УДК 519
ББК 32.81

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ

Новиков Д. А.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва*)

Обсуждаются современные тенденции построения комплексных иерархических моделей военных действий. Для этого сначала приводится краткий навигатор по описанным в открытых источниках математическим моделям военных действий, включая описательные, имитационные, оптимизационные и теоретико-игровые модели. Затем в качестве «примеров» несколько более подробно рассматриваются два хрестоматийных класса моделей – игра полковника Блотто и ланчестеровские модели. И, наконец, обсуждается собственно иерархический подход к моделированию.

Ключевые слова: математическое моделирование, игра полковника Блотто, ланчестеровские модели, мультиагентные системы, иерархия моделей.

1. История

С исторической точки зрения одним из первых приложений «исследования операций» к военному делу считается (см. [22]) деятельность Архимеда при организации обороны Сиракуз. Ключевыми вехами уже нашего времени являются модели Ф. Ланчестера и разработки Т. Эдисона периода Первой Мировой войны, затем – количественные (в основном вероятностные) методы оценки боевой эффективности различных видов вооружения (см. краткий обзор в [13]), получившие активное развитие, начиная с 1939 г. (т.е. с начала Второй Мировой войны), и

---

[1] *Дмитрий Александрович Новиков, доктор технических наук, профессор* (*novikov@ipu.ru*).

приведшие к формированию такого самостоятельного научного направления как *исследование операций* (см., например, классические учебники [11, 13, 56, 76, 79, 87, 88] и современные учебники [126, 152]).

2. Классификация

Условно можно выделить четыре общих класса *математических моделей* военных действий (основанием выделения являются функции моделирования [58]):

– описательные модели;
– имитационные модели;
– оптимизационные модели;
– модели принятия решений.

Каждый из этих классов (возможны и другие основания классификации – см., например, [158]) включает значительное число подклассов, различающихся используемым математическим аппаратом – см. рис. 1.

Так, *описательные модели* военных действий основываются на методах теории вероятностей и статистической теории решений (принятие решений в условиях «природной» неопределенности) [74, 82], теории надежности и теории массового обслуживания [13, 83, 87], теории экспертных оценок [82]. К описательным моделям можно отнести и качественный анализ соответствующих динамических систем, исследование их структурной устойчивости [3, 5].

Имитационные модели военных действий основываются на аппарате марковских цепей, дифференциальных уравнений, конечных автоматов или методах распределенного искусственного интеллекта (так называемые мультиагентные системы – МАС).

Рис. 1. Классификация математических моделей военных действий

Наиболее известными и получившими широкое развитие являются так называемые *ланчестеровские модели* (см. также раздел 5), использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов (первая модель Ланчестера описана в [131], ее развитие, например – в [56, 109]).

Значительное место занимают так называемые *военные игры* (деловые, имитационные), основывающиеся на тех или иных математических моделях [22, 90, 108]. На сегодняшний день создаются и эксплуатируются многочисленные компьютерные системы (включая среды имитационного моделирования и специальные языки – например, *Battle Management Language* и т.п.) и имитационные модели (включая элементы систем поддержки принятия решений (СППР)) по управлению военными действиями – в авиации [12, 69], на флоте [10, 18].

Оптимизационные модели военных действий используют аппарат линейного и динамического программирования [13, 82, 87], теории оптимального управления [13, 83, 87], дискретной оптимизации (включая теорию графов и методы календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ) применительно к планированию боевых действий и управлению войсками [78, 82, 87]) и отчасти теории массового обслуживания и теории управления запасами [13, 82, 83, 87].

Модели принятия решений можно условно разделить на модели индивидуального и коллективного принятия решений. В первых основной акцент обычно делается на многокритериальное принятие решений [13], во вторых – на использование *теории игр* (принятие решений в условиях игровой неопределенности). Теоретико-игровые модели военных действий более подробно рассматриваются в третьем разделе ниже.

Другим возможным основанием классификации моделей военных действий являются *области применения* моделей военных действий – их приложения к авиации [29, 31, 56, 85, 120], флоту [22, 56, 80], сухопутным операциям [74, 82, 87], пограничной безопасности [89] и др.

3. Теоретико-игровые модели военных действий

Теория игр (в основном антагонистических) активно используется для моделирования военных действий начиная с конца 40-х – начала 50-х годов XX века и до наших дней (информативными с исторической точки зрения являются многочисленные отчеты *RAND Corporation*, например, [93, 124] и [120]).

Интересно, что первоначально учебники и монографии по теории игр содержали примеры приложений этой теории в основном именно к военному делу [14, 29, 147], а начиная с конца 80-х годов XX века большинство примеров стало браться из области экономики [20, 135] (в середине 80-х годов примеры приводились, как правило, из обеих областей – см., например, [32]). Сейчас эта тенденция абсолютно доминирует – см. современные учебники по теории игр [114, 136] (хороший обзор середины 1990-х годов приведен в [137]), в которых почти нет содержательных примеров из военной области.

Многие авторы ограничиваются, в основном, рассмотрением *антагонистических игр* (игр двух лиц с нулевой суммой) – см. ставшие хрестоматийными работы [14, 29, 74, 98, 123].

Классическая теория игр (некооперативные, в первую очередь – биматричные игры) [14, 20, 28, 32] используется в приложении к задачам организации, планирования и проведения военных операций [158], выбора оптимальных группировок вооруженных сил и систем вооружения [13, 29, 82, 87]. Сюда же следует, наверное, отнести:

– задачу распределения ограниченных ресурсов обороны и нападения (обобщенное название – игра полковника Блотто, рассматриваемая более подробно ниже) [74], в том числе – с разведкой (игра в развернутой форме сводится к матричной игре [29]);

– *игры типа дуэлей* (выбор оптимальных моментов или оптимальных дистанций открытия огня) [29, 83];

– «политологические» модели анализа причин войн – см. обзоры [99, 118];

– модели гонки вооружений и международного сотрудничества в военной сфере [137].

Вторым обширным классом теоретико-игровых моделей, нашедших широкое применение в военном деле, являются *дифференциальные игры* [1, 12, 35, 44, 72, 73] и *игры поиска* [70, 87], включая современные задачи управления движением в конфликтной среде (см. [1, 21, 30] и ссылки в них).

Задачи поиска подвижного объекта, активно противодействующего обнаружению поисковой системой, получили название «*поиск в условиях конфликта*». Можно выделить две основные группы постановок задач, в зависимости от характера противодействия:

– поиск истинной цели в наблюдаемом составе группы целей, включающей ложные цели; идеологически эти задачи близки к задачам о распределении ресурсов, и, в частности, к задаче о коммивояжере;

– поиск цели при подавленном канале наблюдений.

Задачи второй группы формулируются как дифференциальные игры в смешанных стратегиях с критерием «вероятность обнаружения». Конструктивных решений на сегодняшний день немного; они получены для случаев, когда удается свести дифференциальную игру к игре на компакте [71, 92, 115, 151].

Другие «неклассические» (пока) разделы теории игр также имеют отдельные (далеко не массовые) примеры приложений в моделировании военных действий и принятии решений по управлению силами и средствами в военных конфликтах:

– иерархические игры [23, 40], включая динамические иерархические игры [26, 38];

– модели коллективного поведения [39–41];

– повторяющиеся игры и игры в развернутой форме [32, 49, 72, 161];

– рефлексивные игры [48, 60, 67] и метаигры [40, 128] для моделирования принятия стратегических и оперативных военных решений;

– игры на сетях и сетевые игры [49, 59, 77, 119, 144];

– алгоритмическая (вычислительная) теория игр [91, 133];

– поведенческая теория игр (экспериментальная экономика) [100];

– когнитивные игры, позволяющие осуществлять прогноз стратегического взаимодействия факторов и субъектов [46, 47, 61].

Одним из примеров приложений являются теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях [27], где используется аппарат и иерархических, и рефлексивных игр.

Эмпирической основой теоретико-игрового моделирования обычно являются стратагемы [16, 50] и их рефлексивный анализ [7, 67]. При этом очень популярен опыт Древнего Китая [81] и Древнего Рима [84], а также история европейских войн [33, 36].

Ниже мы приведем краткий обзор результатов построения и исследования двух упоминавшихся выше классов моделей – игра полковника Блотто (раздел 4) и ланчестеровские модели (раздел 5).

4. Игра полковника Блотто

Игрой полковника Блотто (ИПБ), впервые рассмотренной в [95], называется игра двух лиц, в которой игроки однократно, одновременно и независимо (не зная выбора оппонента) распределяют свои ограниченные *ресурсы* между конечным числом *объектов* (полей сражений или объектов защиты/нападения [117], одновременных конкурсов/аукционов [130], групп избирателей [132] и т.п.).

Обозначим через $N = \{1, \ldots, n\}$ множество объектов, через $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – действие первого игрока, через $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – действие второго игрока, где $x_i \geq 0$ ($y_i \geq 0$) – количество ресурса, выделенного первым (вторым) игроком на i-й объект, $i = \overline{1,n}$. Ограниченность ресурсов отражена условиями

(1) $\sum_{i \in N} x_i \leq R_x, \quad \sum_{i \in N} y_i \leq R_y.$

4.1. АУКЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

В рамках *аукционной модели* победу на объекте одерживает игрок, выделивший на него большее количество ресурсов (в случае равенства ресурсов каждый из игроков одерживает победу с вероятностью 1/2). Ценность i-го объекта для первого (второго) игрока обозначим через X_i (Y_i). Тогда выигрыши игроков в аукционной модели будут определяться следующим образом:

$$(2)\quad f_x(x, y) = \sum_{i \in N} X_i I(x_i > y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} X_i I(x_i = y_i),$$

$$f_y(x, y) = \sum_{i \in N} Y_i I(y_i > x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} Y_i I(x_i = y_i),$$

где $I(\cdot)$ – функция-индикатор. Более общим является случай, когда ограничения типа (1) отсутствуют, но из выигрыша (2) вычитаются затраты, монотонные по суммарному количеству использованного игроком ресурса.

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ являются тривиальными. Действительно, при $n = 1$ побеждает игрок, обладающий бóльшим количеством ресурса (в случае равенства ресурсов победа каждого равновероятна). При $n = 2$ оптимальной стратегией каждого игрока является приоритетное выделение ресурса на наиболее ценный для него объект (см., например [130]).

Простейшим является *симметричный* ($X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x = R_y$) вариант *дискретной* (ресурсы игроков дискретны) ИПБ, являющейся матричной игрой (с нулевой суммой). Впервые решение этой игры (равновесие Нэша в смешанных стратегиях) для случая $n = 3$ было описано в [96]; в [117] были найдены решения для симметричного случая для произвольного конечного n и для случая $X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ при $n = 2$. Следующим шагом была частичная характеризация равновесия Нэша для случая $X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ при произвольном конечном n [112]. В дальнейшем, как правило (см. обзор в [142]), исследователи ограничивались либо дискретным, либо симметричным непрерывным случаями.

Существенное продвижение в характеризации равновесия в аукционной модели было получено в [142], следующими шагами можно считать статью [127], где исследуется равновесие Нэша в чистых стратегиях для несимметричного случая, и [121], где произведено обобщение ИПБ на стохастический случай.

Описание экспериментальных исследований ИПБ можно найти в [102, 134].

В [130] ИПБ интерпретируется в терминах одновременных конкурсов (применяется аукционное решение), причем учитываются затраты на используемые игроками ресурсы. Динамическое обобщение ИПБ – *многоэтапный конкурс* (*Dynamic Contest*) [113], в котором игроки на каждом шаге выбирают количество расходуемого ресурса, победитель определяется вероятностной моделью (см. ниже), а оставшийся ресурс уменьшается на долю израсходованного (в игре Блотто эта доля равна единице) [148].

4.2. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

В *вероятностной модели* ИПБ вероятность $p_x(x_i, y_i)$ победы первого игрока на i-м объекте не зависит от других объектов и «пропорциональна» количеству выделенного им на этот объект ресурса и «обратно пропорциональна» взвешенной сумме ресурсов, выделенных на этот объект обоими игроками:

(3) $$p_x(x_i, y_i) = \frac{\alpha_i (x_i)^{r_i}}{\alpha_i (x_i)^{r_i} + (y_i)^{r_i}},\ p_y(x_i, y_i) = 1 - p_x(x_i, y_i),$$

где $r_i \in (0; 1]$, $\alpha_i > 0$, $p_x(x_i = 0, y_i = 0) = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_i + 1}$ [102, 112, 134]

(см. общее обсуждение свойств подобных зависимостей в [116, 143, 156], а также обзор [104]). Содержательно коэффициенты $\{\alpha_i\}$ позволяют соизмерять эффективности использования игроками ресурсов на одном и том же объекте.

Выигрыши игроков в вероятностной модели определяются следующим образом:

(4) $$F_x(x, y) = \sum_{i \in N} X_i p_x(x_i, y_i),\ F_y(x, y) = \sum_{i \in N} Y_i p_y(x_i, y_i).$$

Равновесием Нэша в чистых стратегиях (x^*, y^*) является пара векторов, удовлетворяющих условиям (1), таких, что $\forall (x, y)$, также удовлетворяющих условиям (1), выполнено

(5) $F_x(x^*, y^*) \geq F_x(x, y^*)$, $F_y(x^*, y^*) \geq F_y(x^*, y)$.

Вероятностная модель в определенном смысле «проще», чем аукционная: как показано в [112], единственным равновесием Нэша для случая $X_i = Y_i = \text{Const}$, $r_i = 1$, $\alpha_i = 1$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ при произвольном конечном n (см. выражение (2)) является использование игроками чистых стратегий, заключающихся в равном распределении имеющихся у них ресурсов между объектами.

В [143] в рамках вероятностной модели найдено равновесие в чистых стратегиях для случая $X_i = Y_i$ при произвольных $r_i \in (0; 1]$, $\alpha_i > 0$, $i \in N$. Приведем аналогичный результат для случая, когда ценность победы на объекте для различных игроков различна (в общем случае $X_i \neq Y_i$, $i \in N$).

Условиями первого порядка для игроков являются (легко показать, что условия (1) в равновесии выполняются как равенства)

$$(6)\quad \frac{\alpha_i r_i (x_i^*)^{r_i-1}(y_i^*)^{r_i}}{[\alpha_i (x_i^*)^{r_i} + (y_i^*)^{r_i}]^2} X_i = \lambda_x,\ \ i \in N,$$

$$(7)\quad \frac{\alpha_i r_i (x_i^*)^{r_i}(y_i^*)^{r_i-1}}{[\alpha_i (x_i^*)^{r_i} + (y_i^*)^{r_i}]^2} Y_i = \lambda_y,\ \ i \in N,$$

где λ_x и λ_y – множители Лагранжа, соответствующие первому и второму условиям выражения (1).

Разделив (6) на (7), получим

$$(8)\quad \frac{y_i}{x_i}\frac{X_i}{Y_i} = \frac{\lambda_x}{\lambda_y},\ \ i \in N.$$

В частном случае, когда $X_i = Y_i = V_i$, из (8) и (3) (с учетом монотонности (1) по действию игрока) следует, что (см. также [143])

$$(9)\quad \frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{R_y}{R_x}.$$

Из (6) и (8) получаем:

(10) $$x_i^* = \frac{\alpha_i r_i \left(\frac{X_i}{Y_i}\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^{r_i} X_i}{\lambda_x \left[\alpha_i + (\frac{X_i}{Y_i}\frac{\lambda_x}{\lambda_y})^{r_i}\right]^2}, \ i \in N,$$

(11) $$y_i^* = \frac{\alpha_i r_i \left(\frac{X_i}{Y_i}\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^{r_i} Y_i}{\lambda_y \left[\alpha_i + (\frac{X_i}{Y_i}\frac{\lambda_x}{\lambda_y})^{r_i}\right]^2}, \ i \in N.$$

Условия первого порядка (10) и (11) являются общей характеризацией равновесия Нэша. В частном случае – при $X_i = Y_i = V_i$, $\alpha_i = r_i = 1$, $i \in N$ – из (10) и (11) с учетом (8) следуют выражения для равновесных действий и выигрышей, полученные в [112]:

(12) $$x_i^* = \frac{V_i}{V} R_x, \quad y_i^* = \frac{V_i}{V} R_y, \ i \in N,$$

(13) $$F_x(x^*, y^*) = \frac{R_x}{R_x + R_y} V, \ F_y(x^*, y^*) = \frac{R_y}{R_x + R_y} V,$$

где $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, т.е. агенты делят свой ресурс пропорционально ценности объектов и получают выигрыш, пропорциональный их суммарным ресурсам. Отметим, что при этом равновесные действия каждого из игроков зависят только от «их собственных» параметров – так, например, действия первого игрока x^* не зависят от суммарного количества ресурса R_y, имеющегося у второго игрока, и т.п.

При $X_i = Y_i = V_i$, $i \in N$, из (10) и (11) с учетом (8) следуют выражения для равновесных выигрышей, полученные в [143] (там же приведены и аналитические выражения для равновесных действий игроков):

(14) $$F_x(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i (R_x)^{r_i}}{\alpha_i (R_x)^{r_i} + (R_y)^{r_i}} V_i,$$

$$F_y(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(R_y)^{r_i}}{\alpha_i (R_x)^{r_i} + (R_y)^{r_i}} V_i .$$

Отметим, что выражения (12)–(14) можно интерпретировать как пропорциональный механизм распределения ресурса (механизм прямых приоритетов) [65].

Система (1), (10), (11) состоит из $2n + 2$ уравнений и содержит столько же неизвестных, однако записать ее решение в аналитическом виде представляется затруднительным (в отличие от [143], где предполагалось, что $X_i = Y_i = V_i,\ \ i \in N$).

Самостоятельный интерес представляет исследование различий в оценках игроками одних и тех же объектов – модели *стратегической и информационной рефлексии* в ИПБ описаны в [42].

5. Ланчестеровские модели

Общеизвестными и получившими широкое развитие являются так называемые ланчестеровские модели, использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов – первая модель Ланчестера [131] и ее развитие (см. обзоры в [56, 109, 154]). Следует также обратить внимание на наличие тесных аналогий между ланчестеровскими моделями военных действий и популяционными моделями в биологии и экологии (см., например, [19]).

Пусть имеются две противоборствующие стороны. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) *численность войск* первой (второй) стороны в момент времени $t \geq 0$. Начальные условия (численности в нулевой момент времени) – x_0 и y_0 соответственно. Скорость изменения численности войск каждой из сторон определяется тремя факторами:

– операционными потерями (пропорциональными численности своих войск);

– боевыми потерями (пропорциональными численности войск противника или произведению численностей войск обеих сторон);

– вводом резервов (выводом в резерв).

Обычное сражение описывается следующей системой дифференциальных уравнений (слагаемые соответствуют вышеперечисленным факторам):

(15) $\dot{x}(t) = -ax(t) - by(t) + u(t)$,

(16) $\dot{y}(t) = -cx(t) - dy(t) + v(t)$,

где a, b, c и d – положительные константы; $u(t)$ и $v(t)$ – темпы ввода резервов.

Аналогично описывается *партизанская война* (многие современные войны приобрели иррегулярный «партизанский» характер [52]):

(17) $\dot{x}(t) = -ax(t) - gx(t)y(t) + u(t)$,

(18) $\dot{y}(t) = -dy(t) - hx(t)y(t) + v(t)$,

где g и h – положительные константы, и *смешанная война*:

(19) $\dot{x}(t) = -ax(t) - gx(t)y(t) + u(t)$,

(20) $\dot{y}(t) = -cx(t) - dy(t) + v(t)$.

Модели отличаются учетом боевых потерь. Предполагается, что в обычном сражении каждая сторона в единицу времени поражает число противников, пропорциональное своей численности – коэффициенты b и c, называемые *коэффициентами боевой эффективности*, могут измеряться как число выстрелов, производимое одним сражающимся в единицу времени, умноженное на вероятность поражения одним выстрелом одного противника (именно такую модель первоначально и предложил Ф. Ланчестер в [131]). Другой тип сражения – «партизанский», или «стрельбы по площадям», когда потери противника зависят как от интенсивности огня, так и от концентрации его войск, что отражается «смешанными» слагаемыми, пропорциональными $x(t)y(t)$. Существует и другая (так называемая *дуэльная*) интерпретация модели (17)–(18), в соответствии с которой сражение рассматривается как война в древнем мире – набор индивидуальных попарных поединков между воинами (в условиях невозможности локализации и концентрации поражающих факторов). Можно говорить не о типах сражений, а о типах ведения огня:

1. Прицельный огонь по рассредоточенным целям.

2. Прицельный огонь по сосредоточенным целям.
3. Стрельба по площадям [43].

Отметим, что возможно рассмотрение более общих моделей, т.е. таких, в которых скорости изменения численностей пропорциональны произведению численностей, возведенных в определенные степени (эти степени могут быть и дробными – так называемые фрактальные модели Ланчестера [138]).

Следует подчеркнуть, что выше речь идет только о традиционном оружии (боевых единицах с низкой вероятностью поражения в отдельном выстреле): применение современного высокоточного оружия, разведывательно-огневых и разведывательно-ударных комплексов описывают другими моделями.

Самым простым (ставшим хрестоматийным) случаем является случай отсутствия операционных потерь и резервов, когда (15)–(16) превращается в

(21) $\dot{x}(t) = -by(t),\ \dot{y}(t) = -cx(t)$.

Решением системы (21) является так называемая квадратичная модель динамики численности войск:

(22) $b(y^2(t) - y_0^2) = c(x^2(t) - x_0^2)$.

Траекториями (22) в координатах (x, y) будут гиперболы (прямая при $b\,y_0^2 = c\,x_0^2$). Проигравшей будет сторона, чья численность войск первая обратится в ноль (поэтому ланчестеровские модели иногда называют *моделями истощения*). Если $b\,y_0^2 > c\,x_0^2$, то побеждает вторая сторона, при $b\,y_0^2 < c\,x_0^2$ побеждает первая. Условие «равенства сил» имеет вид

(23) $y_0 = \sqrt{\dfrac{c}{b}}\,x_0$.

Следует отметить некоторую условность выражений типа (23), которые не учитывают известного факта, что существует определенный критический процент потерь, при которых сторона отказывается от продолжения боя (см., например, [17, 25]).

По аналогии, рассмотрев (17)–(18) в отсутствии операционных потерь и резервов, получим

(24) $\dot{x}(t) = -gx(t)y(t),\ \dot{y}(t) = -hx(t)y(t)$.

Решением системы (24) является прямая
$g(y(t) - y_0) = h(x(t) - x_0)$, а условием «равенства сил»
(25) $y_0 = \dfrac{h}{g} x_0$.

Смешанная война (см. (19)–(20)) в отсутствии операционных потерь и резервов описывается системой
(26) $\dot{x}(t) = -gx(t)y(t),\ \dot{y}(t) = -cx(t)$.

Решением системы (26) является $g(y^2(t) - y_0^2) = 2c(x(t) - x_0)$. Результаты идентификации модели (26) для действия регулярных войск против партизанских движений приведены в [107].

Рассмотрим ситуацию, когда стороны могут делить свои войска на части и осуществлять последовательный боевой контакт своих частей с частями противника.

Из условия (25) можно получить следующее выражение численности войск первой стороны, оставшейся после победы над противником:
(27) $x(x_0, y_0) = x_0 - \delta y_0$,
где $\delta = g/h$ – отношение коэффициентов боевой эффективности соответственно второй и первой сторон в модели (24). В силу линейности выражения (27) исход боя определяется только начальными количествами войск и отношением δ и не зависит от того, как стороны разделили свои войска на части, какие части сражаются с какими и в какой последовательности. Ситуация становится несколько более разнообразной в рамках модели (21).

Из условия (22) можно получить следующее выражение численности войск первой стороны, оставшейся после победы над противником:
(28) $x(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 - \gamma y_0^2}$,

где $\gamma = b/c$ – отношение коэффициентов боевой эффективности соответственно второй и первой сторон в модели (21). Пусть $\gamma < 1$ и $x_0 < \sqrt{\gamma}\, y_0$, т.е. первая сторона более эффективна, но обладает начальной численностью войск, недостаточной для того, чтобы одержать победу над второй стороной при вводе ими в действие одновременно всех своих сил.

Предположим, что имеется n плацдармов, по которым вторая сторона уже распределила свои силы. Обозначим через $y_i \geq 0$ численность войск второй стороны на i-м плацдарме, $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = y_0$. Без ограничения общности предположим, что плацдармы пронумерованы так, что $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$. Пусть первая сторона, используя все имеющиеся у нее на текущий момент силы, может последовательно сражаться на различных плацдармах. Определим, какова оптимальная для первой стороны последовательность сражений и при каких условиях (значениях x_0 и γ, а также векторе $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$) она может последовательно победить на всех плацдармах. Ответ на этот вопрос тривиален – конечная численность войск первой стороны не зависит от последовательности плацдармов, а победа в рамках модели (28) возможна в случае, когда

$$(29)\quad x_0 \geq \sqrt{\gamma \sum_{i=1}^{n} (y_i)^2}\,.$$

Так как сумма квадратов неотрицательных чисел не превышает квадрата их суммы, то из (29) следует, что первой стороне в рассматриваемой модели всегда выгодно дробление войск противника – их равное разделение между n плацдармами снижает их «эффективную численность» в $\sqrt{n}$ раз. Хрестоматийным примером последовательного разгрома превосходящих сил противника является Трафальгарская битва.

Легко убедиться, что вывод о том, что конечная численность войск первой стороны не зависит от последовательности плацдармов, справедлив и для общего случая так называемых «степенных» уравнений Ланчестера:

$$\dot{x}(t) = -\,g x^p(t) y^q(t),$$
$$\dot{y}(t) = -\,h x^q(t) y^p(t).$$

Существует множество разновидностей задач оптимизации распределения сил обороны и нападения в рамках ланчестеровских моделей (см. также обзор и результаты в [146]), т.е. модель Ланчестера имеет массу вариаций и обобщений:

– введение переменных (зависящих от времени) коэффициентов боевой эффективности [153];

– учет особенностей боевых действий различных типов – засад, перестрелок, осад и т.д. [145];

– рассмотрение дискретных моделей залпового огня [129];

– многоуровневые модели [103], в которых на нижнем уровне методом Монте-Карло имитируется взаимодействие отдельных боевых единиц, на среднем уровне взаимодействие описывается марковскими моделями, а на верхнем (агрегированном, детерминированном) уровне используются дифференциальные уравнения [155]. Такой подход удобен для идентификации реальных задач и более адекватного учета специфики конкретной моделируемой ситуации;

– рассмотрение дифференциальных игр, в которых управлениями игроков являются темпы ввода резервов $u(t)$ и $v(t)$, а критериями эффективности – разность между численностями войск в заданный момент времени [101];

– анализ моделей длительных (многостадийных) конфликтов с учетом ввода резервов [7, 74, 88];

– модели агрегированного описания театра военных действий, состоящего из нескольких областей, сражения в каждой из которых описываются квадратичным законом Ланчестера [106] (учет и оптимизация распределения сил и средств в пространстве и во времени (см. обзор в [138], а также модели многостадийных конфликтов);

– модели военных конфликтов с использованием нескольких видов вооружений [125];

– модели разоружений Ричардсона [141];

– модели, учитывающие неопределенность в виде стохастических слагаемых – переход к марковским моделям [13, 74, 94, 154, 158], стохастическим дифференциальным уравнениям, и др.

Множество работ посвящены идентификации конфликтов (подбору параметров модели) [54, 97, 105, 110, 111, 122].

Добавление в уравнения типа Ланчестера управляющих переменных (отражающих ввод резервов, распределение сил и средств и т.д. [34]) приводит уже к оптимизационным моделям, т.е. к соответствующим задачам оптимального управления. Перспективным представляется использование подобного «надстроечного» подхода для перехода к иерархиям моделей – теоретико-игровым «надстройкам» над ланчестеровскими моделями.

6. Иерархии моделей

Сложность и многообразие реальных ситуаций требуют для их адекватного отражения в математических моделях гибкости и универсальности последних. Эти свойства неизбежно приходят в противоречие с общностью и обоснованностью результатов моделирования – см. функции и свойства моделей, а также «принцип неопределенности» в [58]. Поэтому при решении тех или иных реальных задач неизбежно использование комплексов моделей, в которых «выход» одной модели является «входом» для другой и т.д. Совокупность подобных моделей может рассматриваться в виде *иерархии* (обычно более низким уровням иерархии соответствует более высокая степень детализации описания моделируемых систем) или *горизонтальной цепочки*, в каждом элементе которой степень детализации примерно одинакова. Подобный подход к моделированию зародился и активно развивался в 60–70-х годах XX века [8, 51, 57].

Начнем с нескольких примеров иерархий математических моделей, описывающих ситуации противоборства в военной, информационной и др. сферах. Описывать эти примеры будем единообразно, на каждом уровне иерархии указывая моделируемые явления и процессы, а также аппарат моделирования.

6.1. МОДЕЛЬ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Если противники однократно и одновременно принимают решения о распределении своих сил «в пространстве» (между плацдармами), то получаем игру полковника Блотто – см. раздел 4 и [42] – в которой победитель на каждом из плацдармов определяется в результате решения соответствующих уравнений Ланчестера. Другими словами, можно рассматривать «иерархическую» модель, в которой на верхнем уровне иерархии игроки распределяют свои силы межу плацдармами в рамках той или иной вариации теоретико-игровой модели ИПБ, а на нижнем уровне исход сражения на каждом из плацдармов описывается той или иной вариацией модели Ланчестера. Сложность аналитического исследования таких иерархических моделей обусловлена тем, что в большинстве случаев для ИПБ трудно найти аналитическое решение (см. [42]).

Для моделей Ланчестера также можно использовать иерархический подход (см. раздел 5) – на нижнем уровне методом Монте-Карло имитируется взаимодействие отдельных боевых единиц, на среднем уровне взаимодействие описывается марковскими моделями, а на верхнем (агрегированном, детерминированном) уровне используются собственно дифференциальные уравнения ланчестеровского типа. «Над» этими моделями, вводя в них управляемые параметры (распределение сил и средств во времени – ввод резервов и т.д.), можно надстраивать задачи управления в терминах управляемых динамических систем, дифференциальных и/или повторяющихся игр и др.

В результате получим следующую иерархическую модель:

Таблица 1. Модель боевых действий

Уровень иерархии	**Моделируемые явления/процессы**	**Аппарат моделирования**
5	Распределение сил и средств в пространстве	Игра полковника Блотто и ее модификации
4	Распределение сил и средств во времени	Оптимальное управление, повторяющиеся игры и др.
3	Динамика численности	Уравнения Ланчестера и их модификации
2	«Локальное» взаимодействие подразделений	Марковские модели

Уровень иерархии	Моделируемые явления/процессы	Аппарат моделирования
1	Взаимодействие отдельных боевых единиц	Имитационное моделирование, метод Монте-Карло

6.2. МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПРЕОДОЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБОРОНЫ (*ТАК НАЗЫВАЕМАЯ ЗАДАЧА О ДИФФУЗНОЙ БОМБЕ*)

Модель распределенного преодоления системы обороны (так называемая *задача о диффузной бомбе*) [40]. Одной из современных тенденций в теории и практике управления является стремление к «миниатюризации», «децентрализации» и «интеллектуализации». Как следствие, в последнее десятилетие все большее внимание исследователей привлекает такой объект управления, как *мультиагентные системы*, состоящие из большого числа взаимодействующих между собой автономных агентов социальной, технической или информационной природы [37, 39, 139, 140, 149, 159, 160]. Такие свойства мультиагентных систем, как децентрализованность взаимодействия и множественность агентов, с одной стороны, дают их качественно новые эмерджентные свойства, важные во многих приложениях, в том числе – в задачах оборон и безопасности (колесные и др. роботы, беспилотные летательные аппараты, автономные подводные аппараты и т.п.). С другой стороны, новые свойства объекта управления ставят новые задачи – в частности, необходимость совместного решения задач управления, реализации вычислений и организации коммуникаций (связи) в реальном времени.

Примером является задача о диффузной бомбе, которая заключается в следующем: группа автономных подвижных агентов должна поразить цель с заданными координатами. В каждый такт времени каждый агент может быть с определенной вероятностью обнаружен и уничтожен системой обороны. Вероятность обнаружения/уничтожения зависит от координат агента, его скорости и расположения относительно других агентов. Задача заключается в синтезе таких алгоритмов децентрализованного взаимодействия агентов и принятия ими решений о направлении и скорости движения, чтобы максимизировать число агентов, достигших цели. «Интеллектуальность» агентов заключается, в том числе, в том, что часть агентов-разведчиков, может оперативно получать информацию о параметрах системы обороны. Остальные агенты, наблюдая за поведением разведчиков (в условиях ограничений на коммуникации между агентами), «рефлексируя» получают оценку опасной области и решают поставленную задачу.

В целях оценки и выбора наиболее эффективных алгоритмов поведения используется следующая иерархическая модель:

Таблица 2. Модель диффузной бомбы

Уровень иерархии	**Моделируемые явления/ процессы**	**Аппарат моделирования**
6	Выбор состава группы агентов и их свойств	Методы дискретной оптимизации
5	Выбор агентами траекторий и скоростей движения	Оптимальное управление
4	Прогноз агентом поведения других агентов	Рефлексивные игры. Метод рефлексивных разбиений
3	Минимизация вероятности обнаружения на основании текущей информации	Алгоритмы выбора направления движения
2	Избежание столкновений, обход препятствий	Алгоритмы выбора локальных траекторий
1	Движение агента к цели	Уравнения динамики движения

В мультиагентных системах иерархия моделей порождается, в том числе, функциональной структурой самого агента, которая имеет несколько иерархических уровней – см. рис. 2 [39, 66]. На нижнем (*операционном*) уровне осуществляется реализация действий, например – стабилизация движения по заданной траектории. На *тактическом уровне* осуществляется выбор действий, в том числе – с учетом взаимодействия с другими агентами. *Стратегический уровень* отвечает за принятие решений, обучение и адаптивность поведения. И, наконец, высший уровень (*целеполагания*) соответствует принципам выбора целей и механизмов функционирования агентов.

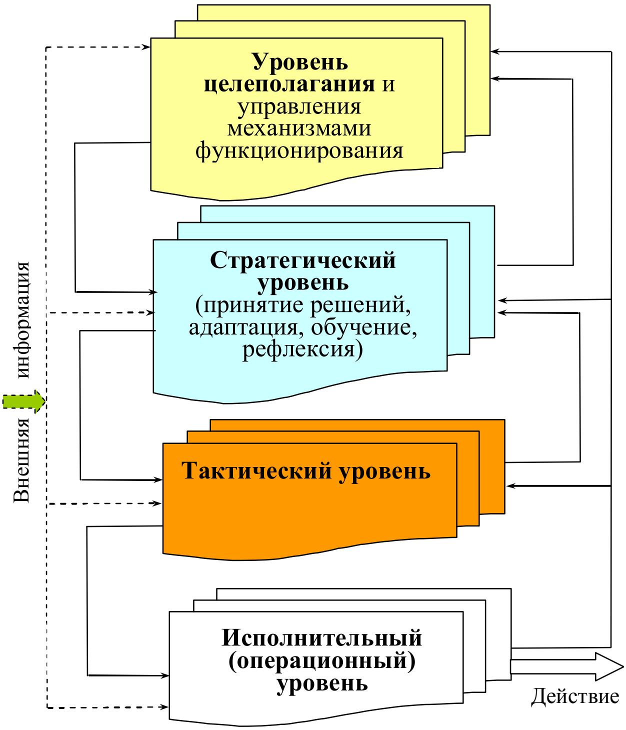

Рис. 2. Обобщенная архитектура агента

Приведенная на рис. 2 структура является достаточно универсальной. Но в то же время большинство реализаций мультиагентных систем ограничивается двумя нижними уровнями. Поэтому одной из современных тенденций и теории мультиагентных систем, и теории игр, и искусственного интеллекта (последние два научных направления ориентированы на верхние уровни архитектуры агента) является стремление к их интеграции [63].

6.3. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА

Объектом и средством управления в данном примере является социальная сеть или другой «сетевой» объект [27, 47, 59, 61, 77].

Можно выделить несколько уровней описания и анализа социальных сетей. На первом (нижнем) уровне сеть рассматривается «в целом» (данное описание, хотя и не является детализированным, обычно необходимо для экспресс-анализа общих свойств объекта). Здесь для агрегированного описания сети используются статистические методы, методы семантического анализа и др. На втором уровне с использованием аппарата теории графов производится анализ структурных свойств сети. На третьем уровне анализируется информационное взаимодействие агентов. Здесь спектр возможных моделей наиболее широк – марковские модели, конечные автоматы, модели диффузии инноваций, модели заражения и многие другие. На четвертом уровне с использованием аппарата оптимального управления или дискретной оптимизации ставятся и решаются задачи управления. И, наконец, на пятом уровне для описания взаимодействия субъектов, воздействующих на социальную сеть каждый в своих интересах, как правило, используется аппарат теории игр, в том числе – рефлексивных игр.

В результате получим следующую иерархическую модель:

Таблица 3. Модель информационного противоборства

Уровень иерархии	**Моделируемые явления/ процессы**	**Аппарат моделирования**
5	Информационное противоборство	Теория игр, теория принятия решений
4	Информационное управление	Оптимальное управление, дискретная оптимизация
3	Информационное	Марковские модели, конеч-

Уровень иерархии	**Моделируемые явления/ процессы**	**Аппарат моделирования**
	взаимодействие агентов	ные автоматы, модели диффузии инноваций, модели заражения и др.
2	Анализ структурных свойств сети	Теория графов
1	Анализ сети в целом	Статистические методы, методы семантического анализа и др.

То есть на каждом уровне имеется большой набор возможных моделей и методов, совокупность которых может рассматриваться как своеобразный конструктор, пользуясь элементами которого исследователь собирает инструмент для решения поставленной перед ним задачи. С одной стороны, возможно адаптированное использование тех или иных известных моделей и методов. С другой стороны, специфика объекта заставляет на каждом уровне разрабатывать и развивать свои специфические методы, учитывающие большую размерность объекта управления, его распределенность и неполную наблюдаемость, наличие многих взаимодействующих объектов и субъектов управления, обладающих различными интересами и т.д.

В заключение настоящего раздела отметим, что иерархические модели используются, естественно, не только в военных приложениях. Широко распространены они практически во всех областях науки и практической человеческой деятельности: организационное управление [53], коллективное поведение [39, 62], экономико-математические модели [6, 77, 86], биология и медицина – см. обзор [4], технические и производственные системы [8] и др.

7. Перспективы

На сегодняшний день издаются несколько десятков журналов по исследованию операций, имитационному моделированию и т.д., в которых нередко встречаются статьи по применению соответствующих моделей и методов к описанию военных действий, оптимизации принимаемых решений (обзоры применения теории игр и имитационного моделирования можно найти в [108, 157]). Существуют сообщества ученых, занимающихся соответствующими задачами – например, *Military Operations Research Society* со своими журналами, конференциями и т.д.

Если говорить о перспективных направлениях развития теории игр и ее приложений к описанию военных действий, то, наверное, в будущем можно ждать активного развития приложений к военному делу «неклассических» разделов теории игр – иерархических, эволюционных, когнитивных и других игр. В рамках теории игр и теории коллективного поведения развито множество моделей, учитывающих адаптацию, обучение и другие интеллектуальные свойства игроков (см. [39, 60, 62]), использование которых в моделировании военных действий, наверное, позволит более адекватно отражать многие реальные ситуации.

Перспективным также представляется, во-первых, использование комплексных иерархических интеллектуальных моделей (см. шестой раздел) с соответствующей компьютерной реализацией. Во-вторых – моделирование и учет в системах поддержки принятия решений стратегических и рефлексивных рассуждений ЛПР (командиров соответствующего уровня) на тактическом, оперативном и стратегическом уровнях (с учетом ограничений, накладываемых господствующей военной доктриной, находящей отражение в уставах и учебниках – см., например, [55, 75]). В третьих, столь «модная» сейчас сетецентрическая концепция организации управления войсками и боевыми действиями пока мало находит отражение в соответствующих оптимизационных (теория графов) и игровых (теория игр) моделях. Относительно этого направления можно высказать гипотезу о возможности и целесообразности использования моделей сетевых игр [59, 64, 119].

Автор признателен за конструктивные ценные замечания д.т.н. Е.П. Маслову и к.т.н. В.В. Шумову.

Литература

1. АБРАМЯНЦ Т.Г., МАСЛОВ Е.П., ЯХНО В.П. *Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей* // Проблемы управления. – 2010. – №5. – С. 73–79.
2. АЙЗЕКС Р. *Дифференциальные игры.* – М.: Мир, 1967. – 480 с.
3. АМЕЛЬКИН В.В. *Дифференциальные уравнения в приложениях.* – М.: Наука, 1987. – 188 с.
4. АПОНИН Ю.М., АПОНИНА Е.А. *Иерархия моделей математической биологии и численно-аналитические методы их исследования* // Математическая биология и биоинформатика. – 2007. – Том 2, №2. – С. 347–360.
5. АРНОЛЬД В.И. *«Жесткие» и «мягкие» модели* / Математическое моделирование социальных процессов. – М.: МГУ, 1998. – С. 29–51.
6. БЕЛОТЕЛОВ Н.В., БРОДСКИЙ Ю.И., ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н. *Сложность. Математическое моделирование. Гуманитарный анализ: Исследование исторических, военных, социально-экономических и политических процессов.* – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 320 с.
7. БИРШТЕЙН Б.И., БОРШЕВИЧ В.И. *Стратагемы рефлексивного управления в западной и восточных культурах* // Рефлексивные процессы и управление. – 2002. – Т. 2, №1. – С. 27–44.
8. БУСЛЕНКО Н.П. *Моделирование сложных систем.* – М.: Наука, 1968. – 356 с.
9. БУЯНОВ Б.Б., ЛУБКОВ Н.В., ПОЛЯК Г.Л. *Математическая модель длительного вооруженного конфликта* // Проблемы управления. – 2007. – №5. – С. 48–51.
10. БУЯНОВ Б.Б., ЛУБКОВ Н.В., ПОЛЯК Г.Л. *Система поддержки принятия управленческих решений с применением имитационного моделирования* // Проблемы управления. – 2006. – №6. – С. 43–49.
11. ВАГНЕР Г. *Основы исследования операций.* – М.: Мир, 1972. Т. 1. – 335 с.; Т. 2. – 488 с.; Т. 3. – 501 с.

12. ВАЙСБОРД Э.М., ЖУКОВСКИЙ В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения*. – М.: Советское радио, 1980. – 304 с.
13. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Введение в исследование операций*. – М.: Советское радио, 1964. – 388 с.
14. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Элементы теории игр*. – М.: Физматгиз, 1961. – 68 с.
15. ВИШНЯКОВА Л.В., ДЕГТЯРЕВ О.В., СЛАТИН А.В. *Имитационное операционное моделирование процессов функционирования сложных авиационных систем и комплексов моделирования* / Труды конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика». Том 1.– СПб.: СПИИРАН, 2011. – С. 30–41.
16. ВОЕВОДИН А.И. *Стратагемы – стратегии войны, манипуляции, обмана*. – М.: Белые Альвы, 2002. – 256 с.
17. *Война и мир в терминах и определениях* / Под общей ред. Д.О. Рогозина. – М.: Изд. дом «ПоРог», 2004. – 624 с.
18. ВОЛГИН Н.С. *Исследование операций.* – Санкт-Петербург: ВМА им. Н.Г. Кузнецова, 1999. – Часть 1 – 366 с.; Часть 2 – 334 с.
19. ВОЛЬТЕРА В. *Математическая теория борьбы за существование*. – М.: Наука. 1976. – 288 с.
20. ВОРОБЬЕВ Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
21. ГАЛЯЕВ А.А., МАСЛОВ Е.П., РУБИНОВИЧ Е.Я. *Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №3. – С. 134–140.
22. ГАРРЕТ Р., ЛОНДОН Д. *Основы анализа операций на море*. – М.: Воениздат, 1974. – 270 с.
23. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* – М.: Наука, 1976. – 327 с.
24. ГЛУШКОВ И.Н. *Выбор математической схемы при построении модели боевых действий* // Программные продукты и системы. – 2010. – №10. – С. 2–5.

25. ГОЛОВИН Н.Н. *Наука о войне. О социологическом изучении войны*. – Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938. – 248 с.
26. ГОРЕЛИК В.А., ГОРЕЛОВ М.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
27. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Физматлит, 2010. – 244 с.
28. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами.* – 2-е изд. – М.: Синтег, 2005. – 136 с.
29. ДРЕШЕР М. *Стратегические игры. Теория и приложения*. – М.: Советское радио, 1964. – 353 с. (На англ. языке: DRESHER M. *Games of Strategy: Theory and Applications*. – Santa Monica: RAND, Prentice Hall, 1961.)
30. ДОБРОВИДОВ А.В., КУЛИДА Е.Л., РУДЬКО И.М. *Выбор траектории движения объекта в конфликтной среде* // Проблемы управления. – 2011. – №2. – С. 64–75.
31. ДУРОВ В.Р. *Боевое применение и боевая эффективность истребителей-перехватчиков*. – М.: Воениздат, 1972. – 280 с.
32. ДЮБИН Г.Н., СУЗДАЛЬ В.Г. *Введение в прикладную теорию игр.* – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 336 с.
33. ДЮПУИ Р., ДЮПУИ Т. *Всемирная история войн*. – М.: Полигон, 1997. – 3968 с.
34. ЖЕРЕБИН А.М., ЗУРАБЬЯН Н.И. *Модель боевых действий для оценки эффективности перспективного авиационного вооружения* // Вестник МАИ. – 2009. – № 11 – С. 8–13.
35. ЖУКОВСКИЙ В.И., САЛУКВАДЗЕ М.Е. *Некоторые игровые задачи управления и их приложения.* – Тбилиси: Мецниереба, 1998. – 462 с.
36. *История военной стратегии России* / Под ред. В.А. Золотарева. – М.: Кучково поле, 2000. – 592 с.

37. КАЛЯЕВ И.А., ГАЙДУК А.Р., КАПУСТЯН С.Г. *Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов*. – М.: Физматлит, 2009. – 280 с.
38. КОНОНЕНКО А.Ф., ХАЛЕЗОВ А.Д., ЧУМАКОВ В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности.* – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 211 с.
39. КОРЕПАНОВ В.О. *Модели рефлексивного группового поведения и управления.* – М.: ИПУ РАН, 2011. – 133 с.
40. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Задача о диффузной бомбе* // Проблемы управления. – 2011. – №5. – С. 66–73.
41. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления* // Проблемы управления. – 2011. – №1. – С. 21–32.
42. КОРЕПАНОВ В.О., НОВИКОВ Д.А. *Рефлексивная игра полковника Блотто* // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – №1(47). – С. 55–62.
43. КРАСНОЩЕКОВ П.С., ПЕТРОВ А.А. *Принципы построения моделей*. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 264 с.
44. КРАСОВСКИЙ Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений*. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
45. КУКУШКИН Н.С., МОРОЗОВ В.В. *Теория неантагонистических игр*. – М.: МГУ, 1984. – 104 с.
46. КУЛИВЕЦ С.Г. *Моделирование конфликтных ситуаций с несогласованными представлениями у агентов на основе игр на линейных когнитивных картах* // Проблемы управления. – 2010. – №4. – С. 42–48.
47. КУЛЬБА В.В., КОНОНОВ Д.А., КОСЯЧЕНКО С.А., ШУБИН А.Н. *Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем.* – М.: Синтег, 2004. – 296 с.
48. ЛЕФЕВР В.А. *Конфликтующие структуры.* – М.: Сов. радио, 1973. – 159 с.
49. МАЗАЛОВ В.В. *Математическая теория игр и приложения*. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
50. МАЛЯВИН В.В. (перевод с кит.) *Китайская наука стратегии.* – М.: Белые Альвы, 1999. – 414 с.

51. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем.* – М.: Мир, 1973. – 344 с.
52. МЕССНЕР Е.Э. *Всемирная мятеже-война.* – Жуковский; М.: Кучково поле. 2004. – 512 с.
53. *Механизмы управления* / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2011. – 192 с.
54. МИТЮКОВ Н.В. *Определение жертв войн через Ланчестерские модели* // Историческая психология и социология истории. – 2009. – №2. – С. 122–140.
55. МИХАЛЕВ С.Н. *Военная стратегия. Подготовка и ведение войн Нового и Новейшего времени.* – М.: Кучково поле, 2003. – 947 с.
56. МОРЗ Ф., КИМБЕЛЛ Д. *Методы исследования операций.* – М.: Советское радио, 1956. – 307 с.
57. НЕЙМАРК Ю.И. *Математические модели естествознания и техники.* – Нижний Новгород: ННГУ. – Вып. 1. –1994. – 83 с.; Вып. 2. –1996. –154 с.
58. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология.* – М.: Синтег, 2007. – 668 с.
59. НОВИКОВ Д.А. *Игры и сети* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – Том 2, Выпуск 1. – С. 107–124.
60. НОВИКОВ Д.А. *Модели стратегической рефлексии* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №1. – С. 3–22.
61. НОВИКОВ Д.А. *«Когнитивные игры»: линейная импульсная модель* // Проблемы управления. – 2008. – №3. – С. 14–22.
62. НОВИКОВ Д.А. *Математические модели формирования и функционирования команд.* – М.: Физматлит, 2008. – 184 с.
63. НОВИКОВ Д.А. *Рациональная интеллектуализация мультиагентных систем* // Труды международной научно-практической мультиконференции «Управление большими системами-2011». – Т. 3. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 233–238.
64. НОВИКОВ Д.А. *Сетевые структуры и организационные системы.* – М.: ИПУ РАН, 2003. – 103 с.

65. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами.* – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
66. НОВИКОВ Д.А. *Управление системами междисциплинарной природы: результаты и перспективы* // Труды IV Международной конференции по проблемам управления. – М.: ИПУ РАН, 2009. – С. 997–1003.
67. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: Синтег, 2003. – 149 с.
68. ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н. *О сохранении структуры вооруженных сил в процессе вооруженной борьбы* // Дискретный анализ и исследование операций. – 1998. – Сер. 2, Т. 5, №1. – С. 40–55.
69. ПАНЬКОВСКИЙ Ю.И., БОБИН А.В., СЛАТИН А.В. *Технология построения имитационной математической модели воспроизведения хода боевых действий* // Труды конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика». – Т. 1.– СПб.: СПИИРАН, 2011. – С. 229–233.
70. ПЕТРОСЯН Л.А., ГАРНАЕВ А.Ю. *Игры поиска.* – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. – 216 с.
71. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А. *Оптимальный поиск в условиях конфликта*.– Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 77 с.
72. ПЕТРОСЯН Л.А., ЗЕНКЕВИЧ Н.А., СЕМИНА Е.А. *Теория игр*. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.
73. ПЕТРОСЯН Л.А., ТОМСКИЙ Г.В. *Динамические игры и их приложения*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. – 252 с.
74. *Применение теории игр в военном деле* / Сборник переводов. – М.: Советское радио, 1961. – 360 с.
75. РЕЗНИЧЕНКО В.Г. и др. *Тактика*. – М.: Воениздат, 1987. – 496 с.
76. СААТИ Т. *Математические модели конфликтных ситуаций*. – М.: Советское радио, 1977. – 304 с.
77. *Сетевые модели в управлении* / Под ред. Д.А. Новикова, О.П. Кузнецова, М.В. Губко. – М.: Эгвес, 2011. – 443 с.
78. СКАЧКО П.Г., ВОЛКОВ Г.Т., КУЛИКОВ В.М. *Планирование боевых действий и управление войсками с помощью сетевых графиков*. – М.: Воениздат, 1968. – 145 с.

79. *Справочник по исследованию операций* / Под общ. ред. Ф.А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
80. СУЗДАЛЬ В.Г. *Теория игр для флота*. – М.: Воениздат, 1976. – 317 с.
81. СУНЬ-ЦЗЫ, У-ЦЗЫ. *Трактат о военном искусстве*. – М.: АСТ, 2002. – 560 с.
82. ТАРАКАНОВ К.В. *Математика и вооруженная борьба*. – М.: Воениздат, 1974. – 250 с.
83. ТКАЧЕНКО П.Н. и др. *Математические модели боевых действий.* – М.: Советское радио, 1969. – 240 с.
84. ФРОНТИН С.Ю. *Военные хитрости* (*Стратегемы*). – СПб.: Алетейя, 1996. – 160 с.
85. ХРИПУНОВ С.П. *Методы аналитико-эвристического прогнозирования поведения противника в групповом воздушном бою* // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – №7. – С. 61–72.
86. *Человеческий фактор в управлении* / Под ред. Н.А. Абрамовой, Д.А. Новикова. – М.: КомКнига, 2006. – 496 с.
87. ЧУЕВ Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.
88. ЧУЕВ Ю.В., МЕЛЬНИКОВ П.М. и др. *Основы исследования операций в военной технике*. – М.: Советское радио, 1965. – 592 с.
89. ШУМОВ В.В. *Введение в общую пограниометрику*. – М.: Либроком, 2011. – 240 с.
90. ЩЕПКИН А.В. *Деловые имитационные игры в организации и управлении.* – Воронеж: ВГАСУ, 2001. – 384 с.
91. *Algorithmic Game Theory* / Eds. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., and Vazirani V. – N.Y.: Cambridge University Press, 2009. – 776 p.
92. BENKOSKI S. et al. *A Survey of the Search Theory Literature* // Naval Research Logistics. – 1991. – Vol. 38. – P. 469–494.
93. BERKOVITZ D, DRESHER M. *RAND Report №P-1592*. – Santa Monica: RAND, 1959. – 49 p.
94. BLANK L., ENOMOTO C., GEGAX D., MCGUCKIN T., SIMMONS C. *A Dynamic Model of Insurgency: The Case of*

the War in Iraq // Peace Economics, Peace Science and Public Policy. – 2008. – Vol. 14, №2. – P. 1–26.

95. BOREL E. *La théorie du jeu les équations intégrales á noyau symétrique* // Comptes Rendus de l'Académie. – 1921. – Vol. 173. – P. 1304–1308.
96. BOREL E., VILLE J. *Application de la théorie des probabilitiés aux jeux de hasard*. – Paris: Gauthier-Villars, 1938. – P. 105–113.
97. BRACKEN J. *Lanchester Models of the Ardennes Campaign* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 559–577.
98. BRAMS S., KILGOUR D. *National Security Games* // Synthese. – 1988. – Vol. 76. – P. 185–200.
99. BUENO DE MESQUITA B. *Game Theory, Political Economy and the Evolving Study of War and Peace* // American Political Science Review. – 2006. – Vol. 100, №4. – P. 637–642.
100. CAMERER C. *Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interactions*. – Princeton: Princeton University Press, 2003. – 544 p.
101. CHEN X., JIANG N., JING Y., STOJANOVSKI G., DIMIROVSKI G. *Differential Game Model and Its Solutions for Force Resource Complementary via Lanchester Square Law Equation* // Preprints of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, 2011. – P. 14229–14233.
102. CHOWDHURY S., KOVENOCK D., SHEREMETA R. *An Experimental Investigation of Colonel Blotto Game* // CESifo Working Paper Series № 2688, 2009. – 31 p.
103. CLARK G. *The Combat Analysis Model*: Ph.D. Thesis. – Columbus: Ohio State University, 1969. – 138 p.
104. CORCHÓN L. *The Theory of Contests: a Survey* // Review of Economic Design. – 2007. – Vol. 11. – P. 69–100.
105. DAVID I. *Lanchester Modeling and the Biblical Account of the Battles of Gibeah* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 579–584.
106. DAVIS P. *Aggregation, Disaggregation and 3:1 Rule in Ground Combat*. – RAND Research MR-638-AF/A/OSD, 1995. – 52 p.

107. DEITCHMAN S. *A Lanchester Model of Guerilla Warfare* // Operations Research. – 1962. – № 10. – P. 818–827.
108. DUNNIGAN J. *The Complete Wargames Handbook*. – N.Y.: Quill, 1992. – 333 p.
109. DUPUY T. *Understanding War. History and Theory of Combat. 2nd ed.* – Nova Publishers, 1998. – 312 p.
110. ENGEL J. *A Verification of Lanchester's Law* // Operations Research. – 1954. – Vol. 2. № 2. – P. 163–171.
111. FRICKER R. *Attrition Models of the Ardennes Campaign* // Naval Research Logistics. – 1998. – Vol. 45. – P. 1–22.
112. FRIEDMAN L. *Game-theory Models in the Allocation of Advertising Expenditure* // Operations Research. – 1958. – Vol. 6. – P. 699–709.
113. FU Q., LU J. *The Optimal Multi-Stage Contest* // MPRA Paper. – 2007 – №946. – 22 p.
114. FUDENBERG D., TIROLE J. *Game Theory*. – Cambridge: MIT Press, 1995. – 579 p.
115. GAL S. *Search Games*. – N.Y.: Academic Press, 1980. – 216 p.
116. GARFINKEL M., SKAPERDAS S. *Economics of Conflict: An Overview* // Handbook of Defense Economics. Chapter 3 / Eds. T. Sandler, K. Hartley. – Santa Monica, 2006. – 65 p.
117. GROSS O.,WAGNER R. *A Continuous Colonel Blotto Game*. – RAND Corporation RM-408, 1950. – 13 p.
118. JACKSON M., MORELLI M. *The Reasons for Wars* // Handbook on the Political Economy of War / Eds. C. Coyne, R. Mathers. – Northampton: Elgar Publishing, 2011. – 704 p.
119. JACKSON M. O. *Social and Economic Networks*. – Princeton: Princeton University Press, 2008. – 648 p.
120. HAMILTON T., MESIC R. *A Simple Game-Theoretic Approach to Suppression of Enemy Defenses and Other Time Critical Target Analyses* // RAND Report DB-385-AF. – Santa Monica: RAND, 2004. – 65 p.
121. HART S. *Discrete Colonel Blotto and General Lotto Games* // International Journal of Game Theory. – 2008. – Vol. 36. – P. 441–460.

122. HARTLEY D., HELMBOLD R. *Validating Lanchester's Square Law and Other Attrition Models* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 609–633.
123. HAYWOOD O. *Military Decision and Game theory* // Journal of the Operations Research Society of America. – 1954. – Vol. 2. №3. – P. 365–385.
124. HAYWOOD O. *Military Doctrine of Decision and the von Neumann Theory of Games* // RAND Report ATI 210383. – Santa Monica: RAND, 1950. – 107 p.
125. HILLESTAD R, OWEN J. *Experiments in Variable-Resolution Combat Modeling. RAND Note № 3631-DARPA*. – Santa Monica: RAND, 1993. – 46 p.
126. HILLIER F., LIEBERMAN G. *Introduction to Operations Research.* – 8th ed. – Boston. McGraw-Hill, 2005. – 1061 p.
127. HORTALA-VALLVE R., LLORENTE-SAGUER A. *Pure Strategy Nash Equilibria in Non-zero Sum Colonel Blotto Games* // International Journal of Game Theory. – 2011 (forthcoming).
128. HOWARD N. *Theory of Meta-Games* // General systems. – 1966. – №11. – P. 187–200.
129. HUGHES W. *A Salvo Model of Warships in Missile Combat Used to Evaluate Their Staying Power* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42, №2. – P. 267–289.
130. KVASOV D. *Contests with Limited Resources* // Journal of Economic Theory. – 2007. – Vol. 136. – P. 738–748.
131. LANCHESTER F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm.* – London: Constable and Co, 1916. – 243 p.
132. LASLIER J., PICARD N. *Distributive Politics and Electoral Competition* // Journal of Economic Theory. – 2002. – Vol. 103. – P. 106–130.
133. MANSOUR Y. *Computational Game Theory*. – Tel Aviv: Tel Aviv University, 2003. – 150 p.
134. MODZELEWSKI K, STEIN J., YU J. *An Experimental Study of Classic Colonel Blotto Games* // MITReport №6.207/14.15, 2009. – 19 p.

135. MOULIN H. *Game Theory for Social Sciences*. – NY: New York University Press, 1986. – 356 p.
136. MYERSON R.B. *Game Theory: Analysis of Conflict*. – London: Harvard University Press, 1991. – 568 p.
137. O'NEILL B. *A Survey of Game Theory Models on Peace and War.* –Toronto: York University, Centre for International and Strategic Studies, 1990. – 57 p.
138. PERRY N. *Fractal Effects in Lanchester Models of Combat* // Australian Joint Operations Division Defense Science and Technology Organization Report DSTO-TR-2331, 2008. – 23 p.
139. REN W., BEARD R. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control.* – London: Springer, 2008. – 319 p.
140. REN W., YONGCAN C. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks.* – London: Springer, 2011. – 307 p.
141. RICHARDSON L. *Arms and Insecurity: A Mathematical Study of Causes and Origins of Wars*. – Pittsburgh: Boxwood Press, 1960. – 307 p.
142. ROBERSON B. *The Colonel Blotto Game* // Economic Theory. – 2006. – Vol. 29. – P. 1–24.
143. ROBSON R.W. *Multi–Item Contest* // Australian National University. Working Paper. – 2005 – №446. – 27 p.
144. ROUGHGARDEN T. *Selfish Routing and the Price of Anarchy*. – MIT Press, 2005. – 196 p.
145. SCHAFFER M. *Lanchester Models of Guerrilla Engagements* – RAND Memorandum RM-5053-ARPA. – Santa Monica: RAND, 1967. – 56 p.
146. SCHEEBA P., GHOSE D. *Optimal Resource Partitioning in Conflicts based on Lanchester Attrition Model* // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. – Seville, 2005. – P. 5859–5864.
147. SCHELLING T. *The Strategy of Conflict*. – Oxford: Oxford University Press, 1963. – 309 p.
148. SELA A., EREZ E. *Dynamic Contests with Resource Constraints* // Proc. of International Conference "Tournaments, Contests and Relative Performance Evaluation" – North Carolina State University, 2011. – 19 p.

149. SHOHAM Y., LEYTON-BROWN K. *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*. – N.Y.: Cambridge University Press, 2008. – 513 p.
150. SNYDER J. *Election Goals and the Allocation of Campaign Resources* // Econometrica. – 1989. – Vol. 57, №3. – P. 637–660.
151. STONE L.D. *Theory of Optimal Search*. – N.Y.: Academic Press, 1998. – 279 p.
152. TAHA H. *Operations Research: An Introduction.* – 9th ed. – NY: Prentice Hall, 2011. – 813 p.
153. TAYLOR J., BROWN G. *Canonical Methods in the Solution of Variable-Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare* // Operations research. – 1976. – Vol. 24. – P. 44–69.
154. TAYLOR J. *Lanchester Models of Warfare*. – Arlington: Operations Research Society of America, 1983. Vol. 1. — 570 p; Vol 2. – 815 p.
155. TAYLOR J., YILDIRIM U., MURPHY W. *Hierarchy-of-Models Approach for Aggregated-Force Attrition* // Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference. – Orlando, 2000. – P. 925–932.
156. TULLOCK G. *Efficient rent seeking* / Toward a theory of rent-seeking society. – College Station: Texas A&M University Press, 1980. – P. 97–112.
157. *Wargame Bibliography*. – URL: http://australie.uco.fr/ ~cbourles/ GERSAFE/Wargames/Wgbibl.pdf. Дата доступа 31.05.2012.
158. WASHBURN A., KRESS M. *Combat Modeling*. – London: Springer, 2009. – 281 p.
159. WEISS G. *Multiagent Systems: a Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*. – Massachusetts: MIT Press, 1999. – 619 с.
160. WOOLDRIDGE M. *An Introduction to Multi-Agent Systems.* – NY: John Wiley and Sons, 2002. – 376 p.
161. YARED P. *A Dynamic Theory of War and Peace* // Journal of Economic Theory. – 2009. – Vol. 145. – P. 1921–1950.

HIERARCHICAL MODELS OF COMBAT

Dmitry Novikov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Dr of Sc., Deputy Director (novikov@ipu.ru).

Abstract: Modern trends in the design of complex hierarchical models of combat are discussed. First the brief navigator of the mathematical models of combat (including descriptive, simulation, optimization and game-theoretical models) is given. Two canonical models and their extensions are considered in more detail, being the typical examples – Lanchester's equations and colonel Blotto games. Finally, the hierarchical approach to combat modeling is described and analyzed.

Keywords: combat modeling, colonel Blotto game, Lanchester's equations, multi-agent system, hierarchy of models.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. Н. Бурковым