \in S\} - \mathbb{P}\{Z'_t \in S\}| \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\{\tau > t\} \leq \mathbb{P}\{\phi(\tau) > \phi(t)\} \leq \frac{\mathbb{E} \phi(\tau)}{\phi(t)} = \mathcal{R}(t, X_0, X'_0)$$

для неубывающей положительной функции $\phi(s)$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}'_t\|_{TV} &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \sup_{S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})} |\mathbb{P}\{X_t \in S\} - \mathbb{P}\{X'_t \in S\}| \leq \\ &\leq 2\mathcal{R}(t, X_0, X'_0). \end{aligned}$$

4.2.2. Основная лемма склеивания

Эта лемма (Basic Coupling Lemma – см., например, [17, 29]) применяется для непрерывных распределений.

Лемма 2 Основная лемма склеивания. Пусть $f_i(s)$ – плотность распределения сл.в. θ_i ($i = 1, 2$). И предположим, что $\int_{-\infty}^{\infty} \min(f_1(s), f_2(s)) ds = \tilde{\varkappa} > 0$. Тогда на некотором вероятностном пространстве существуют две сл.в. ϑ_i такие, что $\vartheta_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \theta_i$, и $\mathbb{P}\{\vartheta_1 = \vartheta_2\} \geq \tilde{\varkappa}$.

Доказательство. Оно является чисто конструктивным – см., например, [17] и [9]. Приведём простейший вариант.

Пусть $\mathcal{U}_i$ независимые равномерно распределённые на $(0; 1)$ сл.в.. Положим

$$\phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\varkappa}^{-1} \int_{-\infty}^s \min(f_1(s), f_2(s)) ds,$$

$$\psi_i \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \tilde{\varkappa})^{-1} \left(\int_{-\infty}^s f_i(s) - \min(f_1(s), f_2(s)) ds \right).$$

Положим $\vartheta_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}(\mathcal{U}_0 < \tilde{\varkappa})\phi^{-1}(\mathcal{U}_4) + \mathbf{1}(\mathcal{U}_0 \geq \tilde{\varkappa})\psi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$.

Легко видеть, что $\mathbb{P}\{\vartheta_1 = \vartheta_2\} = \tilde{\varkappa}$.

Замечание 5. Величина $\tilde{\varkappa}$ называется общей частью распределений $f_1(s)$ и $f_2(s)$.

5. Применение метода «параллельного склеивания» к процессу X_t

Вернёмся к изучаемому процессу X_t (см. Раздел 2) и его версии X'_t (с другим начальным состоянием).

Для простоты будем считать, что $X_0 = (0; 0)$, а начальное состояние X'_0 – произвольное из пространства состояний $\mathcal{X}$;

$$X_t = \left(n_t, x_t^{(0)}; x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(n_t)} \right);$$

$$X'_t = \left(n'_t, x_t^{(0)'}; x_t^{(1)'}, x_t^{(2)'}, \dots, x_t^{(n'_t)'} \right).$$

Наша задача – построить такие «параллельные» копии процессов X_t и X'_t , чтобы можно было оценить момент склеивания этих копий; понятно, что этот момент склеивания зависит от X'_0 . Обозначим его $\tau(X'_0)$.

Конструирование пары «параллельных» процессов (Z_t, Z'_t) , имеющих такие же маргинальные распределения, что и пара (X_t, X'_t) , будем строить, изменяя поведение процессов X_t и X'_t в выбранные марковские моменты времени таким образом, что продолжение их «траекторий» с некоторой вероятностью совпадёт в следующий марковский момент.

Рассмотрим моменты времени $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ когда X'_t попадает в множество S_0 , т.е. n'_t переходит из значения 1 в значение 0.

Из формул (3)–(4) имеем:

$$(10) \quad \mathbb{P}\{X_{\theta_i} \in S_0\} = \mathbb{P}\{n_{\theta_i} = 0\} \geq \mathbb{P}\{m_{\theta_i} = 0\} \geq e^{-\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_0.$$

(Напомним, что m_t – число требований во вспомогательном процессе Y_t .) Если $n_{\theta_i+} = n'_{\theta_i+}$, то оба процесса X_t и X'_t оказываются в свободном состоянии; вероятность такого события не менее числа π_0 .

Заметим, что свободные периоды процесса X_t являются *процессами почти-восстановления*, и к ним применимо *обобщённое неравенство Лордена* (см. [16, 35]).

5.1. ПРОЦЕССЫ ПОЧТИ-ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ОБОБЩЁННОЕ НЕРАВЕНСТВО ЛОРДЕНА

Рассмотрим считающий процесс со скачками $N_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} 1 \left\{ \sum_{k=1}^i \xi_k \leq t \right\}$, где $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ – независимые одинаково распределённые (н.о.р.) положительные случайные величины. Рассмотрим перескок (или обратное время восстановления) для процесса N_t : $b_t = t - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$ – это время от момента t до следующего скачка процесса N_t .

Теперь предположим, что в этом считающем процессе N_t сл.в. ξ_j могут не быть н.о.р. Очевидно, при совершенно произ-

вольной зависимости ξ_j и ξ_i и совершенно произвольных распределениях ξ_j или ξ_i ничего существенного о поведении такого процесса N_t сказать нельзя.

Предполагаем, что $\mathbb{P}\{\xi_j \leq s\} = F_j(s)$; F_j и F_i могут быть различными, но выполнены условия 1–3; $\Phi(x) \geq F_j(x) \geq Q(x)$ – см. выше раздел 2.2.

Определение 2. *Считающий процесс*

$$N_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1} \left\{ \sum_{k=1}^i \xi_k \leq t \right\},$$

где $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ удовлетворяют условиям 1–3 раздела 2.2, называется процессом почти-восстановления.

Замечание 6. Ранее другое обобщение процессов восстановления рассматривалось в работах [3, 6] и др., и такие процессы назывались *обобщёнными процессами восстановления*.

Замечание 7. Заметим, что «в чистом виде» процессы почти-восстановления рассматривать не имеет смысла: зависимость и неодинаковая распределённость периодов почти-восстановления возникает в реальных ситуациях из-за воздействия внешних параметров – или в тех случаях, когда несколько процессов восстановления взаимодействуют между собой и оказывают друг на друга влияние. В частности, в рассматриваемой в данной работе модели обобщённой СМО Эрланга – Севастьянова периоды между поступлениями требований представляют собой процессы почти-восстановления.

В работе [16] (см. также [35]) приводится следующее обобщение неравенства Лордена ([18]):

Теорема 2. *Если условия 1–3 для интенсивностей сл.в. ξ_i выполнены, и $\mathbb{E} \eta^k < \infty$, то для процесса B_t верны следующие неравенства:*

$$(11) \quad \mathbb{E} (b_t)^{k-1} \leq \mathbb{E} \eta^{k-1} + \frac{\mathbb{E} \eta^k}{k \mathbb{E} \zeta},$$

$$\text{где} \quad \mathbb{E} \eta^k = \int_0^{\infty} x^k d\Phi(x); \quad \mathbb{E} \zeta = \int_0^{\infty} x dQ(x);$$

и $Q(x) = 1 - \int_0^x \exp\left(-\int_0^s q(t) dt\right) ds$ – см. обозначения в замечании 3 раздела 2.2.

Следствие 1. При выполнении условий 1–3 раздела 2.2 верно

$$(12) \quad \mathbb{E}(b_t) \leq \mathbb{E}\eta + \frac{\mathbb{E}\eta^2}{2\mathbb{E}\zeta}.$$

5.2. ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

«ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СКЛЕИВАНИЯ» К ПРОЦЕССУ X_T

Итак, если в некоторый момент времени $\tilde{\tau}$ один из двух процессов X_t, X'_t попадает в множество $S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(0; \alpha)\}$, то с вероятностью большей, чем $\pi_0 = \rho$ (см. (10)), второй процесс находится в свободном состоянии (в соответствующей системе отсутствуют требования), т.е. в этот момент времени, например, $X_{\tilde{\tau}} = (0; \alpha)$ и $X'_{\tilde{\tau}} = (0; \beta)$.

В момент $\tilde{\tau}$ перескоки обоих процессов поступления требований в обе системы могут быть оценены с помощью обобщённого неравенства Лордена. Действительно, в соответствии с (11)–(12)), $\mathbb{E}\alpha \leq \mathbb{E}\eta + \frac{\mathbb{E}\eta^2}{2\mathbb{E}\zeta} \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_0$ и $\mathbb{E}\beta \leq \mathbb{E}\eta + \frac{\mathbb{E}\eta^2}{2\mathbb{E}\zeta} \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_0$.

Поэтому для всех $\Theta > \Theta_0$ верно $\mathbb{P}\{\alpha < \Theta\} \geq 1 - \frac{\Theta_0}{\Theta}$ и $\mathbb{P}\{\beta < \Theta\} \geq 1 - \frac{\Theta_0}{\Theta} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1$, что следует из неравенства Маркова.

Зафиксируем некоторое число $\Theta > \Theta_0$ – от его выбора зависят дальнейшие вычисления.

Обе нижние границы интенсивностей $\varphi(s) > 0$ при $s > T$ для $X_t = (0, x_t^{(0)})$, $X'_t = (0, x'_t{}^{(0)})$, поэтому общая часть распределений остаточных времён пребывания обоих процессов в свободном (без требований) состоянии не менее, чем:

$$\varkappa(\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\alpha < \Theta, \beta < \Theta} \int_0^\infty \min\{\lambda_0(\alpha + s), \lambda_0(\beta + s)\} ds \stackrel{\text{def}}{=} \pi_2.$$

То есть в этом случае можно применить основную лемму склеивания, и в случае, если $X_{\tilde{\tau}} = (0, \alpha)$ и $X'_{\tilde{\tau}} = (0, \beta)$, с веро-

ятностью $\mathbb{P}\{\alpha < \Theta \ \& \ \beta < \Theta\} \geq \pi_1^2$ можно применять основную лемму склеивания с учётом общей части остаточных времён пребывания в свободном состоянии обеих СМО не менее $\kappa(\Theta) = \pi_2$, и с вероятностью не меньшей, чем π_2 , процессы совпадут в начале следующего периода занятости (т.е. их свободные периоды закончатся одновременно).

Стало быть, с вероятностью большей, чем $\pi \stackrel{\text{def}}{=} \pi_0 \pi_1^2 \pi_2$, мы можем успешно применить основную лемму склеивания в момент попадания каждого из процессов X_t, X'_t в свободное состояние (естественно, при условии, что рассматриваются полные периоды почти-восстановления). (Полный период почти-восстановления начинается с нулевого значения перескока, т.е. в нашем случае это предыдущее поступление требования в систему.) И, в случае совпадения этих процессов после её применения, их распределения в дальнейшем будут совпадать в любой последующий момент времени.

Иначе говоря, после любого попадания процесса X_t или X'_t в множество $\mathcal{S}_0$ мы с некоторой оцененной вероятностью можем получить момент склеивания процессов X'_t и X_t – в момент перехода из свободного состояния в занятое, т.е. в момент регенерации, когда состояние системы есть $(1, 0; 0)$.

Таким образом, в конце любого периода регенерации процессы X_t и X'_t могут совпасть с вероятностью большей, чем π (эта оценка вероятности может быть улучшена, например, подходящим выбором величины Θ). Следовательно, время склейки $\tau(X'_0)$ – это геометрическая сумма периодов регенерации процесса X'_t включая первый (неполный) период регенерации. Напомним, что $X_0 = (0, 0)$, а X'_0 – произвольный элемент пространства состояний $\mathcal{X}$.

Итак, теперь мы можем найти оценку сверху для $\mathbb{E}[\tau(X'_0)]^k$ в случае, когда $\mathbb{E} \xi_i^k < \infty$ ($C > k - 1$):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\tau(X'_0)]^k &\leq \pi \sum_{i=0}^{\infty} (1-\pi)^i \mathbb{E} \left(R_0 + \sum_{j=1}^i b_j \right)^k \leq \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (1-\pi)^i (i+1)^{k-1} \mathbb{E} \left(R_0^k + \sum_{j=1}^i R_j^k \right) = \\
 &= \mathbb{E} R_0^k \times \sum_{i=0}^{\infty} (1-\pi)^i (i+1)^{k-1} + \mathbb{E} R_1^k \times \sum_{i=0}^{\infty} (1-\pi)^i (i+1)^k = \\
 &= K_0(k, \pi) \mathbb{E} R_0^k + K(k, \pi) \mathbb{E} R_1^k,
 \end{aligned}$$

где R_0 – это первый по времени момент регенерации процесса X'_t , а $R_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} R_1$, $i \in \mathbb{N}$ – это длина последующих (одинаково распределённых) периодов регенерации системы.

5.3. МЕТРИКА ПОЛНОЙ ВАРИАЦИИ

Далее, если $\mathcal{P}_t$ – распределение процесса X_t (в момент t), а $\mathcal{P}'_t$ – распределение процесса X'_t , то

$$\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}'_t\|_{TV} \leq 2 \frac{K_0(k, \pi) \mathbb{E} R_0^k + K(k, \pi) \mathbb{E} R_1^k}{t^k}.$$

Поскольку $\mathcal{P}'_t \Rightarrow \mathcal{P}$ для всех X'_0 , получаем

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|_{TV} &\leq 2 \frac{\int_{\mathcal{X}} \left(K_0(k, \pi) \mathbb{E} R_0^k + K(k, \pi) \mathbb{E} R_1^k \right) \mathcal{P}(\mathrm{d}X'_0)}{t^k} = \\
 &= 2 \frac{K_0(k, \pi) \left(\int_{\mathcal{X}} \mathbb{E} R_0^k \mathcal{P}(\mathrm{d}X'_0) \right) + K(k, \pi) \mathbb{E} R_1^k}{t^k}.
 \end{aligned}$$

Для интегрирования по мере (распределению) $\mathcal{P}$ надо его знать.

Однако нам неизвестно стационарное распределение процесса ни для процесса X_t , ни для хорошо изученной «стандартной» модели.

5.4. ОЦЕНКА СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\mathcal{P}$

Оценки распределения $\mathcal{P}$ снизу могут быть получены стандартными методами теории восстановления (см., например, [21]).

Поскольку для процесса восстановления с интенсивностью $v(s)$ и ф.р. $\Upsilon(s)$ времени восстановления $V_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} V_1$ оценка стационарного распределения времени перескока $\tilde{b}$ такова: $\mathbb{P}\{\tilde{b} \leq a\} =$

$$\frac{\int_a^\infty 1 - \Upsilon(u) du}{\int_0^\infty x^2 d\Upsilon(x)}, \text{ то при интегрировании по этой мере получим}$$

$d\mathbb{P}\{\tilde{b} \leq a\} = \frac{\Upsilon(a)}{\mathbb{E}(V_1)^2}$. Поэтому, учитывая условия раздела 2.2 и замечания 3, для интегрирования по стационарному распределению исследуемого процесса обслуживания по всему пространству $\mathcal{X}$ имеем:

$$d\left(\mathcal{P}\{n_t = 0, x^{(0)} \leq a_0\}\right) \leq 1 \times \frac{\tilde{\mathcal{L}}(a_0) da_0}{\int_0^\infty x^2 d\mathcal{L}(x)};$$

$$d\left(\mathcal{P}\left\{n_t = m > 0, x^{(0)} \leq a_0, x^{(1)} \leq a_1, x^{(2)} \leq a_2, \dots \dots x^{(m)} \leq a_m, \right\}\right) \leq$$

$$\leq e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!} \times \frac{\tilde{\mathcal{L}}(a_0) da_0}{\int_0^\infty x^2 d\mathcal{L}(x)} \times \frac{Q(a_1)}{\int_0^\infty x^2 d\Phi(x)} \times \frac{Q(a_2)}{\int_0^\infty x^2 d\Phi(x)} \times \dots \dots \times \frac{Q(a_m)}{\int_0^\infty x^2 d\Phi(x)},$$

$$\text{где } Q(x) = 1 - \exp\left(\int_0^x -q(s) ds\right).$$

Теперь, интегрируя $\int_{\mathcal{X}} \mathbb{E} R_0^k \mathcal{P}(\mathrm{d}X'_0)$ можно вычислить оценку константы **К**.

5.5. ДРУГОЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОЦЕНКИ ДЛЯ **К**

Можно также рассмотреть вложенный процесс восстановления с периодами регенерации, равными моментам попадания регенерирующего процесса X_t в точки регенерации, т.е. моменты попадания в состояние $(1; 0; 0)$ – это моменты поступления в свободную СМО требования. Вложенный период восстановления такого регенерирующего процесса при выполнении условий раздела 2.2 позволяет оценивать степенную скорость сходимости с помощью неравенства Лордена. Для этого для исследуемого процесса восстановления надо найти оценки интенсивности восстановления по формулам (5)–(7), и эти оценки могут быть использованы по схемам, предложенным в [31, 32].

Благодарности

Автор благодарен Л. Г. Афанасьевой за ценные обсуждения во время работы над статьёй. Также автор благодарит Э.Ю. Калимулину за большую помощь в подготовке статьи. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00575 А.

Литература

1. АНИЧКИН С.А. *Склеивание процессов восстановления и его применение* // Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара. – 1984. – М.: ВНИИСИ. – С. 4–24.
2. БОРИСОВ И.С. *Методы одного вероятностного пространства для марковских процессов* // Тр. Ин-та математики. – 1982. – Т. 1. – С. 4–18.
3. БОРОВКОВ А.А. *Обобщенные процессы восстановления*. – М.: Российская академия наук, 2020. – 453 с.

4. СЕВАСТЬЯНОВ Б.А. *Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора* // Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь–июль 1956. – 1959. –Т. 4. – М.: Изд-во АН СССР. – С. 121–135.
5. СЕВАСТЬЯНОВ Б.А. *Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами* // Теория вероятн. и ее примен. – 1957. – Т. 2, вып. 1. – С. 106–116.
6. ШЕЛЕПОВА А.Д., САХАНЕНКО А.И. *Об асимптотике вероятности невыхода неоднородного обобщенного процесса восстановления за невозрастающую границу* // Сиб. электрон. матем. изв. – 2021. – Т. 18:2. – С. 1667–1688.
7. AFANASYEVA L.G., TKACHENKO A.V. *On the Convergence Rate for Queueing and Reliability Models Described by Regenerative Processes* // Journal of Mathematical Sciences. – October 2016. – Vol. 218, Issue 2. – P. 119–36.
8. ASMUSSEN S. *Applied probability and queues*. – Springer, New York, 2003.
9. CHANG J. T. *Inequalities for the Overshoot* // The Annals of Applied Probability. – 1994. – Vol. 4(4). – P. 1223.
10. DOEBLIN W. *Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markov à un nombre fini d'états* // Rev. Math. de l'Union Interbalkanique. – 1938. – Vol.2. – P. 77–105.
11. ERLANG A. K. *Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges* // Elektroteknikeren. – 1917. – Vol. 13 – P. 5–13 (in Danish); Engl. transl.: P.O. Elect. Eng. Journal. – 1918. – Vol. 10. – P. 189–197; Reprinted as: WEB-based edition by permission from the Danish Acad. Techn. Sci. at <http://oldwww.com.dtu.dk/teletraffic/Erlang.html>.
12. FERREIRA M.A., ANDRADE M. *The $M|G|\infty$ queue busy period distribution exponentiality* // Journal of applied mathematics. – 2011. – Vol. 4, No. 3. – P. 249–260.

13. FORTET R. *Calcul des probabilités*. – CNRS, Paris, 1950.
14. GRIFFEATH D. *A maximal coupling for Markov chains* // und Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie Verwandte Gebiete. – 1975. – Vol. 31, Iss. 2. – P. 95–106.
15. KALASHNIKOV V.V. *Mathematical Methods in Queuing Theory*. – Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994.
16. KALIMULINA E., ZVERKINA G. *On some generalization of Lorden's inequality for renewal processes* // arXiv.org. Cornell: Cornell university library. – 2019. – 1910.03381v1. – P. 1–5.
17. KATO K. *Coupling Lemma and Its Application to The Security Analysis of Quantum Key Distribution* // Tamagawa University Quantum ICT Research Institute Bulletin. – 2014. – Vol.4, No.1, – P. 23-30.
18. LORDEN G. *On Excess over the Boundary* // The Annals of Mathematical Statistics. – 1970. – Vol. 41(2). – P. 520–527.
19. PECHINKIN A.V. *On an invariant queueing system* // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optim. – 1983. – Vol. 14(3). – P. 433–444.
20. PECHINKIN A.V., SOLOVYEV A.D., YASHKOV S.F. *A system with servicing discipline whereby the order of minimum remaining length is serviced first* // Eng. Cybern. – 1979. – Vol. 17(5). – P. 38–45.
21. SMITH W. L. *Renewal theory and its ramifications* // J. Roy. Statist. Soc. – 1958. – Ser. B, Vol. 20:2. – P. 243–302.
22. STADJE W. *The busy period of the queueing system $M|G|_{\infty}$* // Journal of Applied Probability. – 1985. – Vol. 22. – P. 697–704.
23. STOYAN D. *Qualitative Eigenschaften und Abschätzungen stochastischer Modelle*. – Berlin, 1977.
24. TAKÁCS L. *Introduction to the Theory of Queues*. – Oxford University Press, 1962.
25. VAN DOORN E.A., ZEIFMAN A.I. *On the speed of convergence to stationarity of the Erlang loss system* // Queueing Systems. – 2009. – Vol. 63. – P. 241–252.
26. VERETENNIKOV A.YU. *On rate of convergence to the stationary distribution in queueing systems with one serving*

- device* // Automation and Remote Control. – Vol. 74, Iss. 10. – P. 1620–1629. (2013).
27. VERETENNIKOV A.YU. *On the rate of mixing and convergence to a stationary distribution in Erlang-type systems in continuous time* // Problems Inf. Transmiss. –2010. – Vol. 46(4). – P. 382–389.
 28. VERETENNIKOV A.YU. *The ergodicity of service systems with an infinite number of servomechanisms* // Математические заметки. – 1977. – Vol. 22(4). – P. 804–808.
 29. VERETENNIKOV A., BUTKOVSKY O. A. *On asymptotics for Vaserstein coupling of Markov chains* // Stochastic Processes and their Applications. – 2013. – Vol. 123(9). – P. 3518–3541.
 30. VERETENNIKOV A.YU., ZVERKINA G.A. *Simple proof of Dynkin's formula for single-server systems and polynomial convergence rates* // Markov Proc. Rel. Fileds. – 2014. – Vol. 20, Iss. 3. – P. 479–504; arXiv:1306.2359 [math.PR] (2013).
 31. ZVERKINA G. *On strong bounds of rate of convergence for regenerative processes* // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 678. – P. 381–393.
 32. ZVERKINA G. *Lorden's inequality and coupling method for backward renewal process* // Proc. of XX Int. Conf. on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2017, Moscow), 2017. – P. 484–491.
 33. ZVERKINA G. *On strong bounds of rate of convergence for regenerative processes* // Communications in Computer and Information Science – 2016. – Vol. 678. – P. 381–393.
 34. ZVERKINA G. *About some extended Erlang-Sevast'yanov queueing system and its convergence rate* (English and Russian versions) // <https://arxiv.org/abs/1805.04915>; Фундаментальная и прикладная математика. – 2018. – No. 22, Iss. 3. – P. 57–82.
 35. ZVERKINA G., KALIMULINA E. *On generalized intensity function and its application to the backward renewal time*

estimation for renewal processes // Proc. of the 5th Int. Conf. on Stochastic Methods (ICSM-5, 2020). – 2020. – М.: Изд-во РУДН. – P. 306–310.

LORDEN'S INEQUALITY AND THE RATE OF CONVERGENCE OF THE DISTRIBUTION OF ONE GENERALIZED ERLANG – SEVAST'YANOV QUEUING SYSTEM

Galina Zverkina, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (zverkina@gmail.com).

Abstract: It is more important to estimate the rate of convergence to a stationary distribution rather than only to prove the existence one in many applied problems of reliability and queuing theory. This can be done via standard methods, but only under assumptions about an exponential distribution of service time, independent intervals between recovery times, etc. Results for such simplest cases are well-known. Rejection of these assumptions results to rather complex stochastic processes that cannot be studied using standard algorithms. A more sophisticated approach is needed for such processes. That requires generalizations and proofs of some classical results for a more general case. One of them is the generalized Lorden's inequality proved in this paper. We propose the generalized version of this inequality for the case of dependent and arbitrarily distributed intervals between recovery times. This generalization allows to find upper bounds for the rate of convergence for a wide class of complicated processes arising in the theory of reliability. The rate of convergence for a two-component process has been obtained via the generalized Lorden's inequality in this paper.

Keywords: regenerative Markov processes, coupling method, total variation metric, generalized Erlang-Sevastyanov system, rate of convergence.

УДК 519.21

ББК 22.171

DOI: 10.25728/ubs.2023.102.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.М. Вишневым.*

Поступила в редакцию 14.11.2022

Дата опубликования 31.03.2023.

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЗАДАННОГО КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ¹

Фуртат И. Б.², Гушин П. А.³, Нгуен Б. Х.⁴, Колесник Н. С.⁵
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

Приведена модификация классического алгоритма адаптивного управления по выходу с целью гарантии нахождения выходного сигнала в заданном разработчиком множестве в любой момент времени. В отличие от классических схем адаптивного управления, где нельзя повлиять на качество переходного процесса, качество регулирования в установившемся режиме и время переходного процесса, здесь для решения данных проблем предлагается дополнить классическую процедуру адаптивного управления нелинейным законом управления. Нелинейный закон управления базируется на взаимнообратном преобразовании выходной переменной так, чтобы задача с ограничениями свелась к задаче без ограничений. Для преобразованной системы без ограничений можно применять любые существующие схемы адаптивного управления для ее стабилизации. Причем в новых координатах не требуется гарантировать заданное качество переходных процессов в любой момент времени и не важна величина предельной ошибки. Это связано с тем, что обратные преобразования всегда будут гарантировать нахождение исходных сигналов в заданных разработчиком ограничениях. Решена задача для объектов с единичной относительной степенью дабы избежать громоздких выводов. Однако все полученные результаты могут быть непосредственно распространены на объекты с произвольной относительной степенью. Приведен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного метода и подтверждающий теоретические выводы.

Ключевые слова: динамическая система, адаптивное управление, нелинейное управление, замена координат, устойчивость, управление.

1. Введение

Методы адаптивного управления хорошо зарекомендовали себя в задачах управления с параметрической неопределенностью и внешними возмущениями. Несмотря на то, что первые задачи по адаптивному управлению были поставлены еще

¹ Результаты получены при поддержке гранта Российского научного фонда № 18-79-10104-П.

² Игорь Борисович Фуртат, д.т.н., профессор (cainenash@mail.ru).

³ Павел Александрович Гушин, к.т.н. (guschin.p@mail.ru).

⁴ Ба Хю Нгуен, аспирант (leningrat206@gmail.com).

⁵ Никита Сергеевич Колесник, аспирант (nik.kolesnik.1998@mail.ru).

в 50-х годах XX века, до сих пор публикуется множество различных схем адаптивного управления, что подтверждает интерес к данным задачам.

Часто цель адаптивного управления состоит в стабилизации выходной переменной объекта в заданном множестве в асимптотике или за конечное время [2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 20]. При этом оценки для расчета характеристик предельного множества и времени переходного процесса либо достаточно грубы, либо остаются в терминах существования. До сих пор нет результатов по адаптивному управлению с обеспечением требуемого качества переходных процессов. Ранее были предложены методы нелинейного управления [4, 13] с гарантией нахождения выходных переменных в заданных множествах. Однако данные методы применимы в условиях известных параметров объекта. В настоящей статье результаты [4, 13] будут обобщены на адаптивное управление объектами с параметрической неопределенностью.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 ставится задача адаптивного управления с ограничениями на выходную переменную. В частности, ограничения могут влиять на качество переходных процессов и процессов в установившемся режиме, а также ограничения можно задать время переходного процесса. В разделе 3 предложен метод решения, включающий в себя методы классического адаптивного управления [2, 3, 16, 17] и метод, гарантирующий нахождение выходных сигналов в заданном множестве [4, 13]. В разделе 4 рассмотрен пример моделирования, иллюстрирующий теоретические результаты и подтверждающий сделанные выводы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему

$$(1) \quad Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t),$$

где $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, – сигнал управления; $y \in \mathbb{R}$ – выходной сигнал, доступный измерению; $f \in \mathbb{R}$ – ограниченное возмущение;

$Q(p)$ и $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с постоянными неизвестными коэффициентами и порядками n и $n - 1$ соответственно, $R(\lambda)$ – гурвицевый полином, где λ – комплексная переменная, $p = d/dt$.

Требуется разработать закон управления, который обеспечит нахождение выходного сигнала объекта $y(t)$ в следующем множестве:

$$(2) \quad \mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : \underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)\} \text{ для любых } t \geq 0,$$

где $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$ – ограниченные функции вместе со своими первыми производными по времени. Данные функции выбираются разработчиком исходя из требований работы системы. Например (см. рис. 1), можно гарантировать переходные процессы в заданной трубке, границы которой монотонно сходятся к окрестности нуля за заданное время T , в то время как в [2, 3, 16, 17] нельзя гарантировать заданное качество переходных процессов, заданную окрестность в установившемся режиме и заданное время переходного процесса. Сказанное будет наглядно продемонстрировано в примере в конце статьи.

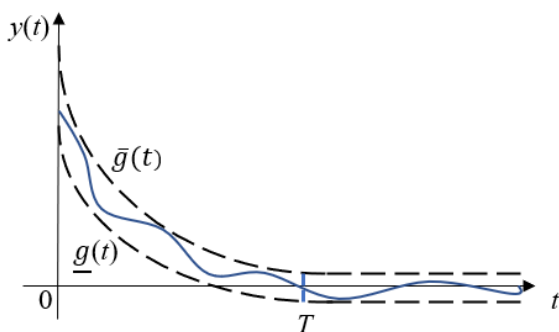


Рис. 1. Частная иллюстрация цели управления

Замечание 1. В постановке задачи рассматривается объект (1) с единичной относительной степенью ($\deg Q(p) - \deg R(p) = 1$). Такие объекты часто исследуются в литературе [1, 10, 16, 21] и могут описывать процесс заполнения жидкости в наливных танках [15], динамику трансмиссии в меха-

нической коробке передач [19], динамику колебательных систем [5] и т.д. Важно, что для таких объектов различными методами управления (метод непосредственной компенсации, метод скоростного градиента [2, 3, 16, 17] и т.п.) можно получить одну и ту же структуру закона адаптивного управления. Для объекта же с относительной степенью больше единицы различные подходы приводят к совершенно различным алгоритмам управления [2]. Поэтому в статье акцентировано внимание на объекте с единичной относительной степенью, чтобы продемонстрировать применение единой структуры адаптивного управления для решения задачи с гарантией заданного качества. Однако, как будет видно из полученных результатов, решение легко может быть обобщено на задачи управления с относительной степенью больше единицы, в частности, с использованием метода расширенной ошибки, алгоритмов адаптации высокого порядка, метод бэкстеппинга [2] и т.д., где в каждом отдельном случае будут получены различные алгоритмы управления.

3. Метод решения

Согласно [2, 16, 17], перепишем выражение (1) в виде

$$(3) \quad y(t) = \frac{k_m}{p+a} \left[u(t) + \frac{N_1(p)}{M(p)} u(t) + \frac{N_2(p)}{M(p)} y(t) + \right. \\ \left. + k y(t) + \frac{\theta}{M(p)} f(t) + \epsilon(t) \right],$$

где $k_m > 0$, $a > 0$ и θ – известные коэффициенты; $M(\lambda)$ – известный гурвицевый полином порядка $n - 1$; $N_1(p)$ и $N_2(p)$ – линейные дифференциальные операторы порядков $n - 2$ каждый и с неизвестными коэффициентами; k – неизвестный параметр; $\epsilon(t)$ – экспоненциально затухающая функция, обусловленная ненулевыми начальными условиями (1).

Обозначим

$$N_1(p) = [c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,n-2}] [1, p, \dots, p^{n-2}]^\top, \\ N_2(p) = [c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,n-2}] [1, p, \dots, p^{n-2}]^\top, \\ c_0 = -[c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,n-2}, c_{2,0}, c_{2,1}, \dots, c_{2,n-2}, k],$$

$$w(t) = \text{col}\{V_u(t), V_y(t), y(t)\},$$

где c_0 – вектор постоянных неизвестных параметров;
 $\bar{f}(t) = \frac{\theta}{M(p)}f(t)$ – новое ограниченное возмущение в силу ограниченности исходной функции $f(t)$ и гурвицевости полинома $M(\lambda)$; $w(t)$ – вектор регрессии, составленный с помощью следующих фильтров:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{V}_u(t) &= FV_u(t) + bu(t), V_u(0) = 0, \\ \dot{V}_y(t) &= FV_y(t) + by(t), V_y(0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $V_u, V_y \in \mathbb{R}^{n-1}$, F – матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом $M(\lambda)$, $b = [0, 0, \dots, 1]^\top$.

Учитывая введенные обозначения, перепишем (3) как

$$(5) \quad \dot{y}(t) = -ay(t) + k_m [u(t) - c_0^\top w(t) + \bar{f}(t) + \epsilon(t)].$$

Согласно [4, 13], для решения задачи управления с заданными ограничениями введем замену выходной переменной y в виде

$$(6) \quad y(t) = \Phi(\varepsilon(t), t),$$

где $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}$ – непрерывно-дифференцируемая функция по t , $\Phi(\varepsilon, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\underline{g}(t) < \Phi(\varepsilon, t) < \bar{g}(t)$ для любых $t \geq 0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$;

б) существует обратное отображение $\varepsilon = \Phi^{-1}(y, t)$ для любых $y \in \mathcal{Y}$ и $t \geq 0$;

в) функция $\Phi(\varepsilon, t)$ непрерывно-дифференцируемая по ε и t , а также $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \neq 0$ для любых $y \in \mathcal{Y}$ и $t \geq 0$;

г) функция $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ ограничена по $t \geq 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Теперь определим динамику по переменной ε для исследования устойчивости замкнутой системы. Для этого найдем полную производную по времени от (6) в виде

$$\dot{y} = \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}.$$

Так как $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \neq 0$ (см. условие (в)), то, принимая во внимание (5), перепишем последнее равенство как

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left(-ay(t) + \right. \\ & \left. + k_m [u(t) - c_0^\top w(t) + \bar{f}(t) + \epsilon(t)] - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

То есть с помощью преобразования координат (6) исходная задача с ограничениями сведена к задаче без ограничений. Теперь необходимо синтезировать закон управления u , обеспечивающий устойчивость по вход-состоянию системы (7).

Зададим закон управления в виде

$$(8) \quad \begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t), \\ u_1(t) &= c^\top(t)w(t), \\ u_2(t) &= \frac{1}{k_m} \left[ay(t) + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} - \alpha \varepsilon(t) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $u_1(t)$ – закон адаптивного управления; $u_2(t)$ – закон управления, гарантирующий нахождение $y(t)$ в множестве (2); $c(t)$ – вектор настраиваемых параметров; $\alpha > 0$.

Подставив (8) в (7), получим

$$(9) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \times \\ \times [-\alpha \varepsilon + k_m(c(t) - c_0)^\top w(t) + k_m \bar{f}(t) + k_m \varepsilon(t)].$$

Теорема 1. Пусть для преобразования (5) выполнены условия а)–з), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t , а также $\sup_t \left\{ \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right\} < \infty$. Тогда для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ закон управления (7) вместе с алгоритмом адаптации

$$(10) \quad \dot{c}(t) = -\beta \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \varepsilon(t)w(t) - \gamma c(t)$$

обеспечивает принадлежность выходной переменной $y(t)$ множеству (2).

Замечание 2. Рассмотрим отличия классического адаптивного закона управления [2, 3, 16, 17] от предложенного. Классический вид адаптивного закона управления выглядит как

$$(11) \quad \begin{aligned} u(t) &= u_1(t) = c^\top(t)w(t), \\ \dot{c}(t) &= -\beta y(t)w(t) - \gamma c(t). \end{aligned}$$

Из (8) следует, что предложенный закон управления состоит из классического u_1 , необходимого для компенсации параметрической неопределенности, и нелинейного u_2 – для гарантии нахождения y в множестве (2). Дополнительно алгоритм адаптации (10), в отличие от классического (11), содержит нелинейный коэффициент усиления $\left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1}$ и переменную ε вместо y , поскольку стабилизируется система (9) вместо (5).

Доказательство. Для анализа устойчивости замкнутой системы зададим функцию Ляпунова вида

$$(12) \quad V = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{k_m}{2\beta}(c - c_0)^\top(c - c_0) + \chi \int_t^\infty \varepsilon^2(s)ds,$$

где $\chi > 0$. Найдя полную производную от (12) по времени вдоль траекторий (8) и (10), получим

$$(13) \quad \dot{V} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} [-\alpha \varepsilon^2 + k_m \varepsilon \bar{f}(t) + k_m \varepsilon(t) \varepsilon(t)] - \frac{k_m \gamma}{\beta} c^\top(c - c_0) - \chi \varepsilon^2(t).$$

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$(14) \quad \begin{aligned} \varepsilon \bar{f} &\leq 0,5 \left[\frac{1}{\mu} \varepsilon^2 + \mu \bar{f}^2 \right], \\ \varepsilon \varepsilon &\leq 0,5 \left[\frac{1}{\mu} \varepsilon^2 + \mu \varepsilon^2 \right], \\ -c^\top(c - c_0) &= -0,5[(c - c_0)^\top(c - c_0) + c^\top c - c_0^\top c_0]. \end{aligned}$$

С учетом (14), перепишем (13) как

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} (\alpha - k_m \mu^{-1}) \varepsilon^2 - \\ & - \frac{k_m \gamma}{2\beta} [(c - c_0)^\top(c - c_0) + c^\top c] - \\ & - (\chi - 0,5 k_m \mu) \varepsilon^2(t) + \\ & + \frac{\gamma}{2\beta} c_0^\top c_0 + 0,5 k_m \mu \sup\{\bar{f}\}^2. \end{aligned}$$

Из (15) следует, что при выполнении условий

$$(16) \quad \begin{aligned} |\varepsilon| &> \sqrt{\frac{\mu(\gamma c_0^\top c_0 + k_m \beta \mu \sup\{\bar{f}\}^2)}{2\beta(\alpha \mu - k_m)}} \sup_t \left\{ \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right\}, \\ \alpha &> \frac{k_m}{\mu}, \\ \chi &> 0,5 k_m \mu, \end{aligned}$$

имеем $\dot{V} < 0$. При этом из (16) видно, что всегда существуют α , μ и χ , обеспечивающие $\dot{V} < 0$. Из условия (б) следует, что преобразование (6) гарантирует выполнение условия (2). Теорема доказана.

Замечание 3. Из (16) видно, что при уменьшении значения γ и при увеличении значения α можно уменьшить предельное значение по $|\varepsilon|$. В свою очередь, из условий б) и г) следует, что преобразование (6) является строгой монотонной функцией. Значит, с уменьшением предельного значения $|\varepsilon|$ в перделе уменьшается колебательность по переменной y в множестве (2).

4. Пример

Рассмотрим объект управления (1) с различными коэффициентами в операторах $Q(p)$ и $R(p)$:

а) $Q(p) = (p - 1)^3$ и $R(p) = (p + 1)^2$,

б) $Q(p) = p^3 - 5p^2 + 3p - 1$ и $R(p) = 0,5(p + 1)^2$,

с) $Q(p) = p^3 + 5p^2 - 7p + 5$ и $R(p) = 0,5(p + 1)^2$,

начальными условиями $p^2 y(0) = p y(0) = y(0) = 4$ и возмущением

$$f(t) = 5 + 5 \sin(1,5t) + 3 \cos(0,8t) + d(t),$$

где $d(t) = \text{sat}\{\hat{d}(t)\}$, $\text{sat}\{\cdot\}$ – функция насыщения, $\hat{d}(t)$ – белый шум, моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока «Band-Limited White Noise» с мощностью шума 1 и периодом дискретизации 0,1.

Сформируем алгоритм управления. Преобразование координат (6) зададим в виде

$$\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t)e^\varepsilon + \underline{g}(t)}{e^\varepsilon + 1}.$$

Качество управления определим функциями

$$\bar{g}(t) = 4e^{-3t} + 0,1,$$

$$\underline{g}(t) = 3,8e^{-3t} - 0,1.$$

Зададим в фильтрах (4)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

В законе управления (7) зададим $\alpha = 1$, $a = 1$ и $k_m = 1$.

В алгоритме адаптации (14) зададим $\beta = 1$ и $\gamma = 1$.

Сравним предложенный алгоритм управления с адаптивным управлением [2, 3, 16, 17], представленным в виде (11). Выберем в данном адаптивном алгоритме те же параметры, что и в предложенном алгоритме.

На рис. 3 приведены результаты переходных процессов для алгоритма [2, 3, 16, 17] (пунктирные линии) и предложенного закона управления при параметрах а), б) и с) (сплошные линии); внизу пунктирными линиями изображены графики функций $\bar{g}(t)$ и $\underline{g}(t)$, задающие качество переходных процессов, и сплошными линиями – графики выходных сигналов с предложенным адаптивным законом управления

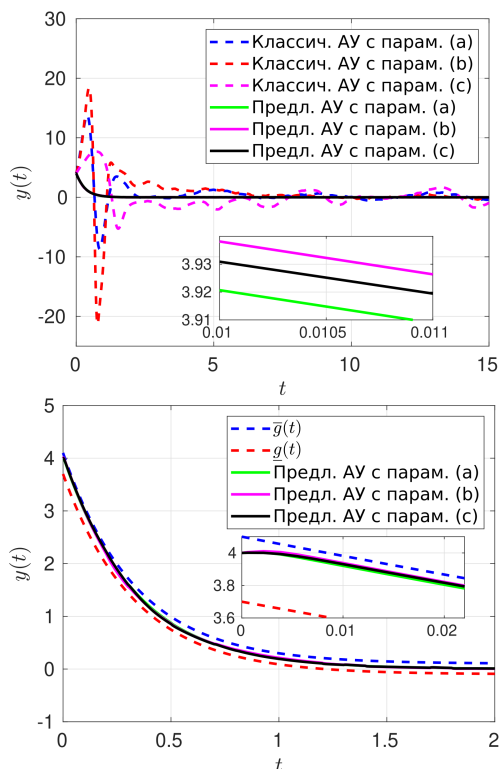


Рис. 2. Вверху: переходные процессы для классического адаптивного управления и предложенного адаптивного алгоритма (сплошные линии). Внизу: графики функций $\bar{g}(t)$ и $\underline{g}(t)$ и графики выходных сигналов с предложенным адаптивным законом управления

Достоинство предложенного алгоритма, в отличие от [2, 3, 16, 17], очевидно: переходные процессы всегда содержатся в трубке (2), границами которой можно задать качество переходных процессов. Так, полученные процессы почти экспоненциально затухают в предельное множество $(-0,1; 0,1)$ за время 1,5 с, в то время как алгоритмы [2, 3, 16, 17] неконтролируемы в плане переходного процесса и времени переходного процесса, а также невозможно априори определить качество выходной переменной в установившемся режиме.

Замечание 4. Предлагаемый метод напрямую зависит от начальных условий объекта. Если $y(0)$ не принадлежит заданному множеству, то предлагаемый метод неприменим, поскольку из преобразования (6) сигнал $y(t)$ должен быть определен внутри заданного множества в любой момент времени. Указанный выше недостаток можно устранить путем добавления к ограничивающим функциям аддитивной быстрой экспоненциально затухающей функции так, чтобы новые ограничения охватывали начальные условия. На рис. 3 показан переходной процесс по $y(t)$ при $y(0) = 1$, не принадлежащем исходному множеству $\mathcal{Y}$.

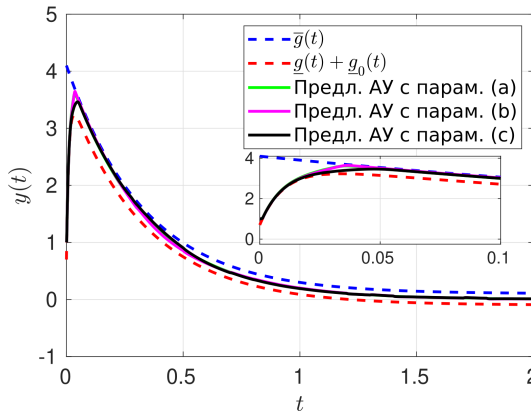


Рис. 3. Переходные процессы для предложенного адаптивного алгоритма (сплошные линии) при $y(0) = 1$. Пунктирными линиями изображены графики функций $\bar{g}(t)$ и $\underline{g}(t) + \underline{g}_0(t)$, задающие качество переходных процессов

При этом к нижней ограниченной функции $\underline{g}(t)$ добавлена составляющая

$$\underline{g}_0(t) = -3e^{-100t},$$

чтобы начальное условие $y(0)$ было ограничено снизу новой функцией ограничения $\underline{g}(t)$.

5. Заключение

В статье применены методы классического адаптивного управления [2, 3, 16, 17] и метод нелинейного управления [4, 13], которые позволили создать новый метод адаптивного управления, гарантирующий заданной качество переходных процессов. Вначале используется метод [4, 13], позволяющий преобразовать задачу с ограничениями к задаче без ограничений. Затем применяется классический метод адаптивного управления [2, 3, 16, 17]. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и показали, что в классических схемах адаптивного управления при различных параметрах объекта наблюдаются существенно разные неконтролируемые переходные процессы, в то время как в новой схеме управления при тех же параметрах гарантируется почти заданное качество переходных процессов.

Литература

1. ЕРЕМИН Е.Л. *Алгоритм адаптивной системы управления с явно-эталонной моделью для строго минимально-фазового объекта* // Информатика и системы управления. – 2004. – №2, Т. 8. – С. 157–166.
2. МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. – СПб.: Наука, 2000.
3. ФРАДКОВ А.Л. *Кибернетическая физика: принципы и примеры*. – СПб.: Наука, 2003.
4. ФУРТАТ И.Б., ГУЩИН П.А. *Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала*

- ла в заданном множестве // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №4. – С. 121–139.
5. ХАЛИЛ Х.К. *Нелинейные системы*. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
 6. ANDERSON B.D.O. *Adaptive systems, lack of persistency of excitation and bursting phenomena* // Automatica. – 1985. – Vol. 21, No. 3. – P. 247–258.
 7. ANNASWAMY A.M., SKANTZE F.P., LOH A.-P. *Adaptive control of continuous time systems with convex/concave parametrization* // Automatica. – 1998. – Vol. 34, No. 1. – P. 33–49.
 8. ARSLAN G., BASAR T. *Disturbance attenuating controller design for strict-feedback systems with structurally unknown dynamics* // Automatica. – 2001. – Vol. 37, No. 8. – P. 1175–1188.
 9. CAMPION G., BASTIN G. *Analysis of an adaptive controller for manipulators: Robustness versus flexibility* // Systems & Control Letters. – 1989. – Vol. 12, No. 3. – P. 251–258.
 10. CHOPRA N., SPONG M.W. *Output Synchronization of Nonlinear Systems with Relative Degree One* // Recent Advances in Learning and Control. – Springer, London, 2008. – Vol. 371. – P. 51–64.
 11. FARZA M., M'SAAD M., MAATOUG T., KAMOUN M. *Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems* // Automatica. – 2009. – Vol. 45, No. 10. – P. 2292–2299.
 12. FURTAT I.B. *Robust Synchronization of the Structural Uncertainty Nonlinear Network with Delay and Disturbances* // IFAC Proc. Volumes (IFAC-PapersOnline), 11th IFAC Int. Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, ALCOSP–2013. – 2013. – P. 227–232.
 13. FURTAT I., GUSHCHIN P. *Nonlinear feedback control providing plant output in given set* // Int. Journal of Control. – 2021. – DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>.

14. GOODWIN G.C., MAYNE D.Q. *A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control* // Automatica. – 1987. – Vol. 23, No. 1. – P. 57–70.
15. HASHIM Z.S., IBRAHEEM I.K. *A relative degree one modified active disturbance rejection control for four-tank level control system* // Int. Review of Applied Sciences and Engineering. – 2021. – No. 2, Vol. 8. – P. 157–166.
16. IOANNOU P.A., SUN J. *Robust Adaptive Control*. – Courier Corporation, 2012.
17. NARENDRA K.S., ANNASWAMY A.M. *Stable Adaptive Systems*. – Courier Corporation, 2012.
18. POLYCARPOU M.M., IOANNOU P.A. *A robust adaptive nonlinear control design* // Automatica. – 1996. – Vol. 32, No. 3. – P. 423–427.
19. RIFAI K.E., YOUSEF-TOUMI K. *Robust Adaptive Control of Switched system*. – InTech, Switched Systems, 2009.
20. TAO G. *Multivariable adaptive control: A survey* // Automatica. – 2014. – Vol. 50, No. 11. – P.2737–2764.
21. ZHAO G., CHEN G., MI J. *Overcoming a Fundamental Limitation of Linear Systems with Generalized First Order Reset Element* // Proc. of the 37th Chinese Control Conference (CCC). – 2018. – DOI: 10.23919/ChiCC.2018.8483381.

ADAPTIVE CONTROL WITH A GUARANTEE OF A GIVEN PERFORMANCE

Igor Furtat, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Dr.Sc, professor (cainenash@mail.ru).

Pavel Gushchin, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Cand.Sc (gushchin.p@mail.ru).

Ba Huy Nguyen, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, аспирант (leningrat206@gmail.com).

Nikita Kolesnik, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, аспирант (nikita@gmail.com).

Abstract: The paper presents a modification of the classical output adaptive control algorithm in order to guarantee that the output signal belongs to a given set specified by the developer at any time. Unlike classical adaptive control schemes, where it is impossible to influence control performances, including transient and steady-state performance, it is proposed here to supplement the classical adaptive control procedure with a nonlinear control law to solve these problems. The nonlinear control law is based on the special coordinate transformation of the output variable so that the problem with constraints is reduced to the problem without constraints. For a transformed system without constraints, any existing adaptive control schemes can be applied to stabilize it. Moreover, in new coordinates, it is not required to guarantee the specified performance of transient processes at any time, and the value of the marginal error is not important. This is due to the fact that inverse transformations will always guarantee that the original signals are within the limits specified by the developer. The problem for plants with a relative degree one is solved in order to avoid cumbersome conclusions. However, all the results obtained can be directly extended to plants with an arbitrary relative degree. An example is given that illustrates the effectiveness of the proposed method and confirms the theoretical conclusions.

Keywords: dynamical system, change of coordinates, stability, control.

УДК 519.7

ББК Ж 50

DOI: 10.25728/ubs.2023.102.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

Поступила в редакцию 06.12.2022.

Дата опубликования 31.03.2023.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫЕ НА БАЗЕ ЛИНЕЙНЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ¹

Фуртат И. Б.², Гушин П. А.³, Копысова Е. А.⁴
(ФГБУН Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург)

Исследуются нелинейные законы управления, полученные из линейного путем двух типов замен с использованием нечетных функций. Первая замена состоит в пропуске каждой компоненты вектора состояния через нелинейную функцию, вторая замена – в пропуске всего линейного закона управления через нелинейную функцию. Для исследования таких систем предлагается представить нелинейные функции в виде линейных с нелинейным угловым коэффициентом. Такое представление позволит использовать аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) для исследования устойчивости замкнутых систем. Найдены области устойчивости и области для начальных условий, полученные в результате многошаговой процедуры поиска решений с использованием ЛМН. Показано, что использование предложенных нелинейных законов управления позволяет уменьшить установившуюся ошибку по сравнению с линейным. Приведены многочисленные моделирования, иллюстрирующие теоретические выводы.

Ключевые слова: динамическая система, нелинейный закон управления, линейные матричные неравенства.

1. Введение

В теории автоматического управления существует практика использования различных нелинейных функций, замещающих или дополняющих существующие законы управления. Например, знаковые законы управления аппроксимируют сигмоидальными функциями [5, 6] для реализации на практике, а также возможности избавиться от чаттеринга в окрестности плоскости скольжения и исследования замкнутой системы без разрывных нелинейностей. В [2, 3] ранее разработанный закон управления [4] про-

¹ Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке госзадания №121112500298-6 (ЕГИСУ НИОКТР).

² Игорь Борисович Фуртат, д.т.н., профессор (cainenash@mail.ru).

³ Павел Александрович Гушин, к.т.н. (guschin.p@mail.ru).

⁴ Есения Алексеевна Копысова (esyako@ya.ru).

пускается через функцию гиперболического тангенса для уменьшения установившейся ошибки слежения по сравнению с [4]. Также в [2, 3, 5, 6] отмечается, что помимо повышения качества регулирования в установившемся режиме использование сигмоидальных функций позволяет сформировать заранее ограниченный закон управления.

Однако ограниченный закон управления в условиях возмущений и неустойчивого объекта может повлечь рассмотрение ограничений на фазовое пространство для сохранения устойчивости замкнутой системы. В условиях же ограниченного фазового пространства можно рассматривать любые непрерывные функции, не только сигмоидальные.

В [6] показано, что аддитивная добавка, например, функции x^3 к существующему закону управления повышает качество демпфирования внешних возмущений. В адаптивном управлении [1] суммирование сигмоидальных слагаемых к существующему адаптивному алгоритму повышает качество регулирования в установившемся режиме. В [9, 10] замена каждой компоненты вектора состояния x_i в линейном законе управления на соответствующие функции $x_i^\gamma \operatorname{sgn}\{x_i\}$, $\gamma > 0$, позволяет увеличить скорость сходимости нормы вектора состояния замкнутой системы по сравнению с использованием линейного алгоритма.

Однако в [2, 3, 5, 6, 9, 10] использование нелинейных функций зачастую требует перерасчета настроечных коэффициентов для нового закона управления, что может усложнить процесс синтеза алгоритма. Проблема же введения нелинейных функций, не меняющих настроечных коэффициентов в существующих законах управления, но при этом улучшающих качество управления в установившемся режиме, в работах [2, 3, 5, 6, 9, 10] не рассматривалась. Поэтому в данной статье на базе линейного закона управления рассмотрим построение новых нелинейных законов, не меняя настроечных параметров исходного линейного алгоритма. Также предложим новый метод исследования устойчивости таких систем, основанный на представлении нелинейной функции в линейной форме с нелинейным угловым коэффициентом.

Такая форма позволит использовать аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) и упростить процедуру поиска множества устойчивости и множества начальных условий. Предложенная в статье многошаговая процедура поиска решений на базе ЛМН позволит расширить искомые области устойчивости и начальных условий.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 задается линейный закон управления, стабилизирующий линейную систему. Не меняя настроечных коэффициентов в линейном законе, каждая компонента вектора состояния пропускается через нечетную функцию либо весь линейный закон управления пропускается через нечетную функцию. В разделе 3 описываются предложенные методы решения и формулируются условия на свойства нелинейных функций, множества устойчивости и множества начальных условий, при выполнении которых нелинейные законы управления будут стабилизировать объект управления. В разделе 4 показано, что предложенные нелинейные алгоритмы управления гарантируют точность в установившемся режиме выше, чем линейный закон управления. В разделе 5 приводятся результаты моделирования, подтверждающие теоретические выводы и иллюстрирующие эффективность используемого метода.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейный объект

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Df,$$

где $x = \text{col}\{x_1, \dots, x_n\}$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ – сигнал управления, $f \in \mathbb{R}^l$ – неизвестное возмущение такое, что $|f| \leq \bar{f}$, матрицы A , B и D известны и имеют соответствующие размерности, пара (A, B) управляема.

Известно [1], что существует матрица $K = [k_1, \dots, k_n]$ такая, что закон управления

$$(2) \quad u = Kx = k_1x_1 + \dots + k_nx_n$$

гарантирует выполнение предельного неравенства

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \delta.$$

Здесь $\delta > 0$ – точность регулирования в установившемся режиме.

В статье введем в рассмотрение нечетную функцию $\varphi(\cdot)$. С учетом данной функции и (2), построим два новых закона управления:

$$(4) \quad u = k_1 \varphi(x_1) + \dots + k_n \varphi(x_n),$$

$$(5) \quad u = \varphi(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n).$$

Требуется определить условия на функцию $\varphi(\cdot)$, при которых при заданной матрице K в (2) законы управления (4) и (5) обеспечат выполнение предельного неравенства (3) с величиной δ меньше, чем линейный закон управления (2).

Замечание 1. В качестве $\varphi(\cdot)$ могут быть рассмотрены стандартные линейные, степенные и сигмоидальные функции, функция насыщения (см. рис. 1) и т.п. Другие специфические функции будут приведены далее.

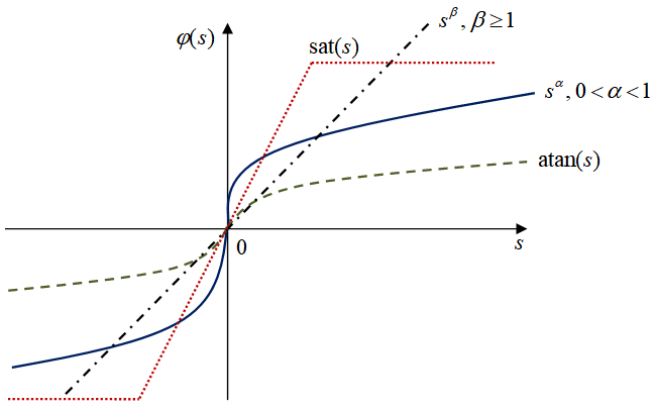


Рис. 1. Примеры функций $\varphi(s)$

3. Метод решения

Для исследования законов управления (4) и (5), рассмотрим представление нелинейной функции $\varphi(s)$ в виде линейной $\varphi(s) = \rho(s)s$ с нелинейным угловым коэффициентом $\rho(s)$, $s \in \mathbb{R}$ (см. рис. 2). Такой подход позволит исследовать нелинейные законы управления (4), (5) наряду с линейным (2), а также привлечь

аппарат линейных матричных неравенств для анализа устойчивости замкнутой системы.

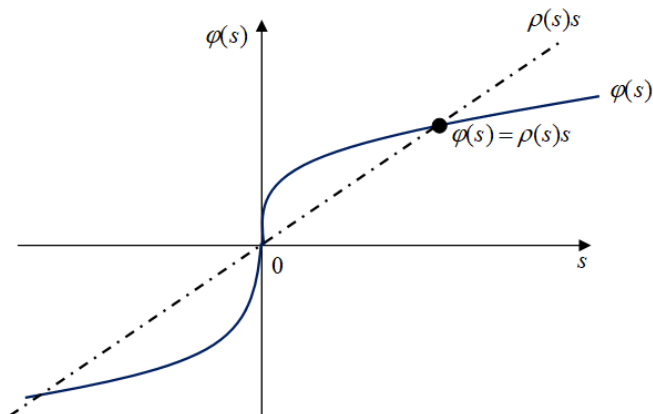


Рис. 2. Иллюстрация замены функции $\varphi(s)$ на функцию линейного вида с переменным угловым коэффициентом $\rho(s)$

3.1. Анализ устойчивости замкнутой системы с законом управления (4)

Обозначим $\Psi(x) = \text{diag}\{\rho(x_1), \dots, \rho(x_n)\}$. Подставив (4) в (1), запишем уравнение замкнутой системы

$$(6) \quad \dot{x} = (A + BK\Psi(x))x + Df.$$

Теорема 1. Пусть для заданных K в (2) и $\tau_i > 0$ существуют $0 \leq \underline{\rho} = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_v = \bar{\rho}$, $\chi_i > 0$, $\gamma_i > 0$ и $P_i = P_i^\top > 0$ такие, что выполнены следующие матричные неравенства

$$(7) \quad \begin{bmatrix} (A + BK\Psi_i)^\top P_i + P_i(A + BK\Psi_i) + \tau P_i & P_i D \\ * & -\chi_i I \end{bmatrix} < 0, \\ P_i > \gamma_i I$$

в вершинах $\Psi_i = \text{diag}\{\{\rho_{i-1}, \rho_i\}, \dots, \{\rho_{i-1}, \rho_i\}\}$, $i = 1, \dots, v$. Тогда область устойчивости $\mathcal{X}$, множество допустимых начальных условий $\mathcal{X}_0$ и верхняя оценка времени T вхождения в инвариантную область $|x(t)| < \varepsilon$ определяются в виде

$$(8) \quad \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \leq |x_i| \leq \bar{x}, i = 1, \dots, n\},$$

$$(9) \quad \mathcal{X}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \bar{x}_0 := \sqrt{\frac{\tau \underline{\gamma} \bar{x}^2 - 2 \bar{\chi} \bar{f}}{n^2 \underline{\tau} \|P\|}} \right\},$$

$$(10) \quad T = \frac{1}{\underline{\tau}} \ln \frac{\tau |x(0)|^2 \|\bar{P}\| + \bar{\chi} \bar{f}}{\tau \underline{\gamma} \varepsilon^2 - \bar{\chi} \bar{f}},$$

$\underline{x} > 0$ и $\bar{x} > 0$ находятся как $s \in [-\bar{x}; -\underline{x}] \cup [\underline{x}; \bar{x}]$ из решения неравенств $\varphi(s) - \underline{\rho}s \geq 0$ и $\varphi(s) - \bar{\rho}s \leq 0$, $\underline{\tau} = \min_{i=1, \dots, v} \{\tau_i\}$,

$$\underline{\gamma} = \min_{i=1, \dots, v} \{\gamma_i\}, \quad \bar{\chi} = \max_{i=1, \dots, v} \{\chi_i\} \text{ и } \|\bar{P}\| = \max_{i=1, \dots, v} \{P_i\}.$$

Доказательство. Для анализа устойчивости замкнутой системы выберем функции Ляпунова

$$(11) \quad V_i = x^\top P_i x, \quad i = 1, \dots, v,$$

и потребуем выполнение условий

$$(12) \quad \dot{V}_i + \tau_i V_i - \chi_i f^\top f < 0, \quad i = 1, \dots, v.$$

Подставляя (6) и (11) в (12), получим

$$(13) \quad x^\top \left[(A + BK\Psi_i(x))^\top P_i + P_i(A + BK\Psi_i(x)) \right] x + 2x^\top P_i D f + \tau_i x^\top P_i x - \chi_i f^\top f < 0, \quad i = 1, \dots, v.$$

Введя новый вектор $z = \text{col}\{x, f\}$, перепишем (13) как

$$(14) \quad z^\top \begin{bmatrix} \Psi_{11,i} & P_i D \\ * & -\chi_i I \end{bmatrix} z < 0, \\ i = 1, \dots, v,$$

где $\Psi(x)_{11,i} = A + BK\Psi_i(x))^\top P_i + P_i(A + BK\Psi_i(x)) + \tau P$

Неравенство (14) будет выполнено, если будет выполнено условие

$$(15) \quad \begin{bmatrix} \Psi(x)_{11,i} & P_i D \\ * & -\chi_i I \end{bmatrix} < 0, \\ i = 1, \dots, v.$$

Элементы диагональной матрицы $\Psi_i(x)$ принадлежат отрезку $[\rho_{i-1}; \rho_i]$. Значит, ЛМН (15) содержит политопную неопределенность. Согласно лемме [8], такое неравенство будет выполнено, если оно будет выполнено в вершинах политопа $[\rho_{i-1}; \rho_i]$. Значит, замкнутая система (6) устойчива.

Пусть для любых $\underline{x} > 0$ и $\bar{x} > 0$ выполнены неравенства $\varphi(s) - \underline{\rho}s \geq 0$ и $\varphi(s) - \bar{\rho}s \leq 0$. Тогда $\underline{x}$ и $\bar{x}$ являются нижней

и верхней оценками множества устойчивости, записанного в виде (8).

Запишем решение неравенства (12) в виде

$$(16) \quad \gamma |x|^2 < x^\top P_i x < \frac{\bar{x}\bar{f}}{\tau} + \left(\|\bar{P}\| \bar{x}_0^2 + \frac{\bar{x}\bar{f}}{\tau} \right) e^{-\tau t}, \quad i = 1, \dots, v.$$

Учитывая (8) и (16) и приняв $\gamma n^2 \bar{x}^2 = \frac{2\bar{x}\bar{f}}{\tau} + \|\bar{P}\| \bar{x}_0^2$, получим результат (9).

Верхняя оценка времени T при котором $|x(t)|$ попадут в заданную область $|x(t)| < \varepsilon$ и больше ее не покинут, определяется в виде (10) из (16).

Замечание 2. В формулировке теоремы разрешимость (7) ищется во внутренних точках $\underline{\rho} = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_v = \bar{\rho}$ интервала, а не сразу на границах $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$ согласно лемме [8]. Это связано с тем, что применив лемму [8] для поиска $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$, при которых ЛМН (7) будет разрешимо, можно получить более грубые решения, чем при использовании следующей многошаговой процедуры. Согласно данной процедуре предлагается сначала определить интервал $(\underline{\rho}, \rho_1)$, в вершинах которого ЛМН (7) имеет решение, воспользовавшись леммой [8]. Затем, ищется следующий интервал (ρ_1, ρ_2) , в вершинах которого ЛМН (7) имеет решение. Данная процедура продлевается до тех пор, пока не находится предельное значение $\rho_k = \bar{\rho}$ такое, что в вершинах (ρ_{k-1}, ρ_k) ЛМН (7) еще сохраняется решение. В результате применения многошаговой процедуры длина интервала $(\underline{\rho}; \bar{\rho})$ может быть больше, чем при использовании только леммы [8].

Замечание 3. Для применения многошаговой процедуры (см. замечание 2) можно воспользоваться следующими рекомендациями для поиска $\bar{\rho}$. Если $\left. \frac{d\varphi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \rho(0) < \infty$, то $\bar{\rho} \leq \rho(0)$ (см. рис. 3 слева). Если $\left. \frac{d\varphi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \infty$, то $\bar{\rho}$ увеличивается до тех пор, пока ЛМН (7) еще будет иметь решение на интервале $(\rho_{v-1}; \rho_v)$ (см. рис. 3 справа). В некоторых случаях возможно $\bar{\rho} = \infty$, что соответствует обратной связи с большим коэффициентом усиления.

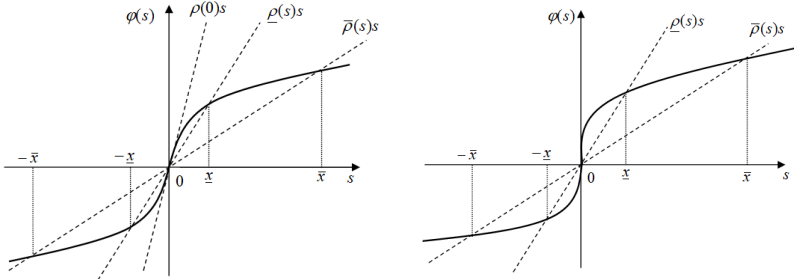


Рис. 3. Поиск $\bar{\rho}$ при $\rho(0) < \infty$ (слева) и при $\rho(0) = \infty$ (справа)

Замечание 4. Результаты секции 2 можно обобщить на закон управления вида $u = k_1\varphi_1(x_1) + \dots + k_n\varphi_n(x_n)$.

3.2. Анализ устойчивости замкнутой системы с законом управления (5)

Переписав $\varphi(KX)$ в виде $\varphi(Kx) = \rho(Kx)Kx$ и подставив (5) в (1), получим

$$(17) \quad \dot{x} = (A + BK\rho(Kx))x + Df.$$

Теорема 2. Пусть для заданных K и $\tau_i > 0$ существуют $0 \leq \underline{\rho} = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_v = \bar{\rho}$, $\chi_i > 0$, $\gamma_i > 0$ и $P_i = P_i^\top > 0$ такие, что выполнены матричные неравенства (7) в вершинах $\Psi_i = \{\rho_{i-1}, \rho_i\}$, $i = 1, \dots, v$. Тогда область устойчивости $\mathcal{X}$, множество допустимых начальных условий $\mathcal{X}_0$ и верхняя оценка времени переходного процесса T в область $|x(t)| < \varepsilon$ определяются в виде (8), (9), (10), где $\underline{x}$ и $\bar{x}$ находятся как $s \in [\underline{x}; \bar{x}]$: $\varphi(s \sum_{i=1}^n k_i) - \underline{\rho}s \sum_{i=1}^n k_i \geq 0$ и $\varphi(s \sum_{i=1}^n k_i) - \bar{\rho}s \sum_{i=1}^n k_i \leq 0$.

Доказательство. Ради простоты положим $x_1 = \dots = x_n = s$. Пусть для любого $s \in [\underline{x}; \bar{x}]$ выполнены неравенства $\varphi(s \sum_{i=1}^n k_i) - \underline{\rho}s \sum_{i=1}^n k_i \geq 0$ и $\varphi(s \sum_{i=1}^n k_i) - \bar{\rho}s \sum_{i=1}^n k_i \leq 0$. Тогда $\underline{x}$ и $\bar{x}$ являются нижней и верхней оценками множества устойчивости, записанного в виде (8).

Поскольку структура (17) подобна структуре (6), то дальнейшее доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

4. Анализ значения δ в (3) для линейного и нелинейных регуляторов и примеры функций $\varphi(s)$

Покажем, что алгоритмы (4) и (5) обеспечивают лучшую предельную ошибку, по сравнению с алгоритмом (2). Для этого необходимо рассмотреть решение любой оптимизационной задачи. Например, рассмотрим оптимизационную задачу из [7], которая в нашем случае будет сформулирована в следующем виде. Для заданных K и τ требуется найти P и γ , удовлетворяющие следующей оптимизационной задаче:

$$(18) \quad \begin{aligned} & \text{maximize } \gamma \\ & \text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} (A + BK\Theta)^T P + P(A + BK\Theta) + \tau P & PD \\ * & -\tau I \end{bmatrix} < 0 \\ & \text{and } P - \gamma I > 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$(19) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \delta := \sqrt{\frac{\bar{f}}{\gamma}}.$$

Для нелинейного регулятора (2) оптимизационная задача решается при $\Theta = I$, для нелинейного – при $\Theta = \bar{\rho}I$ в установившемся режиме. Поскольку для нелинейного регулятора $\|\Theta\| > 1$ (см. рис. 4, где для каждого фиксированного значения $\hat{x}_i$: $|\hat{x}_i| < |\varphi(\hat{x}_i)|$), значит, γ для (2) будет меньше, чем для (4) и (5). Другими словами, при $\|\Theta\| > 1$ происходит увеличение коэффициента в обратной связи, что делает матрицу $A + BK\Theta$ «более» устойчивой. Для «более» устойчивой матрицы требуется «больше» матрица P (а значит, и больше γ), что соответствует «меньшему» притягивающему эллипсоиду в установившемся режиме.

Приведем некоторые примеры функций, для которых справедливы полученные результаты:

1. $\varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s)$, $\varphi(s) = \mu \arctg(\sigma s)$, $\varphi(s) = \mu \frac{1 - e^{-0.5\sigma s}}{1 + e^{-0.5\sigma s}}$ и т.п. Достоинство таких функций состоит в том, что они гарантируют ограниченность закона управления. Однако для них всегда существует $\bar{x} < \infty$.

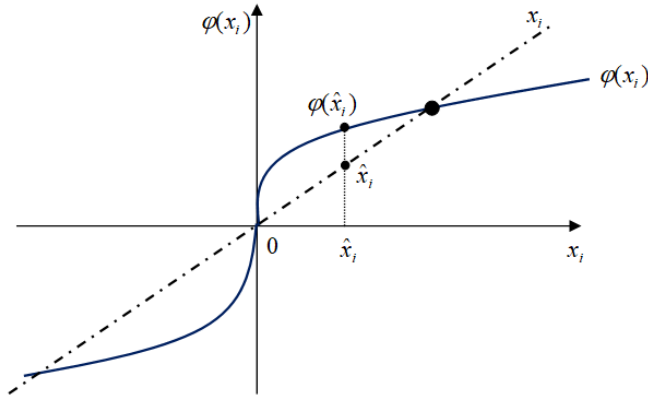


Рис. 4. Сравнение линейного и нелинейного регуляторов

2. $\varphi(s) = s^\lambda$, $0 < \lambda < 1$, $\varphi(s) = s^{\psi(s)}$ с четной, ограниченной, положительной функцией $\psi(s)$ такой, что $\psi(0) < 1$ и $\psi(\pm\infty) < \infty$ (например, $\psi(s) = \mu \frac{s^2 + \mu - 2}{s^2 + 1}$, $\mu > 0$), $\varphi(s) = s^\lambda + s^{1/\lambda}$ и т.п. Достоинство таких функций состоит в том, что они гарантируют ускоренную сходимость. Однако для них может существовать $\underline{x} < \infty$ и всегда существует $\bar{x} < \infty$.

3. $\varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s) + \vartheta s$, $\varphi(s) = \mu \arctg(\sigma s) + \vartheta s$, $\varphi(s) = \mu \frac{1 - e^{-0.5\sigma s}}{1 + e^{-0.5\sigma s}} + \vartheta s$ и т.п. По сравнению с (1) данные функции неограниченные. Однако за счет соответствующего выбора μ , σ и ϑ можно обеспечить $\underline{x} = 0$ и $\bar{x} = \infty$.

5. Примеры моделирования

Рассмотрим систему (1) со следующими параметрами:

$$(20) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$f(t) = 0,15[1 + \sin(t) + \text{sat}\{d(t)\}].$$

Здесь $\text{sat}\{\cdot\}$ – функция насыщения, $d(t)$ – белый шум, моделируемый в Матлаб со следующими параметрами: мощность шума 0,1 и время выборки 0,1.

Выберем матрицу $K = [k_1 \ k_2] = [-2 \ -4]$ в линейном законе управления (2), стабилизирующую объект (1). Рассмотрим

следующие нелинейные функции:

$$(21) \quad \varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s), \varphi(s) = \mu \arctg(\sigma s), \varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0,5\sigma s}}{1+e^{-0,5\sigma s}};$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \varphi(s) &= s^\lambda, \quad \varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s^\lambda), \\ \varphi(s) &= \mu \arctg(\sigma s^\lambda), \quad \varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0,5\sigma s^\lambda}}{1+e^{-0,5\sigma s^\lambda}}, 0 < \lambda < 1; \end{aligned}$$

$$(23) \quad \varphi(s) = s^\lambda + s^{1/\lambda}, 0 < \lambda < 1, \quad \varphi(s) = s^{\vartheta \frac{s^2 + \vartheta - 2}{s^2 + 1}}, \vartheta > 1.$$

Для функций (21) существует $\rho(0)$, для функций (22) и (23) $\rho(0)$ не существует.

5.1. Использование закона управления (4)

Для заданных (20), $\tau = 0,01$ и $K = [-2 \quad -4]$ ЛМН (7) разрешимо при $\rho = \rho_0 = 0,6$, $\rho_1 = 0,8$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 13$, $\rho_4 = 110$, $\rho_5 = 967$, $\rho_6 = 967$, $\rho_7 = 8542$, $\rho_8 = 37362$. Решения существуют и при итерациях больше 8. Однако примем $\bar{\rho} = \rho_8 = 37362$. Функции (21). Положим $\mu = 1$ и $\sigma = 30$.

В таблице 1 приведены результаты расчетов и моделирования, а на рис. 5 приведены результаты переходных процессов по $|x(t)|$ при $x(0) = [0,2 \ 0,2]^\top$.

Таблица 1. Результаты расчетов и моделирования для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с $\varphi(s)$ из (21) при $\mu = 1$ и $\sigma = 30$

Закон упр.: $\varphi(s)$	$\rho(0)$	$[\underline{x}; \bar{x}]$	$\bar{x}_0$	δ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$	δ из рис. 5 при $f(t)$ из (20)
(2): $\varphi(s) = s$	1	$[0; \infty)$	∞	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$
(4): $\varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s)$	$\mu\sigma$	$[0; 1,25]$	0,38	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$
(4): $\varphi(s) = \mu \arctg(\sigma s)$	$\mu\sigma$	$[0; 1,9]$	0,65	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$
(4): $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0,5\sigma s}}{1+e^{-0,5\sigma s}}$	$\mu\sigma$	$[0; 1,25]$	0,38	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$

В таблице 1 при расчете δ из (19) бралось малое значение $\bar{f} = 10^{-8}$ из-за грубости оценок. Результаты моделирования приведены для $f(t)$ из (20).

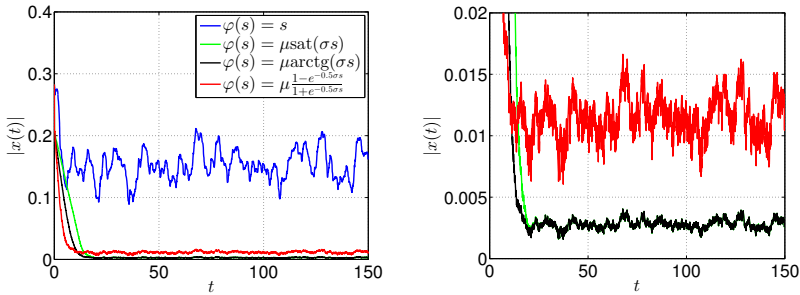


Рис. 5. Переходные процесс по $|x(t)|$ для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с $\varphi(s)$ из (21) при $\mu = 1$ и $\sigma = 30$ (справа рисунок в увеличенном масштабе)

Функции (22). Примем $\mu = 1$, $\sigma = 30$ и $\lambda = 5/7$. В таблице 2 приведены результаты расчетов при $\bar{f} = 10^{-8}$ и моделирования для $f(t)$ из (20). На рис. 6 приведены результаты переходных процессов по $|x(t)|$ при $f(t)$ из (20) и $x(0) = [0,1 \ 0,1]^\top$.

Таблица 2. Результаты расчетов для нелинейностей $\varphi(s)$ из (22) при $\mu = 1$, $\sigma = 30$ и $\lambda = 5/7$

Закон упр.: $\varphi(s)$	$[\underline{x}; \bar{x}]$	$\bar{x}_0$	δ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$	δ из рис. 6 при $f(t)$ из (20)
(4): $\varphi(s) = s^\lambda$	$[0; 1,4]$	0,45	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$
(4): $\varphi(s) = \mu \text{ sat}(\sigma s^\lambda)$	$[0; 1,25]$	0,38	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$
(4): $\varphi(s) = \mu \text{ arctg}(\sigma s^\lambda)$	$[0; 1,86]$	0,64	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$
(4): $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0,5\sigma s^\lambda}}{1+e^{-0,5\sigma s^\lambda}}$	$[0; 1,25]$	0,38	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$

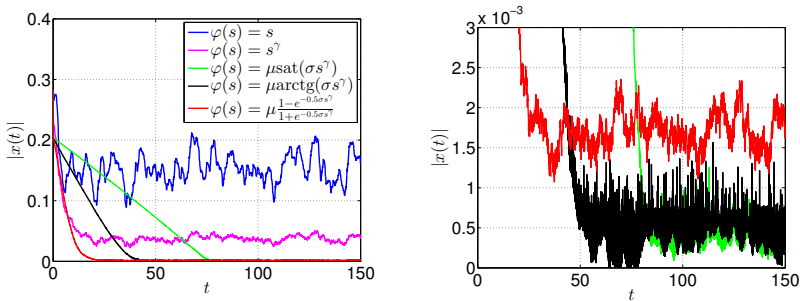


Рис. 6. Переходные процесс по $|x(t)|$ для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с $\varphi(s)$ из (22) при $\mu = 1$, $\sigma = 30$ и $\gamma = 5/7$ (справа рисунок в увеличенном масштабе)

Функции (23). Примем $\lambda = 5/7$ и $\vartheta = 3$. В таблице 3 приведены результаты расчетов при $\bar{f} = 10^{-8}$ и моделирования для $f(t)$ из (20). На рис. 7 приведены результаты переходных процессов при $f(t)$ из (20) и $x(0) = [0,1 \ 0,1]^T$.

Таблица 3. Результаты расчетов для нелинейностей $\varphi(s)$ из (23) при $\lambda = 5/7$ и $\vartheta = 3$

Закон упр.: $\varphi(s)$	$[x; \bar{x}]$	$\bar{x}_0$	δ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$	δ из рис. 7 при $f(t)$ из (20)
(4): $\varphi(s) = s^\lambda + s^{1/\lambda}$	$[0; 1,4]$	0,45	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$
(4): $\varphi(s) = s^{\vartheta \frac{s^2 + \vartheta - 2}{s^2 + 1}}$	$[0; 1,25]$	0,38	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$

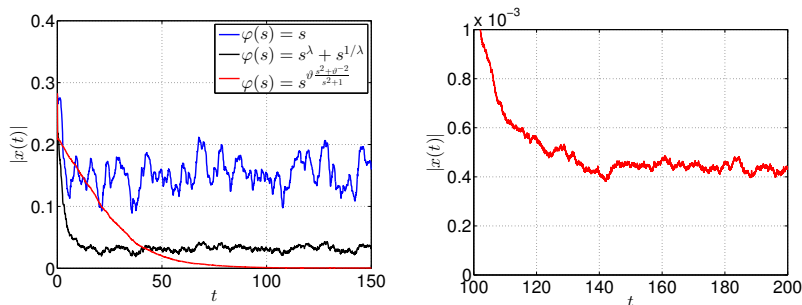


Рис. 7. Переходные процесс по $|x(t)|$ для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с $\varphi(s)$ из (23) при $\lambda = 5/7$ и $\vartheta = 3$ (справа рисунок в увеличенном масштабе)

5.2. Использование закона управления (5)

Для заданных (20), $\tau = 0,01$ и $K = [-2 \ -4]$ ЛМН (7) разрешимо при $\underline{\rho} = \rho_0 = 0,53$, $\rho_1 = 0,6$, $\rho_2 = 8$, $\rho_3 = 105526$. Решения существуют и при итерациях больше 3. Однако пусть $\bar{\rho} = \rho_3 = 105526$.

Ниже в таблицах 4–6 и на рис. 8–10 используются те же функции $\varphi(s)$ с теми же параметрами, что и в предыдущей подсекции.

Таблица 4. Результаты расчетов и моделирования для линейного закона управления (2) и нелинейного (4) с $\varphi(s)$ из (21) при $\mu = 1$ и $\sigma = 100$

Закон упр.: $\varphi(s)$	$\rho(0)$	$[\underline{x}; \bar{x}]$	$\bar{x}_0$	δ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$	δ из рис. 8 при $f(t)$ из (20)
(2): $\varphi(s) = s$	1	$[0; \infty)$	∞	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$
(4): $\varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s)$	$\mu\sigma$	$[0; 1,25]$	0,38	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$
(4): $\varphi(s) = \mu \text{arctg}(\sigma s)$	$\mu\sigma$	$[0; 1,9]$	0,65	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$
(4): $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0,5\sigma s}}{1+e^{-0,5\sigma s}}$	$\mu\sigma$	$[0; 1,25]$	0,38	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$

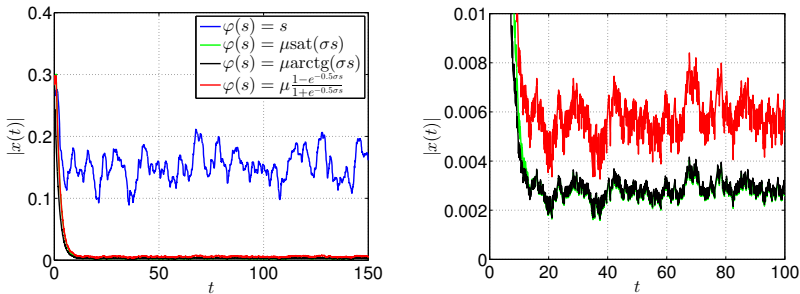


Рис. 8. Переходные процесс по $|x(t)|$ для линейного закона управления (2) и нелинейного (5) с $\varphi(s)$ из (21) при $\mu = 1$ и $\sigma = 100$ (справа рисунок в увеличенном масштабе)

Таблица 5. Результаты расчетов для нелинейностей $\varphi(s)$ из (22) при $\mu = 1$, $\sigma = 100$ и $\lambda = 5/7$

Закон упр.: $\varphi(s)$	$[\underline{x}; \bar{x}]$	$\bar{x}_0$	δ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$	δ из рис. 9 при $f(t)$ из (20)
(4): $\varphi(s) = s^\lambda$	$[0; 1,4]$	0,45	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$
(4): $\varphi(s) = \mu \text{sat}(\sigma s^\lambda)$	$[0; 1,25]$	0,38	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$
(4): $\varphi(s) = \mu \text{arctg}(\sigma s^\lambda)$	$[0; 1,86]$	0,64	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$
(4): $\varphi(s) = \mu \frac{1-e^{-0,5\sigma s^\lambda}}{1+e^{-0,5\sigma s^\lambda}}$	$[0; 1,25]$	0,38	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$

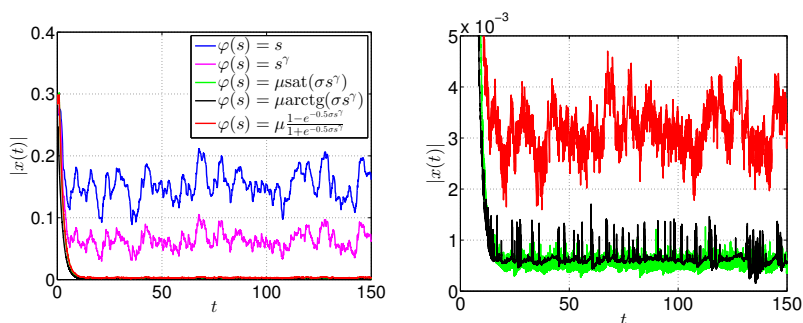


Рис. 9. Переходные процесс по $|x(t)|$ для линейного закона управления (2) и нелинейного (5) с $\varphi(s)$ из (22) при $\mu = 1$, $\sigma = 100$ и $\lambda = 5/7$ (справа рисунок в увеличенном масштабе)

Таблица 6. Результаты расчетов для нелинейностей $\varphi(s)$ из (23) при $\lambda = 5/7$ и $\vartheta = 3$

Закон упр.: $\varphi(s)$	$[x; \bar{x}]$	$\bar{x}_0$	δ из (19) при $\bar{f} = 10^{-8}$	δ из рис. 10 при $f(t)$ из (20)
(4): $\varphi(s) = s^\lambda + s^{1/\lambda}$	$[0; 1,4]$	0,45	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$
(4): $\varphi(s) = s^\vartheta \frac{s^2 + \vartheta - 2}{s^2 + 1}$	$[0; 1,25]$	0,38	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$

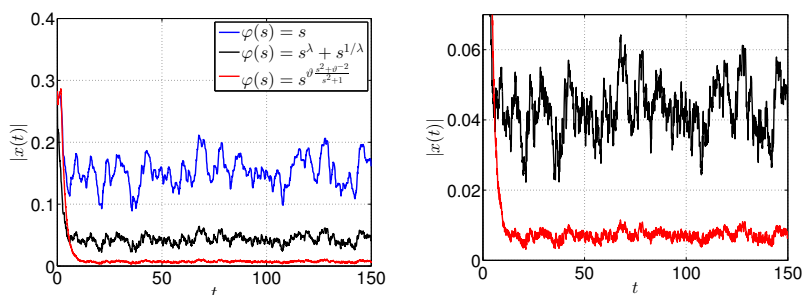


Рис. 10. Переходные процесс по $|x(t)|$ для линейного закона управления (2) и нелинейного (5) с $\varphi(s)$ из (23) при $\lambda = 5/7$ и $\vartheta = 3$ (справа рисунок в увеличенном масштабе)

6. Заключение

В работе разработаны нелинейные законы управления, полученные из линейного путем двух типов замен с использованием нечетных функций. Первая замена состоит в пропуске каждой компоненты вектора состояния через нелинейную функцию, вторая замена – в пропуске всего линейного закона управления через нелинейную функцию. Предложено нелинейные функции представить в виде линейных с нелинейным угловым коэффициентом для анализа устойчивости замкнутой системы. Такое представление позволяет использовать аппарат ЛМН для исследования устойчивости замкнутых систем. Найдены области устойчивости и области для начальных условий, полученные в результате многошаговой процедуры поиска решений с использованием ЛМН. Показано, что использование предложенных нелинейных законов управления позволяет уменьшить установившуюся ошибку по сравнению с линейным.

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB*. – СПб.: Наука, 2000.
2. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях* // Автоматика и телемеханика.
3. КРАСНОВА С.А., АНТИПОВ А.С. *Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности* // Проблемы управления. – 2016. – № 4. – С. 10–21.
4. КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем*. – М.: Наука, 2006.

5. КРАСНОВА С.А., УТКИН А.В. *Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений* // Проблемы управления. – 2015. – № 5. – С. 27–36.
6. ХАЛИЛ Х.К. *Нелинейные системы*. – М-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
7. BOYD S., GHAOUI L.E., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. – Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
8. FRIDMAN E. *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. – Springer, International Publishing, 2014.
9. NEKHOROSHIKH A.N., EFIMOV D., POLYAKOV A., PERRUQUETTI W., FURTAT I.B., FRIDMAN E. *On output-based accelerated stabilization of a chain of integrators: Implicit Lyapunov-Krasovskii functional approach* // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, no. 2. – P. 5982–5987.
10. NEKHOROSHIKH A.N., EFIMOV D., POLYAKOV A., PERRUQUETTI W., FURTAT I.B. *On finite-time stabilization of a class of nonlinear time-delay systems: Implicit Lyapunov-Razumikhin approach* // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, 2020. – P. 1975–1980.

NONLINEAR CONTROL LAWS BASED ON LINEAR ONES USING ODD FUNCTIONS

Igor Furtat, Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Doctor of Sc., professor (cainenash@mail.ru).

Pavel Gushchin, Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Candidate of Science (gushchin.p@mail.ru).

Esenia Kopisova, Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Candidate of Science (esyako@ya.ru).

Abstract: The paper investigates nonlinear control laws obtained from linear one by two types of coordinate change by using odd functions. The first coordinate change consists in passing each component of the state vector through a nonlinear function, the second coordinate change is in passing the entire linear control law through a nonlinear function. To study such systems, it is proposed to represent nonlinear functions as linear ones with a nonlinear slope. Such a representation will allow using the methods of linear matrix inequalities (LMI) to study the stability of the closed-loop systems. The stability domains and the domains for the initial conditions are found, obtained as a result of a multi-step solution search procedure using LMI. It is shown that the use of the proposed nonlinear control laws makes it possible to reduce the steady-state error compared to the linear one. The simulations illustrate the theoretical conclusions.

Keywords: dynamical system, nonlinear control law, linear matrix inequalities.

УДК 519.7

ББК Ж 50

DOI: 10.25728/ubs.2023.102.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 06.12.2022.

Дата опубликования 31.03.2023.

ИНДИКАТОРЫ РИСКА КАСКАДНЫХ СБОЕВ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР

Тырсин А. Н.¹

(ФГБУН Научно-инженерный центр «Надежность и ресурс
больших систем и машин» УрО РАН, Екатеринбург;
ФГБУН Институт экономики УрО РАН, Екатеринбург)

Кащеев С. Е.²

(Южно-Уральский государственный университет,
Челябинск)

Поведение реальных систем часто обладает стохастичностью, а связи между их элементами можно адекватно описывать как корреляционные. В последние годы наблюдаются тенденции увеличения и усложнения современных сетей при росте их зависимости друг от друга. Мы наблюдаем, как несколько сетей объединяются в одну взаимозависимую сетевую структуру. Это приводит к возрастанию рисков того, что отказ узлов в одной сети может привести к отказу зависимых узлов в других сетях. В результате таких отказов могут возникать катастрофические каскадные сбои в таких взаимосвязанных сетевых структурах. С учетом масштабности таких структур, часто являющихся критическими инфраструктурами, данная проблема становится весьма актуальной. В статье введена скалярная мера взаимосвязи между несколькими произвольно распределенными непрерывными случайными векторами. Она позволяет оценить тесноту взаимосвязи между различными подсистемами (сетями) в сетевых структурах. Применительно к гауссовым модельным сетевым структурам проведено исследование влияния тесноты взаимосвязи между подсистемами на риск возникновения каскадных сбоев. В качестве величины риска использовалась вероятность таких сбоев. В качестве индикатора риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре предложено использовать коэффициент корреляционной взаимосвязи между ее подсистемами. А для снижения риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре следует уменьшать тесноту корреляции между наиболее взаимосвязанными элементами подсистем.

Ключевые слова: сетевая структура, модель, риск, взаимосвязь, каскадный сбой, система.

¹ Александр Николаевич Тырсин, д.т.н., профессор (at2001@yandex.ru).

² Станислав Евгеньевич Кащеев, аспирант (kashcheevs@susu.ru).

1. Введение

Структура – это совокупность устойчивых связей между элементами системы, обеспечивающих воспроизводимость при изменяющихся условиях [6]. Структура и элементы образуют систему. В сетевой структуре могут существовать связи между всеми элементами, причем возможно также двойное подчинение и межуровневое взаимодействие [5]. Также в ней могут быть подсистемы (подсети), что тоже должно отражаться как взаимосвязи на уровне подсистем.

Можно утверждать о наличии следующих тенденций, характеризующих развитие современных сетей.

Во-первых, наблюдается тенденция увеличения как числа элементов, так и подсетей в современных сетях.

Во-вторых, они становятся все более зависимыми друг от друга. Мы наблюдаем, как несколько сетей объединяются в одну взаимозависимую сетевую структуру. Например, современные инфраструктуры, такие как электростанции, водоснабжение, транспорт, связь, топливо и др. тесно взаимодействуют между собой [2, 18, 21].

В-третьих, отказ узлов в одной сети может привести к отказу зависимых узлов в других сетях и катастрофическим каскадным сбоям в таких взаимосвязанных сетевых структурах [12].

Это делает актуальной проблему безопасного функционирования связанных сетевых структур. Для решения данной проблемы нужен математический инструментарий, позволяющий формировать эффективные управленческие решения с целью обеспечения приемлемого уровня риска таких систем.

Поведение реальных систем часто обладает стохастичностью, а связи между их элементами можно адекватно описывать как корреляционные. Модели таких систем обычно акцентируют внимание на явном количественном описании вероятностных характеристик тех или иных ситуаций в жизненном цикле системы [3]. Однако такие модели не позволяют учесть системные характеристики сетевых структур, что ограничивает возможности их эффективного использования в задачах риск-анализа.

Известен подход к оценке риска на основе логико-вероятностных моделей [1]. Для относительно простых сетей, когда можно априори указать все опасные исходы, при наличии статистической информации или экспертных оценок о шансах их появления этот подход дает приемлемые результаты. Обычно здесь удается накопить достаточную статистику для оценивания вероятностей наступления опасных исходов, а форма взаимосвязи между элементами системы является достаточно простой и может быть описана с помощью логико-вероятностных моделей риска. Однако у сложных динамических сетей структуру взаимодействия между элементами обычно не удается описать с помощью логико-вероятностных моделей – стохастические связи между элементами не позволяют их адекватно моделировать с помощью алгебры логики (AND, OR, NOT), а изменения состояния элементов и самой системы носят непрерывный характер.

В ситуациях, когда нет возможности явно связать разные факторы риска в виде логико-вероятностной модели, можно использовать метод корреляционной адаптометрии. Он основан на использовании корреляционных матриц, состоящих из коэффициентов парной линейной корреляции между элементами системы [16]. Отметим, что в [14] также рассматривается аналогичная идея влияния корреляций на риск. Однако следует отметить недостатки этого подхода, существенно ограничивающие возможности его использования для риск-анализа взаимосвязанных сетей:

- парные корреляции не всегда корректно отражают зависимости, так как могут быть многомерные корреляционные связи;
- возможны не только линейные корреляционные зависимости, но и нелинейные;
- выбор общей характеристики степени коррелированности параметров в виде веса корреляционного графа недостаточно формально обоснован, так как эта величина является эмпирической;
- корреляционная матрица недостаточно полно описывает случайные векторы: отсутствует информация о важных число-

вых характеристиках компонент случайного вектора – их средних величинах и дисперсиях.

В последние годы стали успешно применяться копулы для моделирования зависимости в управлении рисками предприятий, в финансах, страховании и экологических исследованиях [13, 15]. Моделирование зависимостей с копулами особенно эффективно, поскольку многомерные копулы позволяют отделить моделирование маргинальных распределений от моделирования структуры зависимостей [17]. Появились публикации, в которых копулы используются для инженерных приложений [20]. В работе [11] рассмотрены вопросы использования многомерных копул для моделирования сложных зависимостей во взаимозависимых сетях. Однако, как отмечено авторами, поиск подходящей структуры копулы не является тривиальной задачей и сильно страдает от проклятия размерности.

Целью статьи является исследование на модельных данных влияния многомерных корреляционных связей на риск каскадных сбоев во взаимосвязанных сетевых структурах и поиск возможных индикаторов критического уровня риска.

2. Корреляционные связи в сетевых структурах

Для задач анализа риска восстановление многомерных распределений с зависимыми компонентами не является необходимым условием. Поэтому вместо этого попробуем ограничиться использованием корреляционных взаимосвязей между элементами сетевой структуры.

Сеть с корреляционными связями между ее элементами можно представить как один или несколько (при наличии подсетей) случайных векторов с коррелированными компонентами. Рассмотрим известные показатели тесноты корреляционной связи, которые можно использовать для такой системы.

Для гауссовых случайных векторов $\mathbf{X}^\circ$ в [19] предложена скалярная мера – коэффициент тесноты совместной линейной корреляционной связи, равный

$$(1) \quad d_m^\circ(\mathbf{X}^\circ) = 1 - |\mathbf{R}_{\mathbf{X}^\circ}|^{1/m},$$

где $\mathbf{X}^\circ = (X_1^\circ, \dots, X_m^\circ)$ – многомерная случайная величина, имеющая совместное нормальное распределение и корреляционную матрицу $\mathbf{R}_{\mathbf{X}^\circ}$.

Для оценки тесноты любой корреляционной связи непрерывных случайных величин в [7] предложен коэффициент

$$(2) \quad d_m(\mathbf{X}) = 1 - \left[\prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2) \right]^{\frac{1}{m}},$$

где $R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2 = \frac{\sigma_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2}{\sigma_{X_k}^2}$ – индекс детерминации в общем слу-

чае нелинейной регрессионной зависимости случайной величины X_k от случайных величин $X_1, \dots, X_{k-1}$. При неизвестном виде зависимости для определения $R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2$ можно воспользоваться методами непараметрического регрессионного анализа [10].

В [7] показано, что формула (1) является частным случаем (2) для гауссового случайного вектора $\mathbf{X}^\circ$.

Зададим n непрерывных случайных векторов произвольных размерностей, у которых нет совпадающих компонент. Обозначим их как

$$\mathbf{Y}^{(1)} = (Y_1^{(1)}, \dots, Y_{m_1}^{(1)}), \dots, \mathbf{Y}^{(n)} = (Y_1^{(n)}, \dots, Y_{m_n}^{(n)}).$$

Считаем, что компоненты этих случайных векторов имеют дисперсии и могут быть корреляционно взаимно зависимыми. Для этого множества случайных векторов введем их объединение

$$(3) \quad \mathbf{Y} = \bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)} = (\underbrace{Y_1, \dots, Y_{m_1}}_{\mathbf{Y}^{(1)}}, \underbrace{Y_{m_1+1}, \dots, Y_{m_1+m_2}}_{\mathbf{Y}^{(2)}}, \dots, \underbrace{Y_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, Y_{m_1+\dots+m_n}}_{\mathbf{Y}^{(n)}}).$$

В [8] введена скалярная мера тесноты взаимосвязи между случайными векторами $\mathbf{Y}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}^{(n)}$:

$$(4) \quad D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 1 - \frac{1 - d(\bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)})}{\prod_{j=1}^n (1 - d(\mathbf{Y}^{(j)}))},$$

где $d(\mathbf{X}) = 1 - \left[\prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2) \right]$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$.

Коэффициент $D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)})$ принимает значения от 0 до 1. Если каждый из элементов любой подсистемы функционирует независимо от всех элементов остальных подсистем, то $D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 0$. Если хотя бы один из элементов хотя бы одной подсистемы линейно зависит от хотя бы одного из элементов хотя бы одной другой подсистемы, то $D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 1$. При наличии корреляционных зависимостей между функционированием элементов разных подсистем $0 < D(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) < 1$.

Аналогично коэффициентам (1) и (2) введем масштабирование, учитывающее число случайных векторов:

$$(5) \quad D_n(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 1 - \left[\frac{1 - d(\bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)})}{\prod_{j=1}^n (1 - d(\mathbf{Y}^{(j)}))} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Формула (5) позволяет унифицировать количественную меру тесноты корреляционной взаимосвязи. Рассмотрим ее частные случаи.

1. Пусть $n = 2$. Тогда теснота корреляционной связи между случайными векторами $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_l)$ равна

$$D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = 1 - \left(\frac{(1 - d_e(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}))}{(1 - d_e(\mathbf{X}))(1 - d_e(\mathbf{Y}))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Если все $m_j = 1$, т.е. $\mathbf{Y}^{(j)} = Y_j$, $j = 1, \dots, N$, то формула (5) примет вид

$$(6) \quad D_N(\bigcap_{j=1}^N Y_j) = 1 - \left[\prod_{l=2}^N (1 - R_{Y_l|Y_1 \dots Y_{l-1}}^2) \right]^{\frac{1}{N}} = d_N(\mathbf{Y}),$$

т.е. (6) описывает тесноту корреляционной связи между компонентами случайного вектора.

3. Теснота корреляционной связи между непрерывным случайным вектором $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ и непрерывной случайной величиной Z согласно (6) равна

$$(7) \quad D_2(\mathbf{X} \cap Z) = 1 - \left[\frac{(1 - R_{Z|X_1 \dots X_m}^2) \cdot \prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2)}{\prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2)} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - (1 - R_{Z|X_1 \dots X_m}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Если все случайные векторы $\mathbf{Y}^{(j)}$ являются гауссовыми, то формула (5) примет вид

$$(8) \quad D_n(\bigcap_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}) = 1 - \left(\frac{|\mathbf{R}_{\bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}}|}{\prod_{j=1}^n |\mathbf{R}_{\mathbf{Y}^{(j)}}|} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

5. Если все $m_j = 1$, т.е. $\mathbf{Y}^{(j)} = Y_j$, $j = 1, \dots, N$, то формула (8) примет вид

$$(9) \quad D_N(\bigcap_{j=1}^N Y_j) = 1 - \left| \mathbf{R}_{\bigcup_{j=1}^N Y_j} \right|^{\frac{1}{N}} = 1 - |\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}|^{\frac{1}{N}} = d_N(\mathbf{Y}),$$

т.е. (9) описывает тесноту корреляционной связи между компонентами гауссова случайного вектора.

6. Теснота корреляционной связи между гауссовым случайным вектором $\mathbf{X}$ и гауссовой случайной величиной Z с учетом

(7) и того, что $|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}| = \prod_{k=2}^m (1 - R_{X_k|X_1 \dots X_{k-1}}^2)$, равна

$$(10) \quad D_2^\circ(\mathbf{X} \cap Z) = 1 - \left(\frac{|\mathbf{R}_{\mathbf{X} \cup Z}|}{|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}|} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Оценка риска каскадных сбоев в сетевых структурах

Исследуем на модельных данных влияние коррелированности между элементами взаимосвязанных сетей на риск каскадных сбоев и определим возможные индикаторы критического уровня риска. В качестве структуры будем рассматривать две взаимосвязанных сети.

Ранее была предложена количественная мера корреляционной взаимосвязи между несколькими подсистемами. Рассмотрим на нескольких усложняющихся примерах особенности риск-анализа таких систем. На первом этапе исследований для снижения трудоемкости в качестве сетевой структуры будем рассматривать систему, состоящую из двух взаимосвязанных гауссовых подсистем. В этом случае отказ можно интерпретировать как выход за некоторый диапазон допустимых значений. Будем считать, что все элементы сетей функционируют в одинаковых условиях риска. Это можно трактовать как постоянство дисперсий у всех элементов. Для удобства без потери общности будем считать, что математические ожидания всех элементов равны нулю. Тогда функция плотности вероятности для сетевой структуры с непрерывным гауссовым случайным вектором $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ будет равна

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \right\},$$

где $\Sigma_{\mathbf{X}} = \{\sigma_{X_i X_j}\}_{m \times m}$ – ковариационная матрица, $\sigma_{X_i X_i} = \sigma^2$.

Считаем отказом каждого элемента X_i событие B_i – попадание значения вне области допустимых значений $(-A, A)$, $A > 0$. Если элемент $X_i \in \mathbf{X}$ не зависит от остальных элементов вектора $\mathbf{X}$, то вероятность его стабильной работы и отказа равны соответственно

$$P(\overline{B_i}) = P(-A \leq X_i \leq A) = \int_{-A}^A p_{X_i}(t) dt,$$

$$P(B_i) = P(X_i \notin [-A, A]) = \int_{-\infty}^{-A} p_{X_i}(t) dt + \int_A^{+\infty} p_{X_i}(t) dt,$$

$$p_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}.$$

В свою очередь для $\mathbf{X}$ с коррелированными элементами вероятность отказа любого элемента, например X_1 , вычисляется по формуле

$$P(B_1) = \int_{-\infty}^{-A} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_A^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Вероятность одновременного отказа нескольких элементов $X_k : k \in T \subseteq \{1, \dots, m\}$:

$$P(\bigcup B_k : k \in T \subseteq \{1, \dots, m\}) = \prod_{k \in T} P(B_k).$$

Вычисление определенных интегралов будем выполнять с помощью разложения подынтегральных функций в ряды [9] для $m \leq 4$ или с помощью метода Монте-Карло [4].

3.1. ПРИМЕР 1

Рассмотрим сетевую структуру в виде двух взаимосвязанных элементов X и Y . Пусть они могут быть представлены стандартными гауссовыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Введем между ними коэффициент корреляции ρ . Схематично покажем такую структуру (систему) на рис. 1.

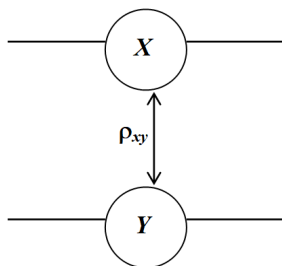


Рис. 1. Сетевая структура, состоящая из двух взаимосвязанных элементов X и Y

Зададим условия для отказа каждого элемента: $B = \{x : x \notin (-A; A)\}$ – отказ элемента X , $C = \{y : y \notin (-A; A)\}$ – отказ элемента Y .

На рис. 2 приведены зависимости $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента корреляции для разных значений порогового уровня A , найденные с помощью численного интегрирования. Из графиков на рис. 2 видим, что с ростом коэффициента корреляции наблюдается тенденция увеличения условной вероятности отказа $P(B/C)$ относительно вероятности отказа $P(B)$, причем она более выражена для больших значений порогового уровня A . Это означает, что вероятность $P(BC)$ быстро увеличивается при росте тесноты корреляции между элементами X и Y .

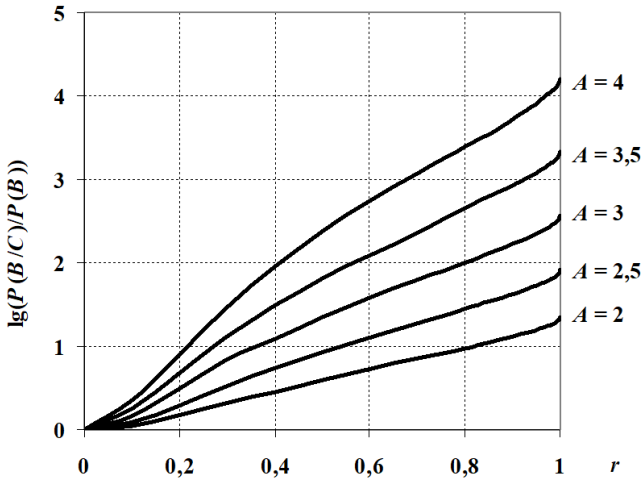


Рис. 2. Зависимости $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента корреляции для разных значений A

Рассмотренный пример 1 показал, что рост взаимосвязи между подсистемами приводит к значительному росту риска каскадного сбоя (в данном случае одновременный отказ X и Y) при функционировании сетевых структур. Причем чем выше

опасность ситуации (в данном случае величина A), тем больше растет риск. Это свидетельствует об актуальности задачи оценивания риска сетевой структуры в условиях наличия корреляционной связи между ее подсистемами. Поэтому рассмотрим далее примеры более сложного вида подсистем и наличия корреляционной связи между элементами этих подсистем.

3.2. ПРИМЕР 2

Рассмотрим сетевую структуру S в виде двух взаимосвязанных подсистем X и Y . Каждая из этих подсистем представляет собой последовательное или параллельное соединение двух элементов (X_1, X_2 для подсистемы X и Y_1, Y_2 для подсистемы Y). Таким образом, отказ каждой из подсистем происходит при отказе хотя бы одного из двух ее последовательно соединенных элементов. Под взаимосвязью между подсистемами X и Y понимаем корреляционные связи между элементами этих подсистем. Пусть элементы X_1, X_2, Y_1, Y_2 этих подсистем могут быть представлены стандартными гауссовыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Введем между ними коэффициенты парной линейной корреляции $\rho_{X_i Y_j}$. Рассмотрим ситуацию, когда отказы у элементов в каждой из подсистем возникают независимо друг от друга, т.е. $\rho_{X_1 X_2} = \rho_{Y_1 Y_2} = 0$. Считаем отказом каждого элемента подсистем X и Y попадание значения вне интервала $(-A, A)$, $A > 0$. Пусть для определенности $A = 3$. Зададим условия для отказа каждого элемента: $B_i = \{x_i \notin (-A; A)\}$ – отказ элемента X_i подсистемы X , $C_i = \{y_i \notin (-A; A)\}$ – отказ элемента Y_i подсистемы Y . В данном примере под каскадным сбоем понимаем одновременный отказ подсистем X и Y .

Оценку тесноты корреляционной взаимосвязи между элементами системы S и подсистемами X и Y выполним по формулам (9) и (8), которые здесь примут вид

$$(11) \quad d_4(S) = D_4(X_1 \cap X_2 \cap Y_1 \cap Y_2) = 1 - |\mathbf{R}_S|^{\frac{1}{4}} = 1 - |\mathbf{R}_{X \cup Y}|^{\frac{1}{4}},$$

$$(12) D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = 1 - \left(\frac{|\mathbf{R}_{\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}}|}{|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}| \cdot |\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}|} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{где } |\mathbf{R}_{\mathbf{S}}| = |\mathbf{R}_{\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \rho_{X_1 Y_1} & \rho_{X_1 Y_2} \\ 0 & 1 & \rho_{X_2 Y_1} & \rho_{X_2 Y_2} \\ \rho_{X_1 Y_1} & \rho_{X_2 Y_1} & 1 & 0 \\ \rho_{X_1 Y_2} & \rho_{X_2 Y_2} & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{R}_{\mathbf{X}}| = |\mathbf{R}_{\mathbf{Y}}| = 1.$$

Случай 1. Пусть элементы в подсистемах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соединены последовательно (рис. 3).

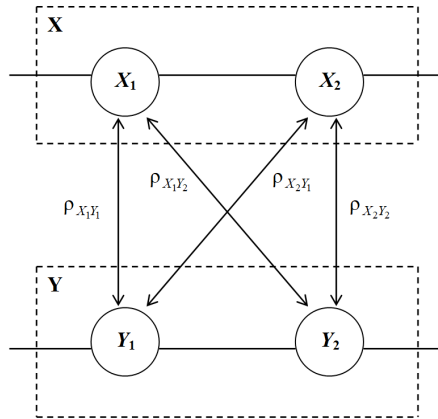


Рис. 3. Сетевая структура, состоящая из двух взаимосвязанных подсистем $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$

Условия отказа подсистем выглядят так: $B = B_1 \cup B_2$ – отказ подсистемы $\mathbf{X}$, $C = C_1 \cup C_2$ – отказ подсистемы $\mathbf{Y}$, $B \cdot C = (B_1 + B_2)(C_1 + C_2)$ – одновременный отказ подсистем $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, это событие будем считать отказом системы $\mathbf{S}$.

Рассмотрим два различных варианта корреляционных связей между элементами разных подсистем.

Вариант 1. Все коэффициенты корреляции между элементами подсистем равны между собой: $\rho_{X_1 Y_1} = \rho_{X_1 Y_2} = \rho_{X_2 Y_1} = \rho_{X_2 Y_2}$.

Вариант 2. Коррелированно функционируют между собой только один элемент подсистемы $\mathbf{X}$ и один элемент подсистемы $\mathbf{Y}$. Пусть для определенности $\rho_{x_1y_1} = \rho_{x_2y_2} \neq 0$, $\rho_{x_1y_2} = \rho_{x_2y_1} = 0$.

На рис. 4, 5 приведены зависимости $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ для вариантов 1 и 2.

Отметим, что для обоих вариантов $\frac{P(B/C)}{P(B)} = \frac{P(C/B)}{P(C)}$. Из графиков видим, что условная вероятность отказа любой из подсистем при отказе другой подсистемы с увеличением $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ монотонно растет и увеличивается более чем в 20 и 150 раз соответственно (при стремлении $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ к 1).

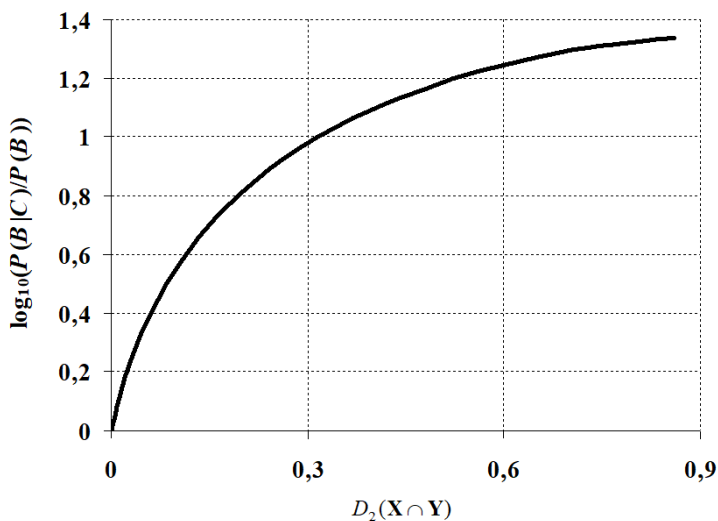


Рис. 4. Зависимость $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ для варианта 1

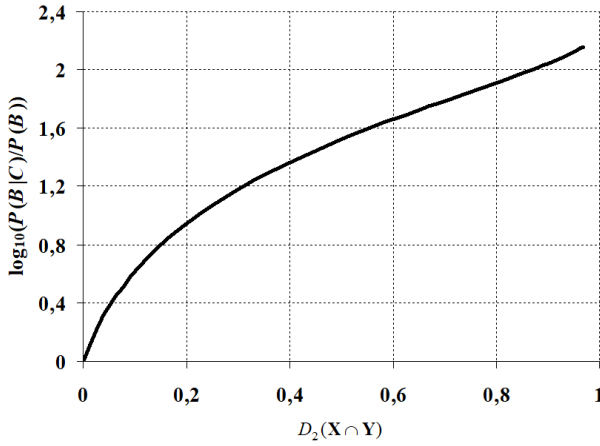


Рис. 5. Зависимость $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(X \cap Y)$ для варианта 2

Случай 2. Пусть элементы в подсистемах X и Y соединены параллельно (рис. 6).

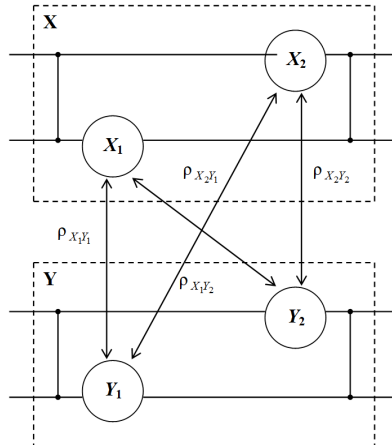


Рис. 6. Сетевая структура, состоящая из двух взаимосвязанных подсистем X и Y

Условия отказа подсистем здесь примут вид: $B = B_1 \cap B_2$ – отказ подсистемы X , $C = C_1 \cap C_2$ – отказ подсистемы Y .

Оценку тесноты корреляционной взаимосвязи между подсистемами X и Y выполним по формуле (12). Рассмотрим два различных варианта корреляционных связей между элементами разных подсистем.

Вариант 1. Все коэффициенты корреляции между элементами подсистем равны между собой: $\rho_{x_1y_1} = \rho_{x_1y_2} = \rho_{x_2y_1} = \rho_{x_2y_2}$.

Вариант 2. Коррелированно функционируют между собой только один элемент подсистемы X и один элемент подсистемы Y . Пусть для определенности $\rho_{x_1y_1} = \rho_{x_2y_2} \neq 0$, $\rho_{x_1y_2} = \rho_{x_2y_1} = 0$.

На рис. 7, 8 приведены зависимости $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(X \cap Y)$ для вариантов 1 и 2. Отметим, что для обоих вариантов $\frac{P(B/C)}{P(B)} = \frac{P(C/B)}{P(C)}$.

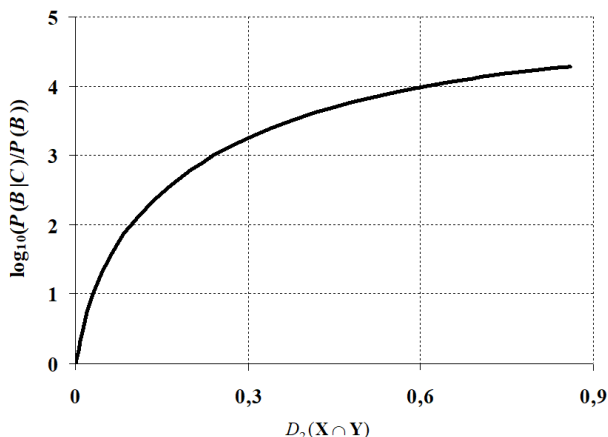


Рис. 7. Зависимость $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(X \cap Y)$ для варианта 1

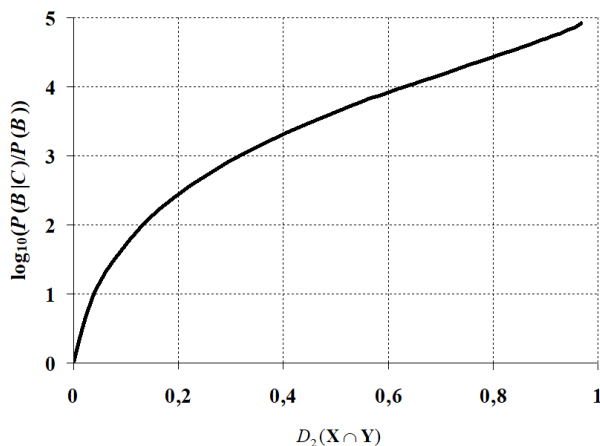


Рис. 8. Зависимость $\log_{10} \frac{P(B/C)}{P(B)}$ от коэффициента $D_2(X \cap Y)$ для варианта 2

Из графиков видим, что условная вероятность отказа любой из подсистем при отказе другой подсистемы с увеличением $D_2(X \cap Y)$ монотонно растет и увеличивается более чем в 18000 и 80000 раз соответственно (при стремлении $D_2(X \cap Y)$ к 1).

Рассмотренные примеры 1, 2 показали следующее. Во-первых, рост тесноты корреляционной взаимосвязи между подсистемами приводит к значительному росту риска при функционировании сетевых структур. На основе полученных результатов можно считать, что в условиях тесной корреляционной взаимосвязи между подсистемами в сетевой структуре риск ее отказа значительно растет при отказе других систем, входящих в эту структуру.

Во-вторых, риск отказа любой системы зависит от характеристик надежности элементов системы, а также от тесноты корреляционной взаимосвязи между подсистемами сетевой структуры. В случае отсутствия или слабой корреляционной связи между элементами подсистем в качестве индикатора риска функционирования сетевой структуры может быть использован коэффициент тесноты взаимосвязи между этими подсистемами.

Выше был рассмотрена ситуация, когда отказы у элементов в каждой из подсистем возникают независимо друг от друга. Пусть теперь $\rho_{x_1x_2} = \rho_{y_1y_2} > 0$. Для ряда различных значений коэффициентов $d_4(\mathbf{S})$, $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$, $d_2(\mathbf{X})$ и $d_2(\mathbf{Y})$ определим вероятности $P(B \cdot C)$. В таблицах 1, 2 приведены некоторые результаты, отражающие имеющуюся закономерность зависимости риска от тесноты взаимосвязи между подсистемами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Были исследованы ситуации, когда фиксировался один из двух коэффициентов $d_4(\mathbf{S})$ или $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$, а другой изменялся путем варьирования коэффициентов парной линейной корреляции между элементами системы $\mathbf{S}$. Видим, что коэффициент $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ характеризует величину риска системы и при фиксированных значениях $d_4(\mathbf{S})$ его увеличение приводит к росту риска.

Отметим, что коэффициент $d_4(\mathbf{S})$ не подходит в качестве индикатора риска, например:

- для случая 1 и варианта 2 при $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = 0,580$ имеем:
1) $d_4(\mathbf{S}) = 0,362$ и $P(B \cdot C) = 0,00091$; 2) $d_4(\mathbf{S}) = 0,386$ и $P(B \cdot C) = 0,00056$;
- для случая 2 и варианта 2 при $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = 0,791$ имеем:
1) $d_4(\mathbf{S}) = 0,546$ и $P(B \cdot C) = 9,4 \cdot 10^{-7}$; 2) $d_4(\mathbf{S}) = 0,549$ и $P(B \cdot C) = 4,8 \cdot 10^{-7}$.

Таблица 1. Случай 1. Вероятности $P(B \cdot C)$ в зависимости от коэффициентов $d_4(\mathbf{S})$ и $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$

Вариант	$d_4(\mathbf{S})$	$D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$	$d_2(\mathbf{X}) = d_2(\mathbf{Y})$	$P(B \cdot C)$
1	0,088	0,044	0,067	0,00009
	0,088	0,134	0,020	0,00019
	0,203	0,110	0,155	0,00026
	0,203	0,339	0,020	0,00049
	0,242	0,134	0,185	0,00035
	0,263	0,128	0,211	0,00035
	0,263	0,435	0,020	0,00062
2	0,157	0,154	0,083	0,00011
	0,157	0,219	0,046	0,00020
	0,362	0,580	0,016	0,00091
	0,386	0,580	0,052	0,00056
	0,386	0,607	0,020	0,00090
	0,546	0,783	0,024	0,00117
	0,546	0,791	0,005	0,00189

Таблица 2. Случай 2. Вероятности $P(B \cdot C)$ в зависимости от коэффициентов $d_4(S)$ и $D_2(X \cap Y)$

Вариант	$d_4(S)$	$D_2(X \cap Y)$	$d_2(X) = d_2(Y)$	$P(B \cdot C)$
1	0,203	0,110	0,155	1,1E-07
	0,203	0,339	0,020	4,3E-07
	0,251	0,435	0,004	3,4E-07
	0,263	0,128	0,211	2,1E-07
	0,263	0,435	0,020	8,3E-07
	0,352	0,149	0,297	2,8E-07
	0,352	0,576	0,005	9,6E-07
2	0,489	0,721	0,034	1,1E-07
	0,489	0,728	0,020	1,9E-07
	0,546	0,783	0,024	3,4E-07
	0,546	0,791	0,005	9,4E-07
	0,549	0,791	0,014	4,8E-07
	0,701	0,909	0,010	9,8E-07
	0,701	0,911	0,0002	2,5E-06

Также можно говорить о том, что коэффициенты $d_2(X)$ и $d_2(Y)$ влияют на риск системы S разнонаправленно.

3.3. ПРИМЕР 3.

Рассмотрим сетевую структуру S в виде двух взаимосвязанных гауссовых подсистем X и Y , каждая из которых состоит из четырех элементов, являющихся стандартными гауссовыми случайными величинами. Корреляционная матрица приведена в таблице 3.

Таблица 3. Корреляционная матрица сетевой структуры из двух подсистем

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	1	0,7	0,6	0,4	0,8	0,75	0,2	0,2
X_2	0,7	1	0,1	0,5	0,7	0,8	0,2	0,4
X_3	0,6	0,1	1	0,3	0,5	0,5	0,1	0,1
X_4	0,4	0,5	0,3	1	0,4	0,3	0,2	0,2
Y_1	0,8	0,7	0,5	0,4	1	0,6	0,2	0,4
Y_2	0,75	0,8	0,5	0,3	0,6	1	0,1	0,25
Y_3	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	1	0,4
Y_4	0,2	0,4	0,1	0,2	0,4	0,25	0,4	1

Определим, насколько уменьшатся коэффициенты корреляционной взаимосвязи $d_8(\mathbf{S})$ и $D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ в результате удаления одного из элементов. Результаты приведены в таблице 4.

Таблица 4. Уменьшение коэффициентов корреляционной взаимосвязи $D_4(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$ и $d_8(\mathbf{S})$ в результате удаления из системы одного из элементов

Удаляемый элемент	Уменьшение коэффициента взаимосвязи	
	$\Delta d_8(\mathbf{S})$	$\Delta D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$
X_1	0,064	0,023
X_2	0,245	0,348
X_3	0,158	0,220
X_4	0,054	0,101
Y_1	0,091	0,148
Y_2	0,184	0,383
Y_3	-0,036	0,004
Y_4	-0,015	0,019

Видим, что наибольшее уменьшение корреляционной взаимосвязи в обоих случаях будет при удалении из системы элементов X_2 и Y_2 .

Далее для всех 28 случаев были определены изменения (уменьшения) коэффициентов корреляционной взаимосвязи $D_4(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$ и $\Delta d_8(\mathbf{S})$ при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции между элементами системы на одну и ту же величину, равную, например, 0,03. Результаты для наибольших изменений приведены в таблице 5.

Таблица 5. Уменьшение величин $D_4(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$, $d_8(\mathbf{S})$ и $P(D)$ и вероятности отказа системы при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции на 0,03

Уменьшение показателя	Уменьшаемый коэффициент корреляции					
	$\rho_{X_2Y_2}$	$\rho_{X_3Y_2}$	$\rho_{X_2Y_1}$	$\rho_{X_2X_4}$	$\rho_{X_3Y_1}$	$\rho_{X_3X_4}$
$\Delta d_8(\mathbf{S})$	0,071	0,050	0,039	0,036	0,027	0,024
$\Delta D_2(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})$	0,095	0,062	0,046	0,039	0,031	0,025
$\Delta P(D)$	4,6%	2,4%	2,1%	1,1%	0,7%	1,0%

Продолжим рассмотрение этих 28 случаев. Считаем отказом каждого элемента попадание значения вне интервала $(-A, A)$, $A = 2,5$. В качестве отказа сетевой структуры (каскадного сбоя) будем считать ситуации, когда одновременно отказали хотя бы 3 элемента одной подсистемы и хотя бы два элемента другой подсистемы. Данная ситуация достаточно адекватно моделирует наступление каскадного сбоя. Вероятность отказа для системы S $P(D) = 0,000545$. Оценим для всех 28 случаев, насколько она изменится при уменьшении одного из парных коэффициентов корреляции на 0,03. Результаты приведены в последней строке таблицы 4.

Таким образом, установили, что на риск отказа сетевой структуры в виде каскадного сбоя в первую очередь влияет высокая корреляция между элементами X_2 и Y_2 . Например, уменьшение коэффициента корреляции ρ_{X_2, Y_2} до 0,25 позволит снизить вероятность каскадного сбоя в системе S на 63,3%, или в 2,72 раза. Отметим, что одновременно у критических элементов присутствует возможность снижения коэффициента парной корреляции между ними (определитель корреляционной матрицы остается положительным).

Следовательно, можно сформулировать следующую гипотезу: *В качестве индикатора риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре может быть использован коэффициент корреляционной взаимосвязи между ее подсистемами. Для снижения риска возникновения каскадных сбоев в сетевой структуре следует уменьшать тесноту корреляции между наиболее взаимосвязанными элементами подсистем.*

4. Заключение

Введена скалярная мера взаимосвязи между несколькими произвольно распределенными непрерывными случайными векторами, позволяющая оценить тесноту взаимосвязи между различными подсистемами в сетевых структурах. Для введенной скалярной меры взаимосвязи получен ряд частных результатов. Предложенный коэффициент может использоваться для иссле-

дования сетевых структур, состоящих из множества подсистем. В частности, он может применяться в качестве индикатора критического уровня риска каскадных сбоев во взаимозависимых сетях. Показано, что для снижения риска возникновения каскадных сбоев следует уменьшать тесноту корреляции между наиболее взаимосвязанными элементами подсистем.

Литература

1. АЛЕКСЕЕВ В.В., СОЛОЖЕНЦЕВ Е.Д. *Логико-вероятностный подход к управлению риском и эффективностью в структурно-сложных системах* // Информационно-управляющие системы. – 2009. – №6(43). – С. 67–71.
2. АШНИНА Ю.А. БОРИСОВ А.В., БОРИСОВА Н.И. *Развитие инфраструктуры современного города: социальные и экономические аспекты* // NovaInfo. – 2015. – №39. – С. 177–183.
3. БУЛАТОВ В.В. *Введение в математические методы моделирования сложных систем*. – М.: ОнтоПринт, 2018. – 338 с.
4. МИХАЙЛОВ Г.А., ВОЙТИШЕК А.В. *Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло*. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 368 с.
5. НОВИКОВ Д.А. *Сетевые структуры и организационные системы*. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.
6. *Современный философский словарь*: 2-е изд. / Под общ. ред. В.Е. Кемерова. – М.: ПАНПРИНТ, 1998. – 1064 с.
7. ТЫРСИН А.Н. *Мера совместной корреляционной зависимости многомерных случайных величин* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2014. – Т. 80, №1. – С. 76–80.
8. ТЫРСИН А.Н. *Скалярная мера взаимосвязи между несколькими случайными векторами* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2022. – Т. 88, №3. – С. 73–80.
9. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. В 3 т. Т.1. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с.
10. ХАРДЛЕ В. *Прикладная непараметрическая регрессия*: Пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 349 с.

11. BEHRENSDORF J., BROGGI M., BEER M. *Reliability Analysis of Networks Interconnected with Copulas* // ASCE-ASME. Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B Mechanical Engineering. – 2019. – Vol.5. – P. 041006-9.
12. BULDYREV S.V., PARSHANI R., PAUL G., STANLEY H.E., HAVLIN SH. *Catastrophic cascade of failures in interdependent networks* // Nature. – 2010. – Vol. 464. – P. 1025–1028.
13. CHERUBINI U., LUCIANO E., VECCHIATO W. *Copula Methods in Finance*. – Wiley, Chichester, UK, 2004.
14. ENGLE R.F. *Anticipating Correlations. A New Paradigm for Risk Management*. – Princeton University Press, 2009.
15. GOODWIN B.K., HUNGERFORD A. *Copula-Based Models of Systemic Risk in us Agriculture: Implications for Crop Insurance and Reinsurance Contracts* // American Journal of Agricultural Economics. – 2014. – Vol. 97, No 3. – P. 879–896.
16. GORBAN A.N., TYUKINA T.A., POKIDYSHEVA L.I., SMIRNOVA E.V. *Dynamic and thermodynamic models of adaptation* // Physics of Life Reviews. – 2021. – Vol. 37. – P.17–64.
17. JOE H. *Dependence Modeling with Copulas*. – Chapman and Hall/CRC, New York, 2014.
18. LAPRIE J.C., KANOUN K., KANICHE M. *Modeling interdependencies between the electricity and information infrastructures* // SAFECOMP-2007. – 2007. – Vol. 4680. – P. 54–67.
19. PENA D., RODRIGUEZ J. *Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence* // Journal of Multivariate Analysis. – 2003. – Vol. 85, No 2. – P. 361–374.
20. RAM M., SINGH S.B. *Analysis of Reliability Characteristics of a Complex Engineering System under Copula* // Journal of Reliability and Statistical Studies. – 2009. – Vol. 2, No 1. – P. 91–102.
21. RINALDI S., PEERENBOOM J., KELLY T. *Identifying, understanding, and analyzing critical infrastructure interdependencies* // IEEE Control Systems Magazine. – 2001. – Vol. 21. – P. 11–25.

RISK INDICATORS OF CASCADING FAILURES IN INTERCONNECTED NETWORK STRUCTURES

Alexander Tyrsin, Science and Engineering Center “Reliability and Resource of Large Systems and Machines”, Ural Branch of RAS, Yekaterinburg, Institute of Economics, Ural Branch of RAS, Doctor of Science, professor (at2001@yandex.ru).

Stanislav Kashcheev, South-Ural State University, Chelyabinsk (kashcheevs@susu.ru).

Abstract: The behavior of real systems is often stochastic, and the connections between their elements can be adequately described as correlations. In recent years, there have been trends of increasing and complicating modern networks with the growth of their dependence on each other. We observe how several networks are combined into one interdependent network structure. This leads to an increase in the risks that the failure of nodes in one network may lead to the failure of dependent nodes in other networks. As a result of such failures, catastrophic cascade failures can occur in such interconnected network structures. Given the scale of such structures, which are often critical infrastructures, this problem becomes very relevant. The article introduces a scalar measure of the relationship between several arbitrarily distributed continuous random vectors. It allows you to assess the closeness of the relationship between different subsystems (networks) in network structures. Applied to Gaussian model network structures, the influence of the closeness of the relationship between subsystems on the risk of cascading failures has been studied. The probability of such failures was used as the risk value. As an indicator of the risk of cascading failures in the network structure, it is proposed to use the coefficient of correlation between its subsystems. And to reduce the risk of cascading failures in the network structure, it is necessary to reduce the tightness of correlation between the most interconnected elements of subsystems.

Keywords: network structure, model, risk, interconnection, cascading failure, system.

УДК 519.237.5 + 330.131.7

ББК 22.172 + 65.2/4

DOI: 10.25728/ubs.2023.102.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.Ф. Караваем.*

Поступила в редакцию 12.10.2022.

Опубликована 31.03.2023.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА ОБОРУДОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ МАЛОЙ ВЫБОРКИ ДАННЫХ

Задиран К. С.¹, Щербаков М. В.², Сай Ван Квонг³
(Волгоградский государственный технический
университет, Волгоград)

Предлагается метод прогнозирования остаточного ресурса оборудования, использующий глубокое обучение и применимый в случаях с малым количеством информации об отказах в данных, где существующие классические методы могут не давать требуемой точности. Процесс поддержания оборудования в рабочем состоянии – один из наиболее важных процессов в эксплуатации оборудования. При этом процесс технического обслуживания зачастую страдает от недостаточной эффективности. Поэтому были разработаны методы прогнозирования, на основе которых была построена концепция проактивного управления процессом техобслуживания, позволяющая оптимизировать структуру и затраты управления оборудованием на протяжении жизненного цикла. Однако данные методы могут показывать недостаточную точность, если для их обучения недостаточно данных, например, в связи с редкостью возникновения отказов в оборудовании. Для решения этой проблемы предлагается новый метод прогнозирования, в основе которого лежит алгоритм, основанный на глубоком обучении и который может улучшить точность прогнозирования. В данном методе произведена замена непрерывного прогнозирования остаточного ресурса оборудования на всем интервале на систему генерации сигналов, содержащих рассчитанный прогноз.

Ключевые слова: машинное обучение, остаточный ресурс, проактивное техническое обслуживание.

1. Введение

В настоящее время в связи с увеличением сложности, разнообразия и количества промышленного оборудования повышается важность проблемы управления данным оборудованием и его жизненным циклом [2]. В течение жизненного цикла оборудования производится техническое обслуживание, эффективность которого в значительной степени зависит от модели

¹ Константин Сергеевич Задиран, аспирант (konstantin.zadiran@gmail.com).

² Максим Владимирович Щербаков, д.т.н., доцент (maxim.shcherbakov@vstu.ru).

³ Ван Квонг Сай, к.т.н. (svcuonghvtqs@gmail.com).

управления данным процессом [2]. Развитие технологий проактивной поддержки принятия решений позволяет перейти к управлению техническим обслуживанием на основе остаточного ресурса [5]. Данные технологии имеют потенциал быть более эффективными в планировании графика технического осмотра и обслуживания оборудования, чем установленные производителем процедуры и рекомендованные интервалы, которые могут не учитывать конкретные условия эксплуатации и нагрузку оборудования [1, 3].

Остаточный ресурс оборудования – величина суммарной наработки оборудования от текущего момента до его отказа. Под отказом понимается предельное состояние оборудования, при котором невозможно проводить дальнейшую эксплуатацию без причинения ущерба оборудованию или необходимости восстановления работоспособного состояния оборудования [3].

Активно развиваются аналитические методы машинного обучения и анализа данных для прогнозирования остаточного ресурса оборудования [4]. Эти методы основаны на прогнозировании временных рядов и требуют для функционирования данные показателей оборудования, записанные во времени. Широкая доступность таких данных в настоящее время обеспечивается развитием и удешевлением технической базы технологий Интернета вещей – сенсоров для считывания данных, технологий и оборудования для передачи и хранения этих данных.

Прогнозирование отказов оборудования сводится к прогнозированию остаточного ресурса оборудования, или RUL – Remaining Useful Life, – подхода, совместимого с применением методов и алгоритмов машинного обучения. Значение параметра RUL определяется как временной интервал, обозначающий остаточный ресурс компонента или системы промышленного оборудования [8, 21]. Если принять t_0 за момент времени возникновения отказа, а t_c – за текущий момент времени, то RUL для момента t_c можно записать в виде

$$(1) \quad RUL_{t_c} = t_0 - t_c.$$

Данная зависимость проиллюстрирована на рис. 1.

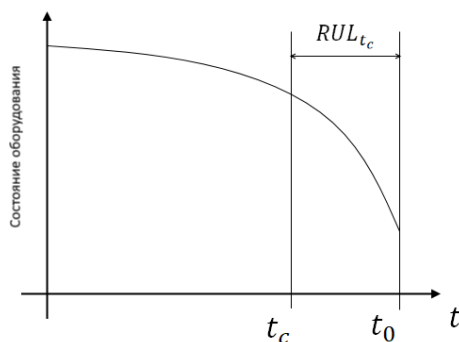


Рис. 1. Зависимость между моментом отказа и остаточным ресурсом

Все методы прогнозирования остаточного ресурса можно разделить на методы, основанные на моделях, и методы, основанные на данных [17]. Методы, основанные на моделях, основываются на применении экспертных знаний для физико-математического моделирования поведения оборудования. Однако недостатком этих методов является сложность построения достоверной модели для сложных или изменяющихся условий эксплуатации, а также при недостатке экспертизы в целевом направлении [13, 15].

Методы, основанные на данных, позволяют уйти от этих недостатков, так как с позиции применения этих методов представление процесса эксплуатации оборудования сводится к временным рядам управляющих параметров и данных о состоянии оборудования [12, 24], а построение прогноза выполняется с применением методов машинного обучения.

Основанные на данных методы, в свою очередь, делятся на классические и методы глубокого обучения [19]. К классическим методам относятся, например, метод опорных векторов (SVM), случайный лес (RF), метод k -ближайших соседей (KNN) [4]. Данные методы требуют меньшего привлечения экспертных знаний для построения моделей, чем методы, основанные на моделях, однако могут зависеть от них в определении значащих

управляющих параметров и параметров эксплуатации оборудования для обучения моделей.

Полностью уйти от зависимости от экспертных знаний позволяют методы глубокого обучения. Данные методы получили широкое развитие в последнее время. В работах [16, 18, 22, 23] рассматриваются методы, основанные на алгоритмах сетей долгой краткосрочной памяти (LSTM), рекуррентных нейронных сетей (RNN), конволюционных нейронных сетей (CNN), SVM, Random Forest, XGBoost, а также их комбинациях. Данные методы показывают большую точность прогнозирования, чем классические, ориентированные на данные методы [7, 9].

Однако для точного прогнозирования RUL методами, использующими алгоритмы глубокого обучения, необходим большой объем данных, что соответствует большому количеству отказов. В случае малого количества отказов данных может быть недостаточно и, следовательно, точность метода может снижаться. В таблице 1 приведен пример сравнения результатов нескольких методов прогнозирования RUL для данных NASA Turbofan Degradation Dataset[4] для случаев, когда доступно 100 и 50 отказов для обучения модели, оцененных с использованием RMSE[20].

Таблица 1. Точность в зависимости от доступности данных

Метод	100 отказов	50 отказов
Random Forest	24,17	28,24
RNN	23,78	37,86
CNN	19,04	25,13
SVM	22,69	29,51

При этом результаты прогнозирования могут содержать в себе полезную информацию, которую можно потенциально из них извлечь. В этой статье предлагается метод прогнозирования RUL, в котором учтен приведенный сценарий использования данных с ограниченным количеством отказов.

2. Метод

Чтобы повысить точность, предлагается прогнозировать RUL не непрерывно для каждого интервала во временном ряду, а в отдельные моменты времени, когда остаточный ресурс оборудования можно определить с наибольшей точностью. В данном подходе производится анализ прогноза, формируемого непрерывно для каждого из измерений, по результатам которого производится генерация сигналов со значением RUL, если входные данные будут соответствовать параметрам, определенным на стадии обучения модели.

Данное решение позволит исключить из результатов прогнозирования отдельные элементы, для которых невозможно определить результат с достаточной точностью, тем самым повысив точность прогноза в целом. Схема предлагаемого метода приведена на рис. 2.

Входными данными являются временные ряды, содержащие данные с датчиков оборудования. Данные группируются по отказам. Для каждого отказа оборудования формируется отдельный временной ряд, в котором последнее измерение совпадает по времени с моментом фиксации отказа.

Выходными данными работы метода являются сигналы, для которых $T_{\text{сигн}} + \Delta t = T_{\text{отк}}$, где $T_{\text{сигн}}$ – время возникновения сигнала, $T_{\text{отк}}$ – спрогнозированный момент наступления отказа оборудования, Δt – интервал времени, между возникновением сигнала и наступлением отказа оборудования, определенный на стадии обучения модели, построенной с использованием предлагаемого метода.

Предлагаемый метод включает два режима работы: режим «Оффлайн» и режим «Онлайн», подразумевающий работу в режиме реального времени. В первом режиме производится подготовка исторических данных, модели прогнозирования и правил для генерации сигналов. Во втором режиме на вход подаются данные с оборудования в реальном времени, производится их обработка и вычисление прогноза RUL и на основании прогноза при совпадении с одним из правил производится генерация сигнала.

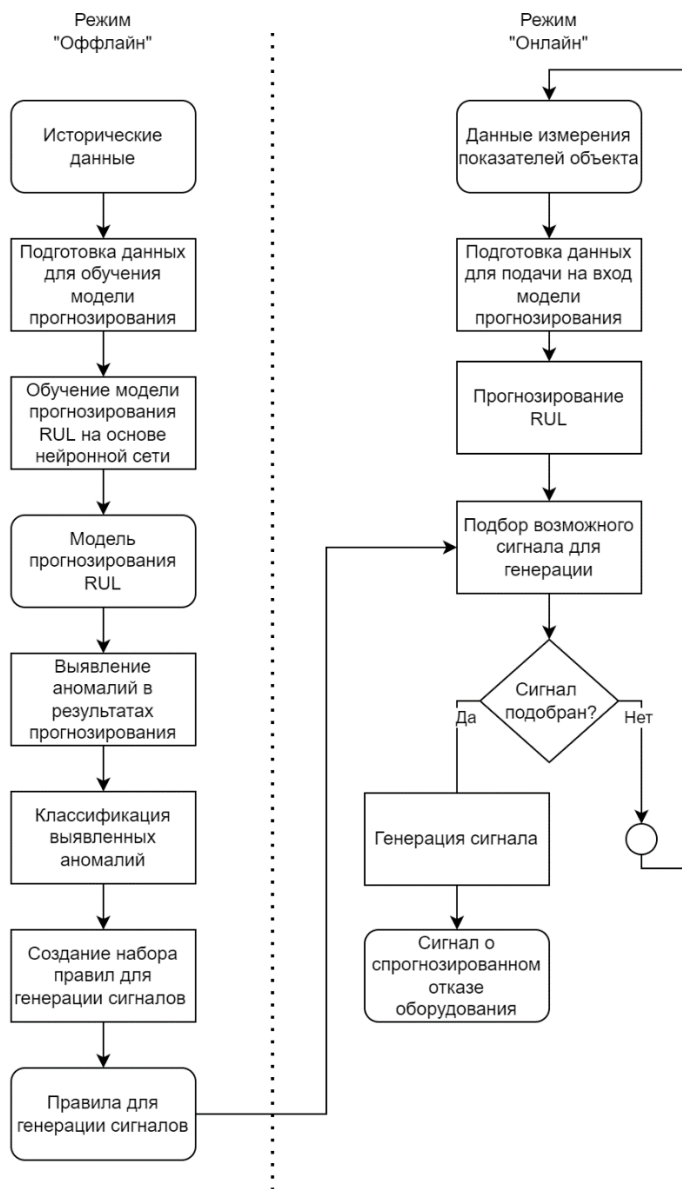


Рис. 2. Схема предлагаемого метода

Предлагаемый метод имеет два гиперпараметра, влияющих на процесс обучения: M – количество записей перед точкой наступления отказа $T_{\text{отк}}$, которые используются в процессе обучения модели, образуя диапазон $(T_{\text{отк}} - M; T_{\text{отк}}]$; w – количество записей перед точкой $t \in (T_{\text{отк}} - M; T_{\text{отк}}]$, из которых формируются входные данные.

Алгоритм режима «Оффлайн» состоит из двух крупных шагов, которые подразделяются на более мелкие операции. На первом шаге производится расчет F^{RUL} – спрогнозированного значения RUL для входных данных.

Для обучающей выборки определяется RUL по формуле

$$(2) \quad RUL_i = T_{\text{отк}} - T_i,$$

где RUL_i – RUL для момента времени T_i . После определения RUL производится отсеивание измерений, не входящих в интервал $(T_{\text{отк}} - M; T_{\text{отк}}]$.

Далее факторы входных данных преобразуются методом экспоненциального сглаживания.

Затем производится нормализация данных

$$(3) \quad x_{\text{norm}} = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}.$$

Далее производится построение выборки, используемой для обучения искусственной нейронной сети CNN. Для этого применяется метод скользящего окна, при котором для выходного параметра RUL_i входные параметры определяются как матрица A_i вида

$$(4) \quad A_i = \begin{bmatrix} x_{(i-w;1)} & - & x_{(i;1)} \\ | & \backslash & | \\ x_{(i-w;1)} & - & x_{(i;n)} \end{bmatrix},$$

где w – количество измерений до момента времени t_i , n – количество факторов во входных данных.

Далее производится построение и обучение искусственной нейронной сети CNN. Обученная нейронная сеть используется для прогнозирования F^{RUL} – прогнозного значения RUL.

На втором шаге производится построение модели (или набора правил) для генерации сигналов.

Для спрогнозированного F^{RUL} вычисляется ряд изменений значения:

$$(5) \quad \Delta F_i^{RUL} = F_i^{RUL} - F_{i-1}^{RUL}.$$

Далее, с использованием метода IQR [14] производится выявление аномальных значений в ряду ΔF^{RUL} . В рамках разработанного метода эти аномальные значения могут быть соотнесены с конкретным значением RUL.

Чтобы соотнести эти аномальные значения с RUL, производится их классификация с использованием алгоритма Random Forest [10]. Классификация производится в два этапа. На первом в режиме обучения без учителя строится матрица расстояний для аномальных значений. На втором этапе на основании этой матрицы производится распределение значений на классы.

Для каждого класса вычисляется две характеристики: диапазон изменения значений, соответствующих этому классу, и RUL, вычисляемый как среднее значение RUL для всех элементов класса. Так как диапазоны изменения значений классов могут пересекаться, принадлежность точки к классу в режиме тестирования/использования обученной модели производится в порядке уменьшения значения RUL для класса, и если для какого-то класса получено совпадение, то новая точка классифицируется как элемент данного класса и дальнейшая проверка на принадлежность не производится.

По завершении процесса обучения становится доступен переход к работе в режиме «Онлайн». В данном режиме используется модель прогнозирования RUL на основе нейронной сети CNN, подготовленная в режиме «Оффлайн».

Данные о состоянии оборудования поступают и обрабатываются в реальном времени. Для этого выполняется их предобработка, состоящая из аналогичных предыдущему режиму шагов. Обработанные данные подаются на вход модели прогнозирования, которая строит прогноз RUL. Вычисляется разница между текущим и предыдущим значением RUL.

Для полученной разницы производится поиск подходящего правила для генерации сигнала по попаданию в диапазон значений изменения RUL. Если правило найдено, генерируется сиг-

нал, содержащий значение остаточного ресурса оборудования для данного правила.

3. Реализация

Алгоритм прогнозирования был реализован с использованием языка программирования R, среды разработки R-Studio.

При реализации использовались следующие пакеты R: 1) keras – для построения и обучения искусственной нейронной сети CNN [10]; 2) readr, dplyr – для работы с данными [6]; 3) forecast – для выявления аномалий во временном ряду [11]; 4) randomForest, cluster – для кластеризации [10].

4. Результаты

Для оценки точности предложенного метода использовались данные с эксплуатации турбинных электрогенерирующих установок. Эти данные содержат 9 факторов, соответствующих наиболее важным показателям состояния оборудования. Записи во временных рядах произведены с интервалом в 1 минуту. Всего в данных насчитывается 5 отказов, что делает их подходящими для проверки эффективности предложенного метода.

Формирование выборки для каждого из отказов производилось следующим образом: взято M измерений перед отказом в момент $T_{\text{отк}}$, составляющих интервал $(T_{\text{отк}} - M; T_{\text{отк}}]$. Для каждой точки $i \in (T_{\text{отк}} - M; T_{\text{отк}}]$ был рассчитан RUL по формуле (2) в качестве выходных значений. В качестве входных значений для каждой точки i был сформирован по формуле (4) двумерный массив данных размерностью $w \times 9$. В результате был подготовлен набор, содержащий $5M$ (по количеству отказов в выборке) или 750 образцов исторических данных.

Для сравнения были взяты примеры классических алгоритмов и алгоритмов глубокого обучения, которые были определены как наиболее точные [4, 16, 23] для прогнозирования остаточного ресурса оборудования.

В результате экспериментов были определены параметры, при которых алгоритмы дают наибольшую точность. Параметры

$M = 150$, $w = 25$, задающие размерность и форму входных данных, а также структура нейронной сети, приведены на рис. 3.

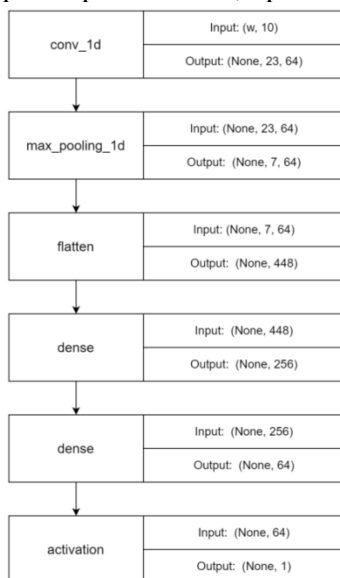


Рис. 3. Структура нейронной сети CNN

Для оценки эффективности работы методов использовалась метрика RMSE[20]. Для расчета среднеквадратичной ошибки используется следующая формула

$$(6) \quad RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\bar{y}_t - y_t)^2}{n}},$$

где n – размер выборки, $\bar{y}_t$ – спрогнозированное значение, y_t – реальное значение, полученное в результате наблюдений. Метод считается тем точнее, чем меньше для результата прогнозирования модели ошибка RMSE.

Для тестирования использовалась техника кросс-валидации, с разделением данных в соотношении 3/1/1 для обучающей, тестовой и верификационной выборки. Полученные результаты были усреднены. Результаты тестирования приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты тестирования

Метод	Значение RMSE
Random Forest	30,54
KNN	44,91
SVM	39,85
LSTM	33,74
RNN	36,02
CNN	28,67
Предлагаемый метод	23,79

На рис. 4 представлен пример прогноза остаточного ресурса оборудования, построенного с использованием предложенного метода. Пропуски в данных означают, что для данной точки не удалось спрогнозировать RUL с достаточной точностью.

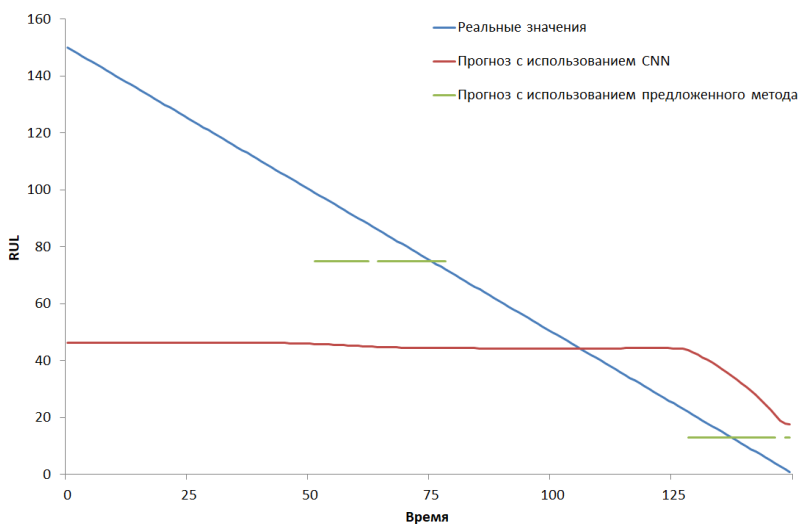


Рис. 4. Пример прогноза, построенного с использованием предложенного метода

5. Заключение

В данной работе предложен и рассмотрен новый метод прогнозирования остаточного ресурса оборудования. Данный метод

предложен для ситуаций с небольшим количеством отказов, где нет возможности построить точную модель существующими способами. Для решения этой проблемы предложено заменить выходные данные алгоритма прогнозирования сигнальной системой, при которой в зависимости от результатов анализа входных данных и при срабатывании проверок будет выдаваться один из predetermined сигналов с оцениваемым остаточным ресурсом. Данные изменения позволяют в отдельных сценариях повысить точность прогнозирования остаточного ресурса оборудования.

Литература

1. ГУНИНА И.А., ШКАРУПЕТА Е.В., РЕШЕТОВ В.В. *Прорывное технологическое развитие промышленных комплексов в условиях цифровой трансформации* // Инновационные кластеры цифровой экономики: теория и практика. – 2018. – С. 535–554.
2. КУПРИЯНОВСКИЙ В.П., НАМИОТ Д.Е., ДРОЖЖИНОВ В.И., КУПРИЯНОВСКАЯ Ю.В., ИВАНОВ М.О. *Интернет вещей на промышленных предприятиях* // International Journal of Open Information Technologies. – 2016. – №12. – С. 156–161.
3. ЛЫСЕНКО С.В., ТЕН Э.В. *Об оценке остаточного ресурса башенных кранов* // Проблемы современной науки и образования. – 2016. – №1. – С. 98–102.
4. САЙ ВАН КВОНГ, ЩЕРБАКОВ М.В. *Метод прогнозирования остаточного ресурса на основе обработки данных многообъектных сложных систем* // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2019. – №1(45). – С. 33–44.
5. ШИЛОВА Е.В., ДЬЯКОВ А.Р. *О феномене четвертой промышленной революции и его влиянии на экономику и управление* // Вестник Прикамского социального института. – 2018. – №3(81). – С. 86–95.
6. *A Grammar Of Data Manipulation – Dplyr*. – URL: <https://dplyr.tidyverse.org> (дата обращения: 03.04.2022).

7. CERNUDA C. *On the relevance of preprocessing in predictive maintenance for dynamic systems* // In: Lughofer E., Sayed-Mouchaweh M. (Eds.). *Predictive Maintenance in Dynamic Systems*. Cham, Springer. – 2019. – P. 53–93.
8. CHENG J.C., CHEN W., CHEN K., WANG Q. *Data-driven predictive maintenance planning framework for MEP components based on BIM and IoT using machine learning algorithms* // *Automation in Construction*. – 2020. – Vol. 112. – P. 1–21.
9. CHE-SHENG H., JEHN-RUEY J. *Remaining useful life estimation using long short-term memory deep learning* // *IEEE Int. Conf. on Applied System Invention (ICASI-2018)*, Chiba, Japan. – 2018. – P. 58–61.
10. CRAN – *Packages*. – URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/> (дата обращения: 03.04.2022).
11. *Forecast Package – RDocumentation*. – URL: <https://www.rdocumentation.org/packages/forecast> (дата обращения: 03.04.2022).
12. GOEBEL K., SAHA B., SAXENA A., CELAYA J.R., CHRISTOPHERSEN J.P. *Prognostics in battery health management* // *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*. – 2008. – Vol. 8. – P. 33–40.
13. HUANG Z.Y., XU Z.G., WANG W.H., SUN Y.X. *Remaining usefullife prediction for a nonlinear heterogeneous Wiener process model withan adaptive drift* // *IEEE Trans. Rel.* – June, 2015. – Vol. 64, No. 2. – P. 687–700.
14. *Identify and replace outliers in time series*. – URL: <https://pkg.robjhyndman.com/forecast/reference/tsoutliers.html> (дата обращения: 03.04.2022).
15. LEI Y., LIN., GONTARZ S., LIN J., RADKOWSKI S., DYBALA J. *A Model-Based Method for Remaining Useful Life Prediction of Machinery* // *IEEE Trans. on Reliability*. – 2017. – Vol. 65. – P. 1314–1326.
16. LI X., DING Q., SUN J. *Remaining useful life estimation in prognostics using deep convolution neural networks* // *Reliab. Eng. Syst. Saf.* – 2018. – Vol. 172. – P. 1–11.
17. LIU J., WANG W., MA F., YANG Y.B., YANG C.S. *A data-model-fusionprognostic framework for dynamic system state*

- forecasting* // Eng. Appl. Artif. Intell. – June, 2012. – Vol. 25, No. 4. – P. 814–823.
18. PATIL S., PATIL A., HANDIKHERKAR V., DESAI S., PHALLE V. M., KAZI F. S. *Remaining Useful Life (RUL) Prediction of Rolling Element Bearing Using Random Forest and Gradient Boosting Technique* // ASME 2018 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. – 2018. – P. 1–7.
 19. RAN Y., ZHOU X., LIN P., WEN Y., DENG R. *A Survey of Predictive Maintenance: Systems, Purposes and Approaches* // IEEE communications Surveys & Tutorials. – 2019. – P. 1–36.
 20. SHCHERBAKOV M.V. *A Survey of Forecast Error Measures* // World Applied Sciences Journal (WASJ). – 2013. – No. 24. – P. 171–176.
 21. XIONGZI C., JINSONG Y., DIYIN T. YINGXUN W. *Remaining useful life prognostic estimation for aircraft subsystems or components: A review* // 10th IEEE Int. Conf. on Electronic Measurement & Instruments (ICEMI). – 2011. – Vol. 2. – P. 94.
 22. YAN M., WANG X., WANG B., CHANG M., MUHAMMAD I. *Bearing remaining useful life prediction using support vector machine and hybrid degradation tracking model* // ISA Trans. – 2020. – Vol. 98. – P. 471–482.
 23. YU J. *Remaining useful life prediction for lithium-ion batteries using a quantum particle swarm optimization-based particle filter* // Quality Engineering. – 2017. – Vol 29. – P. 536–546.
 24. ZHANG Z., SI X., HU C., LEY Y. *Degradation data analysis and remaining useful life estimation: A review on Wiener-process-based methods* // European Journal of Operational Research. – 2018. – Vol. 271(3). – P. 775–796.

FORECASTING OF THE REMAINING USEFUL LIFE IN CONDITIONS OF SMALL DATA SAMPLE

Konstantin Zadiran, Volgograd state technical university, Volgograd, postgraduate student (konstantin.zadiran@gmail.com).

Maxim Shcherbakov, Volgograd state technical university, Volgograd, Doctor of Science, assistant professor (maxim.shcherbakov@vstu.ru).

Cuong Sai, Volgograd state technical university, Volgograd, Candidate of Science (svcuonghvktqs@gmail.com).

Abstract: In the article a method for forecasting the residual life of equipment using deep learning is proposed. The method is applicable in cases with a small amount of information about data failures, where existing classical methods may not provide the required accuracy. The process of maintaining the equipment in working condition is one of the most important processes in the operation of the equipment. At the same time, the maintenance process often suffers from inefficiency. Therefore, forecasting methods were developed, on the basis of which the concept of proactive maintenance process management was built, which allows optimizing the structure and costs of equipment management throughout the life cycle. However, these methods may show insufficient accuracy if there is not enough data to train them, for example, due to the rarity of equipment failures. To solve this problem, a new prediction method based on deep learning is proposed that can improve the prediction accuracy. In this method, the continuous prediction of the remaining service life over the entire interval is replaced by a model for generating signals containing the calculated prediction.

Keywords: machine learning, remaining useful life, proactive maintenance.

УДК 004.9

ББК 32.972

DOI: 10.25728/ubs.2023.102.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 20.07.2022.
Опубликована 31.03.2023.*