АЛГОРИТМ ПОИСКА ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ[1]

Котюков А. М.[2]
(*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)
Павлова Н. Г.[3]
(*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва; Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов*)

Статья посвящена методам исследования сложных систем, в частности, вопросу поиска точек совпадения двух отображений. Понятие точки совпадения отображений является обобщением понятия неподвижной точки отображения и, по определению, является точкой пересечения областей определения отображений, имеющей одинаковые образы. Понятие точки совпадения отображений используется в различных прикладных задачах системного анализа, обработки информации и искусственного интеллекта. Также оно применяется для решения различных экономических задач, в частности, задач распределения ресурсов, определения объемов производства и государственного регулирования цен. В настоящей работе теория точек совпадения применена к исследованию вопроса существования положения равновесия в рыночной системе. Положением равновесия называется состояние рынка, в котором спрос на каждый товар, присутствующий на рынке, равен его предложению. Разработан численный алгоритм поиска точки совпадения для накрывающего и липшицевого отображений. Работа алгоритма продемонстрирована при исследовании модельного примера рыночной системы, в которой отображения спроса и предложения восстановлены по соответствующим эластичностям. Для этой системы решается задача определения положения частичного равновесия – ситуации, при которой реализуется равновесие для некоторого подмножества товаров. Положение частичного равновесия рассмотрено как точка совпадения отображений спроса и предложения. С помощью алгоритма определено положение частичного равновесия по первому товару для рынка двух товаров.

Ключевые слова: сложная система, равновесие, накрывающее отображение, точка совпадения, эластичность.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект №20-11-20131). Лемма 2 получена Н.Г. Павловой при финансовой поддержке РНФ (проект №23-11-20020) в Тамбовском государственном университете им. Г.Р. Державина.*

[2] *Александр Михайлович Котюков, м.н.с. (amkotyukov@mail.ru).*

[3] *Наталья Геннадьевна Павлова, к.ф.-м.н., доцент (natasharussia@mail.ru).*

1. Введение

Нередко при моделировании тех или иных объектов и явлений возникает необходимость решения систем неявных алгебраических уравнений. С точки зрения анализа интересно прежде всего получить условия существования решения для таких систем. Если эти условия определены и выполнены, требуется найти решение этой системы и исследовать его свойства.

Известно значительное количество методов исследования систем неявных алгебраических уравнений, которые могут быть представлены в виде $\Psi(x) = \Phi(x)$, где $\Psi, \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Многие из них опираются на применение теоремы об обратной функции. Если рассмотреть систему неявных уравнений как систему $F(x) = 0$, где $F = \Psi - \Phi$, то существование решения вытекает из невырожденности матрицы Якоби отображения F. Однако часто в прикладных задачах отображение F не является сюръективным, более того матрица Якоби такого отображения может не быть квадратной. В этом случае применить теорему об обратной функции нельзя. Другие методы основаны на предположении о гладкости отображений Ψ и Φ, что также является сильным требованием, поскольку в моделях, построенных на статистических данных, отображения в лучшем случае являются кусочно-непрерывными. Третьи методы основаны на сведении системы неявных уравнений к решению системы линейных алгебраических уравнений. Существует множество способов решения таких систем, как аналитических, так и численных, однако они могут требовать большого количества вычислительных ресурсов при программной реализации. Таким образом, возникает необходимость создания методов исследования систем неявных алгебраических уравнений, которые были бы менее требовательны к рассматриваемым отображениям и вычислительным ресурсам и более просты в своей реализации.

Настоящая работа посвящена разработке методов исследования систем неявных алгебраических уравнений с помощью результатов теории накрывающих отображений и точек совпадения.

Разработка этих методов началась сравнительно недавно (см., например, [5, 6, 7, 8, 11]). Ключевой особенностью методов накрывающих отображений является отсутствие требований гладкости и сюръективности к исследуемым отображениям. В статье разработан алгоритм поиска точки совпадения, основанный на итерационном процессе из [1], который основан на методе простой итерации. Алгоритм является модификацией метода случайного поиска, который широко применяется для решения различных прикладных задач. Этот метод имеет два основных недостатка: определение области поиска новой точки на каждом шаге и условия перехода на следующий шаг. Как будет показано ниже, разработанный алгоритм компенсирует эти недостатки с помощью двух условий, одно из которых задает радиус поиска новой точки, а второе – условие перехода на новый шаг алгоритма.

Разработанные в настоящей статье методы могут быть применены для исследования различных систем. В качестве демонстрации такого применения была выбрана рыночная система. Основная проблема, решаемая при исследовании системы, – определение положение равновесия в этой системе. Перейдем к описанию сути этого понятия.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из рынка, производства и потребления. Подсистема производства состоит из производителей, которые создают товары и поставляют их на рынок с целью продажи и получения прибыли. Подсистема потребления состоит из потребителей, которые имеют бюджет и тратят его, приобретая товары на рынке с целью удовлетворения своих потребностей. Выходом подсистемы производства по каждому товару является количество произведенного и доставленного товара, которое называется предложением этого товара. Выходом подсистемы потребления по каждому товару является количество товара, которое потребители хотят приобрести. Это количество называется спросом на этот товар. Очевидно, что внутри моделируемого региона существует большое количество как товаров, так и участников системы в лице производителей и потребителей. Более того, возможна ситуация, в которой производитель может становится потребителем (например, при закупке сырья для производства) и наоборот (например, при продаже собственного имущества). В настоящей работе мы рассматриваем совокупных производителя и потребителя, поскольку нас будет интересовать подсистемы рынка, а не подсистемы производства и потребления.

Легко видеть, что если для какого-либо товара спрос превышает предложение, то на рынке возникает дефицит, что может привести к негативным последствиям внутри моделируемого региона. В зависимости от типа рынка это могут быть массовый голод, эпидемия, нехватка строительных ресурсов и т.д. Неблагоприятные факторы такого рода могут оказать сильное влияние на устойчивость и эффективное функционирование системы и привести к ее разрушению. Следовательно, для устойчивости системы необходимо, чтобы спрос на всякий товар на рынке не должен быть меньше его предложения.

С другой стороны, профицит товара, т.е. когда предложение товара превышает спрос на него, также может негативно влиять на моделируемый регион. Это происходит из-за того, что непроданный товар создает убытки для производителей, вследствие чего они могут поднять цены на товары с целью компенсировать свои потери. Повышение цен отрицательно сказывается на покупательской способности потребителей: они приобретают еще меньше товара, из-за чего производители терпят еще большие убытки. В конце концов это приводит к ситуации, при которой производители не могут продать произведенные товары, а потребители ничего не покупают.

Таким образом, для устойчивого развития моделируемого региона благоприятной будет ситуация, при которой спрос на каждый товар будет равен его предложению. Такая ситуация называется положением равновесия, а цены, при которых положения равновесия реализуется, – равновесными.

Мы рассмотрим модель рынка, в которой отображения спроса и предложения восстановлены по эластичностям спроса и предложения по цене соответственно. Эластичность спроса по цене показывает, как меняется спрос на товар при относительном изменении цены на этот или другой товар. Аналогично определяется эластичность предложения по цене. Условия существования положения равновесия для этой модели были получены в [4]. Доказательство соответствующей теоремы основано на применении принципа сжимающих отображений. Нас будет интересовать положение частичного равновесия. Под частичным равновесием понимается равновесие не для всех товаров на рынке, а для некоторого их подмножества. Определение положения частичного равновесия является важным вопросом наряду с положением равновесия, что обусловлено экономическими причинами. Так, например, если на рынке присутствуют товары первой необходимости, которые будут приобретаться независимо от цены, мы можем за счет цены на них достичь частичного равновесия на остальных товарах.

В данной работе положение равновесия рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения. С помощью аппарата теории накрывающих отображений получены условия существования положения частичного равновесия, а также проведен численный эксперимент по поиску положения равновесия в модели открытого рынка двух товаров.

2. Накрывающие отображения и точки совпадения

В дальнейшем нам потребуются результаты из теории накрывающих отображений и точек совпадения. Сначала сформулируем определение накрывающего отображения.

Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Пусть задано отображение $\Psi : X \to Y$. Через $B_X(x, r)$ обозначим шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$, аналогично обозначим $B_Y(y, r)$.

Определение 1 [2]. *Пусть $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется α-накрывающим, если*

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r), \ \ \forall x \in X, \ r > 0.$$

Очевидно, что если отображение Ψ является α-накрывающим, то оно является α'-накрывающим при любом

$0 < \alpha' < \alpha$. Точную верхнюю грань всех $\alpha > 0$ таких, что отображение Ψ является α-накрывающим, обозначим через $\operatorname{cov}(\Psi)$.

Пусть теперь $M \subseteq X$ – множество с непустой внутренностью.

<u>*Определение* 2 [10].</u> *Пусть* $\alpha > 0$. *Отображение* Ψ *называется* α*-накрывающим на множестве* $M \subseteq X$, *если для любых* $x \in M$, $r > 0$ *таких, что* $B_X(x, r) \subseteq M$, *выполнено включение*

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha > 0$, что отображение Ψ является α-накрывающим на множестве M, обозначим через $\operatorname{cov}(\Psi|M)$.

<u>*Определение* 3 [10].</u> *Пусть* $\alpha > 0$. *Отображение* Ψ *называется* α*-накрывающим в точке* $x \in \operatorname{int} M$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta \in (0, \varepsilon)$ *такое, что* $B_X(x, \delta) \subset M$ *и*

$$\Psi(B_X(x, \delta)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha\delta).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha > 0$, что отображение Ψ является α-накрывающим в точке $x \in X$, обозначим через $\operatorname{cov}(\Psi|x)$.

В [10] было также показано, что если X, Y – банаховы пространства, а $\Psi : X \to Y$ строго дифференцируемо в каждой точке открытого множества $M \subset X$ и $\Psi'(x)$ является α-накрывающим в каждой точке $x \in M$ с общей константой $\alpha > 0$, то отображение Ψ является α'-накрывающим на M с любой константой $\alpha' < \alpha$, т.е.

$$\operatorname{cov}(\Psi|M) = \inf_{x \in \operatorname{int} M} \operatorname{cov}(\Psi|x). \tag{1}$$

В случае, когда отображение Ψ является линейным сюръективным оператором из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, справедлива следующая лемма.

<u>***Лемма* 1** [3].</u> *Пусть* $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k$ – *нормированные пространства, а* $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – *сюръективный линейный оператор. Тогда*

$$\operatorname{cov}(\Psi) \geqslant \frac{1}{\|\Psi^*(\Psi\Psi^*)^{-1}\|}, \tag{2}$$

где Ψ^* – *оператор, сопряженный к* Ψ.

Здесь и далее норма произвольного линейного оператора $Q : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ определена формулой: $\|Q\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Qx\|_Y$.

Определение 4 [2]. *Точка $\xi \in X$ называется точкой совпадения отображения Ψ и некоторого отображения $\Phi : X \to Y$, если*

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi).$$

Сформулируем условия, гарантирующие существование точки совпадения для α-накрывающего на множестве M отображения и отображения, удовлетворяющего на M условию Липшица. Соответствующая теорема доказана в [10].

Теорема 1 [10]. *Пусть пространство X полное и заданы $\alpha > 0$, $x_0 \in X$ и $R > 0$. Пусть также $\Psi : X \to Y$ является α-накрывающим на $B_X(x, R)$ и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного $\beta < \alpha$ и любого отображения $\Phi : B_X(x_0, R) \to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что*

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leqslant (\alpha - \beta)R,$$

для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi \in X$, т.е. $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_X(x_0, \xi) \leqslant \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

При доказательстве используется следующий итерационный процесс. Зафиксируем $x_0 \in X$ и построим по индукции x_i, $i = 1, 2, ...$, такие, что

$$\rho_X(x_{i+1}, x_i) \leqslant \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)), \tag{3}$$

$$\rho_Y(\Psi(x_{i+1}), \Phi(x_i)) \leqslant \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)), \tag{4}$$

где

$$\delta > 0 : \beta + \alpha\delta < \alpha. \tag{5}$$

Существование данной последовательности вытекает из того, что отображение Ψ является α-накрывающим.

Теорема о сходимости итерационного процесса доказана в [1].

Теорема 2 [1]. *Пусть пространство X полное, отображение Ψ является α-накрывающим и его график $\mathrm{gph}(\Psi) = \{(x, y) \in X \times Y : y = \Psi(x)\}$ замкнут, а отображение Φ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$.*

Тогда для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $\{x_i\}$, которая удовлетворяет условиям (3), (4) *при всех i, и любая такая последовательность сходится к некоторой точке совпадения $\xi = \xi(x_0)$, для которой справедливо неравенство*

$$\rho_Y(\xi, x_0) \leqslant (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

3. Основной результат

Используя метод доказательства теоремы 1, мы можем доказать следующий результат.

Теорема 3. [о сходимости итерационного процесса]. *Пусть пространство X полно и заданы $x_0 \in X$, $R > 0$. Далее, пусть отображение Ψ является α-накрывающим на $B_X(x_0, R)$ и замкнутым, а отображение Φ удовлетворяет условию Липшица на $B_X(x_0, R)$ с константой $\beta < \alpha$. Тогда для любого $\delta > 0$ такого, что $\beta + \alpha\delta < \alpha$,*

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) < (\alpha - (\beta + \alpha\delta))R$$

и для любых $k > 0$ и набора векторов $x_1, ..., x_k \in B_X(x_0, R)$, удовлетворяющих (3), (4), *найдется вектор $x_{k+1} \in B_X(x_0, R)$, удовлетворяющий* (3), (4), *и любая такая последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке совпадения ξ, т.е.*

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi), \tag{6}$$

причем

$$\rho_X(x_0, \xi) \leqslant (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)). \tag{7}$$

Доказательство. Доказательство проводится путем индуктивного построения последовательности, удовлетворяющей (3), (4). Докажем сначала, что существует x_1, удовлетворяющий (3), (4). Положим

$$r_0 = \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leqslant \alpha^{-1}(\alpha - (\beta + \alpha\delta))R \leqslant R.$$

Следовательно, $B_X(x_0, r_0) \subseteq B_X(x_0, R)$. Далее, в силу определения накрывающего отображения на множестве:

$$\Psi(B_X(x_0, r_0)) \supseteq B_Y(\Psi(x_0), \alpha r_0).$$

Отсюда мы получаем, что $\Phi(x_0) \in \Psi(B_X(x_0, r_0))$. Следовательно, существует $x_1 \in B_X(x_0, r_0)$ такое, что

$$\Psi(x_1) = \Phi(x_0).$$

Пусть теперь $x_1 \in B_X(x_0, R)$ такой, что выполнено (3), (4) при $i = 0$. Покажем, что $x_1 \in B_X(x_0, r_0)$. Положим

$$r_1 = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right) r_0.$$

Покажем, что $B_X(x_1, r_1) \subset B_X(x_0, R)$. В самом деле, для любого $x \in B_X(x_1, r_1)$ имеем

$$\rho_X(x_0, x) \leqslant \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x) \leqslant \delta\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + r_1 =$$
$$= \delta r_0 + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right) r_0 \leqslant (\alpha^{-1}(\alpha - (\beta + \alpha\delta))R) \left(1 + \delta + \frac{\beta}{\alpha}\right) =$$
$$= R\left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) \leqslant R.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\delta < 1$ в силу условия $\beta + \alpha\delta < \alpha$. Теперь покажем, что $\Phi(x_1) \in \Psi(B_X(x_1, r_1))$. Действительно,

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Psi(x_1)) \leqslant \rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_0)) + \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_1)) \leqslant$$
$$\leqslant \beta\rho_X(x_1, x_0) + \delta\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha} + \delta\right) \alpha r_0 = \alpha r_1.$$

Следовательно, $\Phi(x_1) \in B_Y(\Psi(x_1), \alpha r_1)$. Поскольку Ψ является α-накрывающим на $B_X(x_0, R)$, имеем:

$$\Psi(B_X(x_1, r_1)) \supseteq B_Y(\Psi(x_1), \alpha r_1).$$

Отсюда следует, что существует $x_2 \in B_X(x_1, r_1)$ такой, что $\Psi(x_2) = x_1$.

Далее, возьмем $x_2 \in B_X(x_0, R)$, которое удовлетворяет (3), (4) при $i = 2$. Положим

$$r_2 = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right) r_1.$$

Покажем, что $B_X(x_2, r_2) \subseteq B_X(x_0, R)$. В самом деле, если $x \in B_X(x_2, r_2)$, то

$$\rho_X(x_0, x) \leqslant \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x_2) + \rho_X(x_2, x) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + \alpha^{-1}\rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) + r_2 =$$
$$= r_0 + r_1 + r_2 = \left(1 + \delta + \frac{\beta}{\alpha} + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right) r_0 \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)^{-1} r_0 \leqslant R.$$

Теперь покажем, что $\Phi(x_2) \in \Psi(B_X(x_2, r_2))$. Действительно,

$$\rho_Y(\Phi(x_2), \Psi(x_2)) \leqslant \rho_Y(\Phi(x_2), \Phi(x_1)) + \rho_Y(\Phi(x_1), \Psi(x_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \beta\rho_X(x_2, x_1) + \delta\rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) \leqslant \alpha^{-1}\beta\rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) +$$
$$+ \delta\rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right) \alpha r_1 = \alpha r_2.$$

Таким образом, $\Phi(x_2) \in B_Y(\Psi(x_2), \alpha r_2)$. Поскольку Ψ является α-накрывающим на $B_X(x_0, R)$, имеем

$$B_Y(\Psi(x_2), \alpha r_2) \subseteq \Psi(B_X(x_2, r_2)).$$

Таким образом, $\Phi(x_2) \in \Psi(B_X(x_2, r_2))$ и, следовательно, существует $x_3 \in B_X(x_2, r_2)$ такой, что

$$\Psi(x_3) = \Phi(x_2).$$

Далее, пусть построены $x_1, ..., x_{k-1}$. Возьмем x_k, удовлетворяющее (3), (4), и положим

$$r_k = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right) r_{k-1}.$$

Покажем, что $B_X(x_k, r_k) \subseteq B_X(x_0, R)$. Действительно, если $x \in B_X(x_k, r_k)$, то:

$$\rho_X(x_0, x) \leqslant \rho_X(x_0, x_1) + ... + \rho_X(x_{k-1}, x_k) + \rho_X(x_k, x) \leqslant$$
$$\leqslant r_0 + r_1 + ... + r_{k-1} + r_k = \left(1 + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + ...\right. \tag{8}$$
$$\left. ... + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)^k\right) r_0 \leqslant \left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)^{-1} r_0 \leqslant R.$$

Теперь покажем, что $\Phi(x_k) \in \Psi(B_X(x_k, r_k))$. В самом деле,

$$\begin{gathered}\rho_Y(\Phi(x_k), \Psi(x_k)) \leqslant \\ \leqslant \rho_Y(\Phi(x_k), \Phi(x_{k-1})) + \rho_Y(\Phi(x_{k-1}), \Psi(x_k)) \leqslant \\ \leqslant \beta\rho_X(x_k, x_{k-1}) + \delta\rho_Y(\Phi(x_{k-1}), \Psi(x_{k-1})) \leqslant \\ \leqslant \beta\alpha^{-1}\rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_k)) + \delta\rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_{k-1})) = \\ = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)\rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_{k-1})) \leqslant \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right) r_{k-1} \leqslant \alpha r_k.\end{gathered}$$

Таким образом, $\Phi(x_k) \in B_Y(\Psi(x_k), \alpha r_k)$. Поскольку Ψ является α-накрывающим на $B_X(x_0, R)$, то $B_Y(\Psi(x_k), \alpha r_k) \subseteq \subseteq \Psi(B_X(x_k, r_k))$. Отсюда следует, что существует $x_{k+1} \in B_X(x_0, R)$ такой, что $\Psi(x_{k+1}) = \Phi(x_k)$. Продолжая процесс по индукции, мы получаем необходимую последовательность $\{x_k\}$. Из (4) мы получаем, что построенная последовательность является фундаментальной. В самом деле,

$$\begin{gathered}\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) \leqslant \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_{i-1})) + \rho_Y(\Phi(x_{i-1}), \Phi(x_i)) \leqslant \\ \leqslant \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_{i-1})) + \beta\rho_X(x_i, x_{i-1}) \leqslant \\ \leqslant \delta\rho_Y(\Psi(x_{i-1}), \Phi(x_{i-1})) + \beta\rho_X(x_i, x_{i-1}) \leqslant \\ \leqslant \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)\rho_Y(\Psi(x_{i-1}), \Phi(x_{i-1})).\end{gathered}$$

Отсюда

$$\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) \leqslant \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)^i \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \ \forall i.$$

В силу (3) мы получаем, что

$$\rho_X(x_i, x_0) \leqslant \frac{\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))}{\alpha} \leqslant \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha}\right)^i \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha}.$$

Наконец, поскольку $\delta + \beta/\alpha < 1$, мы получаем, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной и

$$\rho_X(x_i, x_0) \leqslant (\alpha - (\alpha\delta + \beta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Так как пространство X полное, $\{x_k\}$ сходится к точке $\xi \in B_X(x_0, R)$. Используя непрерывность отображения Φ и замкнутость отображения Ψ, мы переходим к пределу и получаем (6) и (7). Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем рассматривать отображения Ψ и Φ, действующие из $B_X(x^0, r)$, где $r > 0$. Для того чтобы воспользоваться теоремами 1 и 2, нам необходимо, чтобы эти отображения действовали в одно и то же метрическое пространство. Чтобы добиться этого, нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и существует* $R > 0$*:*

(9) $$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leqslant (\alpha - \beta)R.$$

Тогда $\Phi(B_X(x_0, R)) \subseteq \Psi(B_X(x_0, R))$.

Доказательство. Пусть $x \in B(x_0, R)$. Тогда

$$\rho_Y(\Phi(x), \Psi(x_0)) \leqslant \rho_Y(\Phi(x), \Phi(x_0)) + \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0)) \leqslant$$

$$\leqslant \beta\rho_X(x, x_0) + (\alpha - \beta)R \leqslant \beta R + (\alpha - \beta)R = \alpha R.$$

Следовательно, $\Phi(x) \in \Psi(B(x_0, R))$, и отсюда в силу произвольности выбора точки x имеем $\Phi(B_X(x_0, R)) \subseteq \Psi(B_X(x_0, R))$. Лемма доказана.

4. Алгоритм поиска точки совпадения двух отображений

На основе доказанной теоремы разработан алгоритм, позволяющий численно найти точку совпадения двух отображений. Итак, пусть даны метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно, отображения $\Psi, \Phi : X \to Y$, начальная точка $x_0 \in X$ и известны константа накрывания α отображения Ψ и константа Липшица β отображения Φ.

Шаг 1. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения. Определить $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса. Положить номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $\rho_Y(\Psi(x_k), \Phi(x_k)) < \varepsilon$. Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 3. Произвольным образом вычислить точку $\tilde{x}$, удовлетворяющую условию

(10) $$\rho_X(\tilde{x}, x_k) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(\Psi(x_k), \Phi(x_k)).$$

Шаг 4. Проверить выполнение условия

$$\rho_Y(\Psi(\tilde{x}), \Phi(x_k)) \leqslant \delta \rho_Y(\Psi(x_k), \Phi(x_k)). \tag{11}$$

Если условие выполнено, то перейти к шагу 5. Если нет, перейти к шагу 3.

Шаг 5. Положить $x_{k+1} = \tilde{x}$, увеличить k на единицу и перейти к шагу 1.

Данный алгоритм будет применен для поиска положения равновесия в рыночной системе. Перейдем к описанию этой системы.

5. Положение частичного равновесия в модели открытого рынка

5.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ОТКРЫТОГО РЫНКА

Пусть на рынке присутствуют $n \in \mathbb{N}$ товаров, цены на которые описываются вектором $p \in \mathbb{R}^n_+, p = (p_1, ..., p_n)$, и существуют такие векторы $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n_+$, $c_1 = (c_{11}, ..., c_{1n})$, $c_2 = (c_{21}, ..., c_{2n})$, что

$$c_{1i} < c_{2i},\ p_i \in [c_{1i}, c_{2i}],\ i = \overline{1, n}.$$

Обозначим $\tilde{c} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ и $P = [c_{11}, c_{21}] \times \cdots \times [c_{1n}, c_{2n}]$. Рассмотрим отображения спроса

$$D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+,\ D(p) = (D_1(p), ..., D_n(p))$$

и предложения

$$S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+,\ S(p) = (S_1(p), ..., S_n(p)).$$

Эти отображения в будущем будут иметь специальный вид.

Предположим, что при некоторых ценах $p^* \in P$ нам известны значения спроса и предложения

$$D^* = D(p^*) = (D^*_1, ..., D^*_n), \tag{12}$$

$$S^* = S(p^*) = (S^*_1, ..., S^*_n). \tag{13}$$

Пусть также известны матрица $\mathcal{E} = (E_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, где E_{ij} – эластичность спроса на i-й товар по цене на j-й товар, которая удовлетворяет равенству

$$E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) \frac{p_j}{D_i(p)},\ \ i, j = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Аналогично определим матрицу $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, элементы которой удовлетворяют равенству

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p)\frac{p_j}{S_i(p)}, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Пусть также известен вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_n)$ такой, что $a_i \geqslant 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ – вектор импорта. a_i является количеством i-го товара, который импортируется на рынок. Мы предполагаем, что существует $i : a_i > 0$.

Определение 5. *Моделью открытого рынка назовем следующий набор*

$$\sigma_o = (a, c_1, c_2, p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}).$$

В [9] была доказана следующая теорема.

Теорема 4 [9]**.** *Параметры модели σ_o однозначно определяют отображения*

$$D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+, \quad S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+ \tag{16}$$

по формулам

$$D_i(p_1, ..., p_n) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{17}$$

$$S_i(p_1, ..., p_n) = S_i^* \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{18}$$

5.2. ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Теперь дадим определение положения равновесия в модели σ_o.

Определение 6. *Вектор $p^0 \in P$ называется вектором равновесных цен (или положением равновесия) в модели $\sigma_o \in \Sigma_o$, если*

$$S(p^0) + a = D(p^0). \tag{19}$$

Определение 7. *Положением частичного равновесия в модели σ_o назовем такой вектор $p^0 \in P$, что*

$$S_i(p^0) + a_i = D_i(p^0), \quad i = \overline{1,m},$$

где $m < n$.

***Замечание* 1.** Здесь мы рассматриваем новые отображения

$$\tilde{S}, \tilde{D} : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m_+,\ \tilde{S} = P \circ S,\ \tilde{D} = P \circ D,$$

где $P : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m_+$ – оператор проектирования из $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^m_+$, определяемый следующей формулой:

$$P = \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times n-m} \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица. Легко видеть, что отображение $\tilde{S}$ (как и $\tilde{D}$) не является биективным, и поэтому применить принцип сжимающих отображений нельзя. Однако мы можем свести задачу поиска положения частичного равновесия в модели σ_o к задаче поиска точки совпадения отображений $\tilde{S}$ и $\tilde{D}$. В дальнейшем для удобства мы будем использовать старые обозначения через S и D соответственно.

Задача состоит в том, чтобы определить условия, при которых положение частичного равновесия в модели σ_o существует.

5.3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Введем обозначения:

$$\hat{\alpha}(\sigma_o) = \min_{p\in P} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^* \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^*\right)^{-1} \right\|^{-1}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,m}} D_i^* \left(\prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}}\right) \times \\ \times \sum_{k=1}^{n} |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \max_{l=1,2} \left\{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \right\} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \max_{l=1,2} c_{lj}^{E_{ij}},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\hat{\gamma}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,m}} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|. \tag{22}$$

Теорема 5. *Пусть параметры модели σ_o удовлетворяют условиям:*

1) $\det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^* \neq 0$*;*

2) $\hat{\gamma}(\sigma_o) < \hat{\alpha}(\sigma_o) - \hat{\beta}(\sigma_o)$.

Тогда в модели σ_o существует положение частичного равновесия $p^0 \in \operatorname{int} P$.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим две нормы:

(23) $$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2|x_i|}{c_{2i} - c_{1i}}, \ x = (x_1, ..., x_n);$$

(24) $$\|y\|_2 = \max_{i=\overline{1,n}} |y_i|, \ y = (y_1, ..., y_n).$$

Рассмотрим пространства $X = (X, \rho_X)$ и $Y = (Y, \rho_Y)$, где $X = \mathbb{R}^n_+$, $Y = \mathbb{R}^m_+$, а метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами, определенными в (23), (24) соответственно. Сначала оценим $\operatorname{lip}(D|P)$. Обозначим $\mathcal{K}_i = \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}}$ Из равенства

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \frac{E_{ij} D_i(p)}{p_j}$$

мы получаем

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\| = \max_{\|x\|_1=1} \left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)x\right\|_2 = \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,m}} \left|\sum_{k=1}^n \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) x_k\right| =$$

$$= \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,m}} \left|\sum_{k=1}^n E_{ik} \frac{D_i(p)}{p_k} x_k\right| =$$

$$= \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,m}} \left|\sum_{k=1}^n E_{ik} \frac{D_i^*}{p_k} x_k \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{D_i^*}{p_k} |x_k| \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=\overline{1,m}} D_i^* \sum_{j=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=\overline{1,m}} D_i^* \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \mathcal{K}_i \max_{l=1,2} \left\{c_{lk}^{E_{ik}-1}\right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n p_j^{E_{ij}} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=\overline{1,m}} D_i^* \mathcal{K}_i \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \max_{l=1,2} \left\{c_{lk}^{E_{ik}-1}\right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n \max_{l=1,2} c_{lj}^{E_{ij}} = \hat{\beta}(\sigma_o).$$

∎

Таким образом,

$$\operatorname{lip}(D|P) = \max_{p \in P} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| \leqslant \hat{\beta}(\sigma_o).$$

Теперь перейдем к оценке величины $\operatorname{cov}(S|P)$. Из [10] известно, что

$$\operatorname{cov}(S|P) = \min_{p \in P} \operatorname{cov}\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right).$$

Кроме того, в силу леммы 1 мы имеем

$$\operatorname{cov}\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \geqslant \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \right)^{-1} \right\|^{-1} = \tilde{\alpha}(p),$$

где $\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^*$ – оператор, сопряженный к $\frac{\partial S}{\partial p}(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. В силу условия 5 норма в последнем выражении конечна.

Следовательно,

$$\operatorname{cov}(S|P) = \min_{p \in P} \operatorname{cov}(S|p) \geqslant \min_{p \in P} \operatorname{cov}\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \geqslant \min_{p \in P} \tilde{\alpha}(p) = \hat{\alpha}(\sigma_o).$$

В силу условия 5, леммы 2 и неравенств

$$\operatorname{cov}(S|P) \geqslant \hat{\alpha}(\sigma_o), \operatorname{lip}(D|P) \leqslant \hat{\beta}(\sigma_o)$$

следует, что существуют такие α, β, что $\hat{\gamma}(\sigma_o) < \alpha - \beta$, отображение S является α-накрывающим на P, а отображение D удовлетворяет условию Липшица на P с константой β. Поскольку P – полное метрическое пространство, то по теореме 1 существует вектор $p^0 \in \operatorname{int} P$ такой, что

$$S(p^0) + a = D(p^0).$$

Более того, в силу условия 5 мы получаем, что $p^0 \in \operatorname{int} P$, так как в силу теоремы 1

$$\rho_X(p^0, \tilde{c}) \leqslant \frac{\rho_Y(S(\tilde{c}), D(\tilde{c}))}{\alpha - \beta} < 1.$$

Теорема доказана.

6. Численный эксперимент

В модели открытого рынка мы можем определить радиус поиска, вместо того чтобы проверять условие (10). Действительно, поскольку отображения спроса и предложения определены на пространстве $\mathbb{R}^n$, новую точку можно выразить через старую с помощью формулы $x_{k+1} = x_k + h_k$, где $h_k = (h_{k1}, ..., h_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ – пока неизвестный вектор. Тогда

$$\rho_X(x_k, x_{k+1}) = \|x_k - (x_k + h_k)\|_n = \|h_k\|_n.$$

Следовательно,

$$\|h_k\|_n \leqslant \frac{\rho_Y(\Psi(x_k), \Phi(x_k))}{\alpha} = \frac{\|\Psi(x_k) - \Phi(x_k)\|_m}{\alpha}.$$

В силу формул (23) и (24) имеем

$$\max_{i=\overline{1,n}} \frac{2|h_{ki}|}{c_{2i} - c_{1i}} \leqslant \alpha^{-1} \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(x_k) + a_i - D_i(x_k)|.$$

Отсюда мы получаем формулу, определяющую радиус поиска новой точки:

$$|h_{ki}| = \frac{c_{2i} - c_{1i}}{2\alpha} \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(x_k) + a_i - D_i(x_k)|. \tag{25}$$

Алгоритм поиска положения частичного равновесия в модели открытого рынка выглядит следующим образом.

Шаг 0. Вычислить константы α и β по формулам (20), (21).

Шаг 1. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения, $p_0 \in P$ – начальное приближение, $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса, положить номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $\rho_Y(S(p_k)+ +a, D(p_k)) < \varepsilon$, где D и S определены формулами (17), (18) с учетом замечания 1. Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 3. Используя приближение p_k, вычислить радиус поиска h_k по формуле (25).

Шаг 4. Произвольным образом вычислить точку $\tilde{p}$, удовлетворяющую условию $\rho_X(p_k, \tilde{p}) \leqslant h_k$.

Шаг 5. Проверить выполнение условия

$$\rho_Y(S(\tilde{p}) + a, D(p_k)) \leqslant \delta \rho_Y(S(p_k) + a, D(p_k)). \tag{26}$$

для полученной точки $\tilde{p}$. Если условие выполнено, то перейти к шагу 6. Если нет, перейти к шагу 4.

Шаг 6. Положить $p_{k+1} = \tilde{p}$, увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

7. Модельный пример

Рассмотрим следующую модель из σ_o (здесь опущены параметры модели, которые не используются при исследовании вопроса о частичном равновесии):

$$a = 27{,}5,\ c_1 = (61{,}91,\ 43{,}75)^\top,\ c_2 = (143{,}62,\ 75{,}40)^\top,$$
$$p^* = (69{,}59,\ 43{,}93)^\top,\ S^* = 34{,}17,\ D^* = 71{,}41,$$
$$\mathcal{E} = (0{,}14,\ 0{,}53)^\top,\ \tilde{\mathcal{E}} = (0{,}63,\ 0{,}93)^\top.$$

Проверим выполнение условий теоремы 5 для этой модели:

$$\bar{\alpha}(\sigma_o) = 55{,}44490,$$
$$\bar{\beta}(\sigma_o) = 23{,}76032,$$
$$\bar{\gamma}(\sigma_o) = 3{,}1412564215777223.$$

Более того, условие 1) также выполнено, поскольку

$$\det\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^* \approx 1{,}41 \neq 0.$$

Таким образом, условия теоремы 5 выполнены и в модели σ_o существует положение равновесия. Положим $\varepsilon = 0{,}0001$. С экономической точки зрения наш выбор обусловливается тем, что на товарных рынках цены, отличающиеся меньше чем на $0{,}001$ расчетной валюты, считаются равными, и такая погрешность является достаточно низкой.

Для поиска положения равновесия необходимо решить следующее уравнение:

$$\frac{34{,}17}{69{,}59^{0{,}63}43{,}93^{0{,}93}}p_1^{0{,}63}p_2^{0{,}93} + 27{,}5 = \frac{71{,}41}{69{,}59^{0{,}14}43{,}93^{0{,}53}}p_1^{0{,}14}p_2^{0{,}53}.$$

Результаты работы алгоритма представлены в таблице 7.

Таким образом, положение частичного равновесия по первому товару достигается при ценах $p^0 = (113{,}75474;\ 62{,}90146)$.

Таблица 1. Результаты работы алгоритма поиска

Итерация	p^{kT}	$\rho_Y(S(p^k)+a, D(p^k))$
1	(71,17413; 47,37823)	5,41649
5	(98,13107; 56,67820)	2,60855
10	(109,88172; 61,29676)	0,65167
15	(112,61622; 62,48339)	0,19734
20	(113,49145; 62,79764)	0,05652
25	(113,67713; 62,87628)	0,01487
30	(113,73544; 62,89466)	0,00363
35	(113,75160; 62,89979)	0,00082
40	(113,75403; 62,90126)	0,00021
41	(113,75437; 62,90135)	0,00014
42	(113,75459; 62,90141)	0,00011
43	(113,75474; 62,90146)	0,00008

8. Заключение

Разработанный алгоритм поиска точек совпадения двух отображений может быть использован для решения большого количества прикладных задач, связанных с решением системы неявных алгебраических уравнений. Этот алгоритм является относительно простым в программной реализации и, помимо этого, не требовательным ко входным данным модели, что позволяет применять его для исследования широкого круга вопросов. Трудность применения данного алгоритма может состоять в оценке констант накрывания и Липшица для рассматриваемых отображений, однако часто эта трудность устраняется путем аналитического исследования модели и получения констант в формульном выражении, как это было сделано в настоящей работе.

Литература

1. АРУТЮНОВ А.В. *Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, №11. – С. 1947–1950.
2. АРУТЮНОВ А.В. *Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки* // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416, №2. – С. 151–155.

3. АРУТЮНОВ А.В., ЖУКОВСКИЙ С.Е. *Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции* // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, №4. – С. 452–463.
4. АРУТЮНОВ А.В., КОТЮКОВ А.М., ПАВЛОВА Н.Г. *Equilibrium in Market Models with Known Elasticities* // Advances in Systems Science and Applications. – 2021. – Vol. 24, №4. – P. 130–144.
5. АРУТЮНОВ А.В., ПАВЛОВА Н.Г., ШАНАНИН А.А. *Равновесные цены в одной модели экономического равновесия* // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28, №3. – С. 3–22.
6. АРУТЮНОВ А.В., ЖУКОВСКИЙ С.Е., ПАВЛОВА Н.Г. *Равновесные цены как точка совпадения двух отображений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, №2. – С. 225–237.
7. ЖУКОВСКИЙ С.Е. *О накрываемости линейных операторов на полиэдральных множествах* // Изв. вузов. Матем. – 2016. – №9. – С. 74–77.
8. КОТЮКОВ А.М. *Итерационный процесс поиска точек совпадения в модели «спрос-предложение»* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2022. – Т. 207. – С. 68–76.
9. КОТЮКОВ А.М., ПАВЛОВА Н.Г. *Устойчивость и неединственность положения равновесия в модели открытого рынка* // Труды 15-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD’2022). – 2022. – С. 665–668.
10. ARUTYUNOV A., AVAKOV E., GEL’MAN B., DMITRUK A. et al. *Locally covering maps in metric spaces and coincidence points* // J. Fixed Points Theory and Applications. – 2009. – Vol. 5, №1. – P. 5–16.
11. KOTYUKOV A.M., PAVLOVA N.G. *Nonuniqueness of Equilibrium in Closed Market Model* // Advances in Systems Science and Applications. – 2023. – 23(2). – P. 184–194.

COINDIDENCE POINT SEARCH ALGORITHM IN COMPLEX SYSTEMS

Alexander Kotyukov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher (amkotyukov@mail.ru).
Natal'ya Pavlova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; RUDN University, Moscow; G.R. Derzhavin Tambov State University, Tambov; PhD, assistant professor (natasharussia@mail.ru).

Abstract: The paper is dedicated to complex systems analysis, in particular, the question of searching a coincidence point for two mappings. A coincidence point is a point at which the image of one mapping coincides with the one of another mapping at this point. This notion is a generalization of fixed point concept. It can be applied to information processing, artificial intellect and system analysis. Besides, this concept may be applied in economical problems such as resourse management, production volume calculation and price regulation. In this paper coincidence points theory is applied to the question of equilibrium in market system. An equilibrium is a state at which the supply of all goods on the market equals to thier demand. We developed a search algorithm of coincidence point for covering and Lipschitz-continuous mappings. The work of this algorithm is demonstrated on open market model. In this model supply and demand mappings are restored by their price elasticities. Elasticity is a measure of change for one variable under the change of another. We consider partical equilibrium in this model. It is a state at which supply equals demand for some subset of goods, not all of them. Equilibrium is conisedered as a coincidence point of supply and demand mappings. We complement the results with the example of partial equilibrium in the model of two goods.

Keywords: complex system, equilibrium, covering map, coincidence point, elastisity.

УДК 519.6
ББК 22.193
DOI: 10.25728/ubs.2024.107.01

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.

*Поступила в редакцию 02.01.2024.
Дата опубликования 31.01.2021.*