УДК 681.5.037
ББК 22.311

МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ СТАЦИОНАРИЗАЦИИ И ОЦЕНКА РОБАСТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Чечурин Л. С. [1]
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург)

В статье решаются задачи оценки устойчивости линейных нестационарных систем управления на различных классах неопределенностей в описании. Оценки получены на основе метода гармонической стационаризации, позволяющего строить передаточные функции нестационарных элементов в одночастотном гармоническом приближении.

Ключевые слова: частотный анализ, стационаризация, робастность нестационарных систем

Введение

Развитие аналитических методов исследования периодических процессов в сложных системах, описываемых нестационарными и нелинейными дифференциальными уравнениями, составляло и составляет значительную часть трудов отечественных и зарубежных теоретиков. Помимо математических методов анализа периодических решений дифференциальных уравнений и теории устойчивости, методов математической физики, определенный набор инструментов в теорию колебаний привнесло представление системы как контура с обратной связью – основного понятия теории автоматического управления. Пионерской

---

[1] *Леонид Сергеевич Чечурин, кандидат технических наук, зав. кафедрой (cepreu4@gmail.com).*

работой в этом смысле принято считать статью А. И. Лурье и В. И. Постникова [1], после чего выделение нелинейного или нестационарного элемента в обратную связь получило название «форма А. И. Лурье». Широко известны последовавшие выдающиеся результаты по частотному анализу устойчивости нелинейных систем В. Д. Якубовича [2] (Лемма Якубовича-Калмана) и ряд современных работ этой научной школы: Г. А. Леонова, А. Л. Фрадкова, М. М. Шумфарова, А. Х. Гелига и других [3-4].

Введенное в 80-е годы в теории автоматического управления понятие робастности и предложенный в 90-е аппарат ее анализа позволил поставить и решить ряд имеющих важность задач проектирования надежных систем и в теории колебаний. Укажем здесь, в частности, на концепцию пассивности и работы Ван-дер-Шафта [5] и Исидори [6].

Перечисленные направления, школы и результаты составляют изрядную, но далеко не полную картину исследований в области анализа робастности нестационарных и нелинейных колебаний, использующих, в том числе, и формализм теории автоматического управления.

Под робастностью какого-либо показателя качества системы с неопределенностью обычно понимают его свойство изменяться в приемлемом диапазоне при любой реализации неопределенности из указанного класса [7]. Неопределенными, но лежащими внутри определенных границ, могут быть некоторые параметры системы, структура системы или действующие на нее возмущения. Под показателем качества далее будет пониматься устойчивость, таким образом, робастность означает устойчивость на классе неопределенностей в описании нестационарной системы.

Отличительная особенность кратко обсужденных выше подходов заключается в использовании математически насыщенного аппарата. В статье ставится задача привести простой способ оценки в первом частотном приближении робастности периодически нестационарных систем. Он основан на методе стационаризации, разработанном С. Л. Чечуриным [8] и имеющем уже достаточную историю применения. Способ позволяет строить «запретную область» для годографа стационарной части робастной системы.

Так как в последнее время как представление метода стационаризации, так и решаемые с его помощью задачи получили существенное обобщение [9], первая часть статьи посвящена краткому изложению сути подхода. Вторая существенно дополняет и развивает намеченную в [10] методику применения стационаризации для приближенного нахождения областей устойчивости нестационарных систем управления.

1. Метод гармонической стационаризации

Рассмотрим колебания в линейной нестационарной системе, представленной на рис. 1 в виде замкнутого контура с нестационарным элементом в обратной связи, где $W(p)$ – передаточная функция стационарной части, $a(t)$ – периодический параметр (смысл явного выделения сдвига во времени τ в колебаниях параметра и выхода системы $x(t)$ будет пояснен чуть позже).

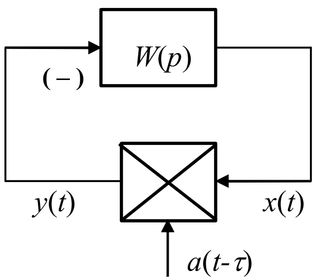

Рис. 1. Структурная схема нестационарной системы

С одной стороны, мы имеем стандартную для теории управления замкнутую структурную схему. С другой – не имеем возможности применять классические частотные критерии устойчивости, поскольку неясно, что считать частотной характеристикой нестационарного элемента. Метод стационаризации вводит в одночастотном приближении передаточную функцию такого элемента. Что позволяет с помощью критерия Найквиста получать приближенные условия возбуждения параметрических резонансов любого порядка в простой и наглядной форме.

Как и метод гармонической линеаризации, метод гармонической стационаризации является приближенным, точность находимых с его помощью границ устойчивости соответствует точности выбранного (обычно первого) гармонического приближения. На качественном уровне это значит, что точность расчетов будет тем выше, чем больше колебания в исследуемой системе похожи на гармонические. Тем не менее, как и для метода гармонической линеаризации, для метода гармонической стационаризации существуют строгие оценки точности [11].

1.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЧАСТОТ

Рассмотрим простейший одночастотный периодический параметр из цепи обратной связи (рис. 1):

(1) $a(t-\tau) = a\sin\Omega(t-\tau)\,,\quad \Omega = 2\pi/T\,,$

где τ отражает некоторый произвольный сдвиг по времени между периодическим параметром и периодическим входным сигналом $x(t)$ частоты ω

(2) $x(t) = x_0 + \tilde{x}(t) = x_0 + A\sin\omega t\,.$

Выходной сигнал периодического элемента имеет вид

(3) $y(t) = a(t-\tau)x(t) = ax_0\sin\Omega(t-\tau) + Aa\sin\Omega(t-\tau)\sin\omega t$

и содержит составляющие

(4) $y(t) = ax_0\sin(\Omega t-\varphi) + \dfrac{Aa}{2}\cos[(\Omega-\omega)t-\varphi] + \dfrac{Aa}{2}\cos[(\Omega+\omega)t-\varphi]$

частоты Ω, разностной ($\Omega-\omega$) и суммарной ($\Omega+\omega$) частот. Здесь сдвиг по времени τ заменен фазовым сдвигом $\varphi = \Omega\tau$

Для того, чтобы периодически нестационарный элемент рис. 1 передавал на выход входной сигнал частоты ω, необходимо, чтобы по крайней мере одна из составляющих выходного сигнала имела такую же частоту. При естественном физическом требовании положительности частот получаем два условия

(5) $\omega = \dfrac{\Omega}{2}$ или $\omega = \Omega$.

При выполнении первого условия (5) возникающие в периодически нестационарной динамической системе незатухающие $2T$-периодические параметрические колебания $x(t)$ носят название первого параметрического резонанса. T-периодические параметрические колебания на частоте изменения параметра, т.е. при выполнении второго условия (5), называются колебаниями второго параметрического резонанса. Первый и второй параметрические резонансы являются основными и ими исчерпываются одночастотные колебания автономных линейных периодически нестационарных систем. Рассмотрим их отдельно.

1.2. ПЕРВЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Пусть периодический параметр изменяется по закону

(6) $a(t) = a_0 + a\sin\Omega(t-\tau)$, $\Omega = 2\pi / T$,

тогда как входной сигнал имеет вид

(7) $x(t) = \tilde{x}(t) = A\sin\dfrac{\Omega}{2}t$.

Тогда выходной сигнал периодического параметра равен

(8) $y(t) = a(t)x(t) = Aa_0\sin\dfrac{\Omega}{2}t + Aa\sin\Omega(t-\tau)\sin\dfrac{\Omega}{2}t$.

Разложив произведение синусов на сумму, выделим в выходном сигнале слагаемые, имеющие частоты входного сигнала $\omega = \Omega/2$:

(9) $\tilde{y}(t) = Aa_0\sin\dfrac{\Omega}{2}t + \dfrac{Aa}{2}\cos\dfrac{\Omega}{2}(t-2\tau) = Aa_0\sin\dfrac{\Omega}{2}t + p\dfrac{a}{\Omega}A\sin\dfrac{\Omega}{2}(t-2\tau)$,

где p – оператор дифференцирования. С учетом входного сигнала (7) выражение (9) принимает вид

(10) $\tilde{y}(t) = a_0\tilde{x}(t) + \dfrac{a}{\Omega}p\tilde{x}(t-2\tau)$.

Поскольку $\tilde{y}, \tilde{x}$ – гармонические функции, запишем равенство (10) в символическом комплексном виде. При этом

$p=j\Omega/2$, а сдвиг во временной области соответствует умножению на $e^{-j\Omega\tau}$:

$$(11)\ \tilde{Y}(j\Omega/2)=a_0\tilde{X}(j\Omega/2)+\frac{ja}{2}e^{-j\Omega\tau}\tilde{X}(j\Omega/2).$$

Составим отношение – частотную передаточную функцию периодического параметра

$$(12)\ \frac{\tilde{Y}(j\Omega/2)}{\tilde{X}(j\Omega/2)}=W(j\varphi)=a_0+\frac{ja}{2}e^{-j\varphi},\ \varphi=\Omega\tau.$$

Окончательно частотную передаточную функцию периодически нестационарного элемента запишем в виде

$$(13)\ W(j\varphi)=a_0-\frac{a}{2j}e^{-j\varphi}=a_0-\rho e^{-j\varphi},\ \rho=a/2j.$$

В комплексной плоскости [u_0= Re $W(j\varphi)$, v_0= Im $W(j\varphi)$] передаточная функция (13) представляет собой окружность радиуса $r=|\rho|=|a/2j|=a/2$ с центром в точке a_0 (см. рис. 2).

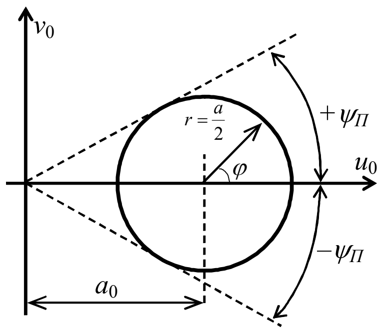

Рис. 2. Окружность первого параметрического резонанса

Передаточная функция (13) получена только для входного сигнала с частотой, равной удвоенной частоте изменения параметра, т.е. справедлива для описания первого параметрического резонанса. Она представляет собой новый тип описания, так как не зависит от амплитуды входного сигнала, но существенно зависит от фазового сдвига между периодическим входным сигналом и периодическим параметром: периодический параметр может доставлять входному сигналу дополнительный как положительный, так и отрицательный фазовый сдвиг $\pm\psi_П$ (см. рис. 2), т.е. опережение или отставание по фазе.

Передаточная функция (13) записывается в прямоугольных координатах (u_0, v_0) в виде

(14) $(u_0 - a_0)^2 + v_0^2 = r^2$.

В случае, когда T-периодический параметр $a(t)$ имеет произвольный закон изменения, следует строить его передаточную функцию при первом параметрическом резонансе по каждой гармонике. Для каждой m-ой гармоники получим передаточную функции параметра $W_m(\varphi)$ в той же комплексную форме (13), коэффициенты ρ_m которой совпадают с коэффициентами разложения периодической функции параметра в комплексный ряд Фурье. Для основной гармоники, например, получим

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)dt ,$$

$$\rho = \frac{a}{2j} = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)e^{-j\Omega t}dt .$$

Исходный параметрический элемент зависит от времени и является нестационарным, а описание (13) не зависит от времени и является стационарным. Поэтому замена нестационарного параметра описанием (13) названа *стационаризацией*.

1.3. УСЛОВИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЕРВОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Рассмотрим автономную динамическую систему, имеющую линейную стационарную часть и T-периодический элемент $a(t)$. Система описывается в операторной форме

(15) $G(p)x(t) + H(p)[a(t)x(t)] = 0$

и имеет структурное представление, приведенное на рис. 1, где стационарная часть представлена передаточной функцией $W(p) = H(p)/G(p)$.

Допустим, стационарная часть системы является фильтром низкой частоты или резонансным фильтром. Считая, что на выходе стационарной части содержится лишь одна гармоника частоты $\omega = \Omega/2$, т.е. колебания первого параметрического резонанса, приближенное решение уравнения (15) можно получить, заменив в нем параметр $a(t-\tau)$ передаточной функцией (13). Заменяя $p = j\omega = j\Omega/2$, получим частотное уравнение

(16) $G(j\dfrac{\Omega}{2}) + H(j\dfrac{\Omega}{2})W(j\varphi) = 0$

или в обозначении частотной характеристики стационарной части $W(j\omega) = H(j\omega)/G(j\omega)$

(17) $1 + W(j\dfrac{\Omega}{2})W(j\varphi) = 0$.

Последнее, очевидно, переписывается еще проще относительно прямого и обратного годографов

(18) $W(j\dfrac{\Omega}{2}) = -W^{-1}(j\varphi)$ или $W^{-1}(j\dfrac{\Omega}{2}) = -W(j\varphi)$

и определяет границу возбуждения первого параметрического резонанса. Таким образом, сформулировано

Утверждение. *В Т-периодической нестационарной динамической системе возбуждаются 2Т-периодические колебания первого параметрического резонанса, если точка $\omega = \Omega/2$ обратного годографа Найквиста $W^{-1}(j\omega) = G(j\omega)/R(j\omega)$ попадает внутрь окружности первого параметрического резонанса.*

Это иллюстрируется на рис. 3, из которого следует, что в диапазоне частот колебаний координат $\omega_1 < \omega < \omega_2$ может возбуждаться первый параметрический резонанс, если частота изменения параметра $\Omega = 2\pi/T$ лежит в диапазоне $2\omega_1 < \Omega < 2\omega_2$.

Здесь для простоты предполагается, что стационарная часть системы устойчива. Результатом расчета по формулам (18) может являться граница области возбуждения первого параметрического резонанса в координатах "частота изменения параметра"–"амплитуда изменения параметра" (Ω, a).

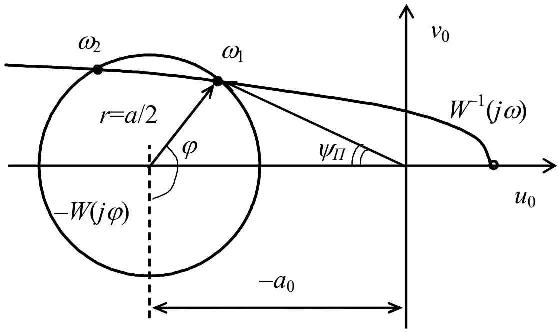

Рис.3. Условия возбуждения первого параметрического резонанса

Пример. Рассмотрим периодически нестационарную систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + \dot{x} + a\sin\Omega t = 0 .$$

Здесь $W^{-1}(p) = p^2 + p$; a_0=0, ρ=a/2j и из условия (18) найдется уравнение границы возбуждения первого параметрического резонанса в первом приближении

$$a = \frac{\Omega}{2}\sqrt{\Omega^2 + 4} .$$

Результат проверки этой зависимости численным экспериментом приведен на рис. 4.

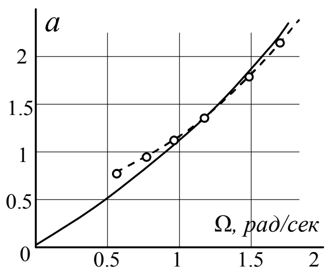

Рис. 4. Пример. Границы возбуждения (сплошная – расчет, прерывистая – эксперимент)

Аналогичным образом строятся передаточная функция нестационарного элемента и анализ устойчивости при исследовании колебаний второго параметрического резонанса [9].

2. Оценка робастности нестационарных систем управления

Смысл подхода заключается в построении огибающей семейства окружностей параметрического резонанса (13), соответствующих различным формам изменения параметра. Огибающая и определяет «запретную область» для годографа стационарной части робастной системы. Подход позволяет достаточно просто и наглядно строить такую область для систем, у которых неопределенной является (некоторым образом ограниченная) функция изменения периодического параметра или ее частота, коэффициент усиления стационарной части системы, а также ее структура.

Ниже этот способ иллюстрируется примерами приближенного определения области устойчивости нестационарной системы на двух классах функций периодического параметра.

2.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ В СРЕДНЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПАРАМЕТРЕ

Рассматривается периодически нестационарная система, в которой неограниченный по величине положительный периодический параметр имеет среднее за период постоянное значение, равное $a/2$. Пусть также параметр принимает за период лишь два граничных значения 0 и $a_{\max}$, как показано на рис. 5.

(19) $$a_{\max} = \frac{a}{2\gamma}.$$

Чтобы определить условия потери устойчивости системы, связанной с возбуждением параметрического резонанса на указанном классе, вычислим параметры семейства окружностей параметрического резонанса. Центр окружностей – среднее значение параметра, постоянен и отстоит от начала координат на $a/2$. Величина первой гармоники

(20) $a_1 = \dfrac{2j}{T}\int\limits_0^T a(t)e^{-j\Omega t}dt = \dfrac{ja}{\gamma T}\int\limits_0^{\gamma T} e^{-j\Omega t}dt = \dfrac{a}{2\gamma\pi}\left(1-e^{-j2\pi\gamma}\right)$,

откуда радиус окружности первого параметрического резонанса

(21) $r = \left|\dfrac{c_1}{2j}\right| = \dfrac{a}{4\pi\gamma}\left|1-e^{-j2\pi\gamma}\right| = \dfrac{a}{2\sqrt{2}\pi\gamma}\sqrt{1-\cos 2\pi\gamma} = \dfrac{a}{2}\dfrac{\sin\pi\gamma}{\pi\gamma}$.

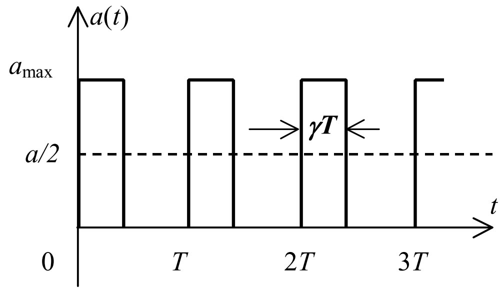

Рис. 5. Периодический параметр, ограниченный в среднем

Максимальной величины радиус семейства окружностей в диапазоне изменения $0 \le \gamma \le 1$ достигает при $\gamma = 0$ и составляет

(22) $r_{max} = a/2$.

Поскольку все окружности концентрические, то огибающая их есть окружность максимального радиуса:

(23) $W(j\varphi) = \dfrac{a}{2}\left(1 - e^{-j\varphi}\right)$.

Окружность проходит через начало координат (рис. 6) в плоскости обратного годографа Найквиста. *Система теряет устойчивость, если годограф попадает внутрь окружности*.

В комплексной плоскости прямого годографа окружность $-W^{-1}(j\varphi)$ вырождается в вертикальную прямую, проходящую через точку $(-a^{-1}, j0)$. При этом условие робастности (устойчивости в классе ограниченного по среднему значению параметра), принимает вид

(24) $\mathrm{Re}\, W(j\omega) \geq -a^{-1}$.

Проведенный анализ показывает, что наихудшим в смысле устойчивости законом изменения параметра является импульсная модуляция, когда форма импульса приближается к δ-функции.

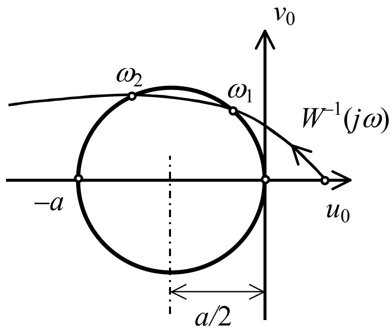

Рис. 6. Условия первого параметрического резонанса

2.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ МОДУЛЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА

Пусть периодический параметр имеет произвольную форму изменения внутри периода, но ограничен по модулю:

(25) $|a(t)| \leq a/2$.

В этом случае мы попадаем под условия достаточного критерия Бонджиорно [12], который требует для устойчивости нестационарной системы с ограничением (24) выполнения условия

(26) $|W^{-1}(j\omega)| \geq a/2$,

что на комплексной плоскости выглядит как условие непопадания годографа $W^{-1}(j\omega)$ внутрь центральной окружности радиуса $a/2$. Если же параметр изменяется в пределах $0 \leq a(t) \leq a$, то эту окружность и обратную частотную характеристику необходимо сдвинуть влево по вещественной оси на $a/2$. В этом случае окружность совпадает с окружностью (23), а условие устойчивости совпадает с условием (24)

(27) $\operatorname{Re} W(j\omega) \geq -a^{-1}$.

Это совпадение лишь формальное. Несмотря на то, что средние значения параметра в обоих случаях одинаковы, их периодические составляющие различны. Помимо этого условие (28) является приближенным, в то время как условие (27) – строгим и достаточным.

Интересно сравнить критерий Бонджиорно с первым гармоническим приближением. Примем параметр изменяющимся скачком в пределах $0 \leq a(t) \leq a$, как показано на рис. 5, и вновь вычислим первую гармонику и радиус окружности первого параметрического резонанса. В этом случае среднее значение параметра и первая гармоника составляют

(28) $a_0 = \dfrac{c_0}{2j} = a\gamma\,,\ \ 0 \leq \gamma \leq 1\,,$

(29) $c_1 = \dfrac{2ja}{T}\int\limits_0^{\gamma T} e^{-j\Omega t}dt = \dfrac{a}{\pi}(1 - e^{-j2\pi\gamma})\,,$

откуда радиус окружности параметрического резонанса есть

(30) $r = \left|\dfrac{c_1}{2j}\right| = \dfrac{a}{2\pi}\left|1 - e^{-j2\pi\gamma}\right| = \dfrac{a}{\pi}\sin \pi\gamma\,.$

Для конкретной скважности γ уравнение окружности параметрического резонанса и условие потери устойчивости равновесия периодической системы в плоскости обратного годографа Найквиста [$u_0 = \operatorname{Re} W^{-1}(j\omega)$, $v_0 = \operatorname{Im} W^{-1}(j\omega)$] имеет вид

(31) $(u_0 + \gamma)^2 + v_0^2 = \dfrac{\sin^2 \pi\gamma}{\pi^2}\,.$

Для того чтобы определить условия потери устойчивости системы в классе ограниченного по модулю параметра, т.е. при любом γ из промежутка [0, 1] вычислим огибающую окружностей (31). Производная уравнения (31) по γ равна

(32) $u_0 = -\gamma + \dfrac{\sin 2\pi\gamma}{2\pi}$.

При этом условие (30) дает решение

(33) $v_0 = \pm \dfrac{\sin^2 \pi\gamma}{\pi}$.

Выражения (32) и (33) образуют овал, огибающий окружности (31) в плоскости обратного годографа Найквиста (рис. 7).

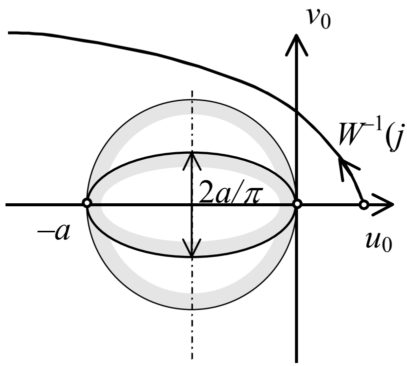

Рис. 7. Огибающая передаточных функций параметра, ограниченного по амплитуде

Таким образом*, если обратная частотная характеристика не попадает внутрь огибающей, периодически нестационарная система устойчива на рассматриваемом классе периодического параметра*. Для сравнения на рис. 7 нанесена окружность (23), вне которой система робастна в первом гармоническом приближении по ограниченному в среднем параметру и, как выяснилось выше, устойчива по достаточному критерию Бонджиорно.

Выводы

В статье представлен способ оценки робастной устойчивости периодически нестационарных линейных систем управления на различных классах функции изменения параметра. Метод позволяет в первом гармоническом приближении строить семейство передаточных функций нестационарного элемента с неопределенностью и таким образом сводить анализ устойчивости к классическому критерию Найквиста. Приводятся примеры приближенного анализа робастности нестационарных систем с ограниченным по среднему значению и по модулю периодическим параметром.

Литература

1. ЛУРЬЕ А. И., ПОСТНИКОВ В. Н. *О теории устойчивости систем управления*. Прикладная математика и механика, 8(3), 1944
2. ЯКУБОВИЧ В. А. *Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями*. ДАН СССР, 1963, т. 149, №2
3. ЛЕОНОВ Г. А., ШУМФАРОВ М. М. *Проблемы стабилизации линейных управляемых систем*. СПб., Изд-во СПбГУ, 2002. – 308 с.
4. FRADKOV A. L., POGROMSKY A. Yu. *Introduction to control of oscillations and chaos.* Singapore: World Scientific, 1998. – 410 p.
5. VAN DER SCHAFT A. J., *L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control,* Lect. Notes in Control and Inf. Sciences, London, Springer-Verlag, 2000 – 267 p.
6. ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems,* London: Springer Verlag, 1995 – 297 p.
7. ПОЛЯК Б. Т., ЩЕРБАКОВ П. С.. *Робастная устойчивость и управление*. М.: Наука, 2002. – 303 с.

8. ЧЕЧУРИН С. Л. *Параметрические колебания и устойчивость периодического движения*. Л., Изд-во ЛГУ, 1983. – 220 с.
9. ЧЕЧУРИН С. Л., ЧЕЧУРИН Л. С. *Физические основы теории колебаний*. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2005. – 258 с.
10. ЧЕЧУРИН Л. С. *Робастность нестационарных и нелинейных систем управления*, СПб.: Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2006, №5–1
11. ОСТРОВСКИЙ М.Я., ЧЕЧУРИН С.Л. *Стационарные модели систем автоматического управления.* Л., Энергоатомиздат, 1989. – 209 с.
12. BONGIORNO, J. J., JR. *An extension of the Nyquist-Barkhausen stability criterion to linear lumped parameter systems with time-varying elements*, IEEE Trans., 1963, AC-8, P. 166-172.

HARMONIC STATIONARIZATION METHOD AND EVALUATION OF ROBUSTNESS OF PERIODIC TIME-VARIANT CONTROL SYSTEMS

Leonid Chechurin, St. Petersburg State Polytechnical University, St. Petersburg, Cand.Sc., Head of Dept. (cepreu4@gmail.com).

Abstract: An approach to evaluation of stability of linear periodic time-variant control system over various description uncertainties is given. The stability bounds are derived with the help of harmonic stationarization method, that obtains transfer functions for periodic time-variant elements within one-frequency approximation.

Keywords: frequency analysis, harmonic stationarization, robustness of time-variant systems.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым