УДК 512.57 + 512.64 + 519.71
ББК 32.813

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ АГЕНТА В НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ МЕТОДАМИ ИДЕМПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ[1]

Николаев Д. А.[2]
(*Липецкий государственный технический университет, Липецк*)

Интеллектуальный характер движения агента, подразумевающий чередование актов восприятия, планирования и частичной реализации плана, делает затруднительным или вовсе невозможным построение математических моделей традиционными средствами. Основной целью настоящей статьи является разработка и исследование математической модели движения агента в дискретной неограниченно неопределенной динамической полностью наблюдаемой внешней среде на основе идемпотентной алгебры. Основное отличие модели заключается в том, что она сформулирована в терминах нелинейных динамических систем над идемпотентными полукольцами и, следовательно, представляется в явной аналитической форме.

Ключевые слова: агент, идемпотентная алгебра, неопределенная внешняя среда, уравнение движения, интеллектное управление.

1. Введение

Процесс движения в статической полностью наблюдаемой внешней среде уже хорошо исследован и является предметом изучения классической теории управления – науки о проектиро-

---

[1] *Работа поддержана РФФИ, проект № 11-07-00580-а.*

[2] *Дмитрий Александрович Николаев, аспирант* (*NikolayevDmitry@yandex.ru*)

вании систем, действующих преимущественно оптимальным образом [5, 6]. По причине того, что в большом количестве практических задач на процесс движения оказывают существенное влияние ничем не ограниченные внешние факторы, процесс планирования приходится осуществлять в режиме реального времени на основе оперативно поступающей информации о состоянии внешней среды [2, 7]. Принципы и свойства теории оптимального управления (принцип оптимальности Беллмана, принцип минимакса, свойство асимптотической устойчивости и др.) при условии неограниченности неопределенности в общем случае не выполняются и, следовательно, утрачивают свою значимость. Задача управления движением в реальном времени становится предметом рассмотрения теории субоптимального управления, искусственного интеллекта, интеллектного управления, нацеленных на проектирование систем, состоящих, как правило, из агентов, руководствующихся более слабыми, чем оптимальность, представлениями о рациональности своих действий [2, 7].

В центре внимания данной работы находится процесс движения «жадного» агента в неограниченно неопределенной динамической полностью наблюдаемой внешней среде. В соответствии с терминологией [7] агента называют жадным, если в процессе принятия решений он придерживается субоптимальной стратегии принятия решений. Основной целью данной работы является разработка и исследование нового класса математических моделей, отличающегося от известных возможностью представления в явной аналитической форме на основе идемпотентной математики – одного из разделов теории полуколец, изучающего полукольца с идемпотентным сложением. Вводится новый класс алгебраических структур и развивается аппарат нелинейных динамических систем с их использованием.

2. Литературный обзор

До недавнего времени постановка и решение задач управления опирались на более или менее традиционные математические модели в форме тех или иных уравнений динамики. Однако в ряде задач интеллектного управления зависимости настолько сложны, что далеко не всегда удается получить аналитическое решение задачи синтеза оптимальных управлений и исследовать их зависимость от параметров модели [3, с. 26]. К примеру, интеллектуальный характер движения агента, подразумевающий чередование актов восприятия, планирования и частичной реализации плана, делает затруднительным или вовсе невозможным построение математических моделей на основе традиционного аппарата алгебраических, дифференциальных или разностных уравнений над полем действительных или комплексных чисел, заставляя многих исследователей переключить свое внимание на изучение математических моделей на основе алгебраических структур [1], отличных от классических.

Недавний прогресс в одной из областей теории полуколец – идемпотентной математике [4, 12, 14, 15] – привел к формулировке ряда задач теории оптимального управления [6] и теории игр [9, 16] в терминах идемпотентных полуколец. Идемпотентная теория оптимального управления [6], как и ее классическая версия [5], исходит из предположения о статичности или, в крайнем случае, ограниченности неопределенных параметров модели. Существуют работы по стохастической теории управления, исходящей из предположения об известности некоторой статистической информации о неизвестных параметрах модели [5]. До сих пор не было обнаружено методов, позволяющих распространить известные результаты идемпотентной теории оптимального управления в условиях ограниченной неопределенности на проблематику задач субоптимального управления в условиях неограниченной неопределенности. То есть на тот случай, когда априорная информация о неизвестных параметрах не предполагается доступной [7, с. 581].

В последнее время существенно возрос интерес к исследованиям проблематики теории игр методами идемпотентной математики: в работе [9] были обнаружены соответствия между традиционными объектами тропической выпуклой геометрии, гиперграфами и играми с нулевой суммой двух игроков [9], положившие начало серии работ на соответствующую тему. Исследуемый в настоящей статье процесс движения агента во внешней среде может рассматриваться как игра двух игроков, один из которых является природой, однако постановка задачи и способ решения имеют существенные различия.

Во-первых, игры в данной работе не являются играми с нулевой суммой и, следовательно, результаты [9] и последующих работ неприменимы в рассматриваемом случае. Во-вторых, динамические процессы в условиях неограниченной неопределенности не исследовались в известных работах по идемпотентной математике. В-третьих, феномен «жадного» поведения, возникающего вследствие неограниченности неопределенности, математически оставался не до конца формализованным как в рамках традиционной математики (уравнений движения «жадного» агента ранее получено не было), так и в рамках идемпотентной математики (не исследовался вовсе). В-четвертых, исследуемая задача потребовала введения нового класса алгебраических структур и развития аппарата нелинейных динамических систем на их основе. В то время как в уже сложившейся идемпотентной математике данный класс алгебраических структур не исследовался и основное внимание уделялось тропическим полукольцам и линейным в тропическом смысле моделям.

3. Постановка задачи

В настоящей работе главным образом используется терминология книги [7] и иногда [2, 3]. Процесс движения в дискретной среде понимается в обычном смысле: агент поочередно изменяет свои состояния на пути к цели, сначала исчезая, а затем появляясь в одной из соседних клеток. Удобно считать, что совместные действия агента и внешней среды выполняются синхронно в некоторые дискретные моменты времени. Внешняя среда является динамической, т.е. она может изменяться в ходе того, как агент реализует очередное запланированное действие. По отношению к агенту внешняя среда считается неопределенной в том смысле, что агент не информирован о принципах ее изменения и вынужден в режиме реального времени отслеживать изменение состояния внешней среды посредством датчиков. Причем неопределенность полагается неограниченной, т.е. планирование траектории осуществляется без использования какой-либо априорной информация о неизвестных параметрах (статистического описания или пределов изменения). В предположении непредсказуемости окружающего мира достигается большая реалистичность модели ценой значительного усложнения математического аппарата, который может потребоваться для ее формализации. В то же время внешняя среда считается полностью наблюдаемой, т.е. датчики агента имеют доступ к полной информации о состоянии внешней среды в каждый момент времени.

Задача агента состоит в том, чтобы определить, какая последовательность действий приведет агента в целевое состояние. Причем для достижения цели в общем случае единственного действия недостаточно, поэтому агенту приходится функционировать в режиме реального времени, чередуя акты восприятия, планирования и частичной реализации плана. Основная проблема заключается в неограниченной неопределенности – всегда могут возникнуть непредвиденные обстоятельства, для которых уже подготовленные действия окажутся неприемлемыми. По аналогии с «жадными» алгоритмами агента принято называть жадным, если при выборе действий он руководствуется субоптимальной стратегией, принимая мгновенно-оптимальное решение на основе полученной в результате текущего акта восприятия информации в надежде, что в конце концов он достигнет цели [7, с. 1021]. Данный способ принятия решений является одним из простейших, так как он не учитывает ни истории актов восприятия, ни возможных последствий и в большинстве случаев действительно позволяет справиться с неограниченной неопределенностью. Стоит подчеркнуть, что следование субоптимальной стратегии принятия решений не предоставляет никаких гарантий достижения цели агенту и, следовательно, по самому своему определению неустойчиво.

4. Идемпотентные полукольца

Идемпотентная математика является составляющей частью теории полуколец, в центре внимания которой находятся полукольца с идемпотентным сложением [4, 6, 12, 14, 15]. Важнейшим примером таких алгебраических структур [1] служит идемпотентное полукольцо N_{min}, носитель которого есть множество $N \cup \{+\infty\}$ вместе с операциями $a \oplus b = min(a, b)$ и $a \otimes b = a + b$ с нулем $\mathbf{0} = +\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$, где N – множество неотрицательных целых чисел. Выполнение свойства идемпотентности $a \oplus a = a$ влечет за собой отсутствие операции вычитания. Однако для математической формализации динамики многих сложных систем идемпотентного полукольца N_{min} или изоморфного ему N_{max} в чистом виде оказывается недостаточно и для преодоления возникающих на этом пути трудностей в данной работе предлагается несколько иной подход, предполагающий введение нового класса алгебраических структур – идемпотентных полуколец F_{min} и F_{max} – и построение на их основе нелинейных динамических систем.

Примеры алгебраических структур с идемпотентным сложением и конкатенацией в качестве умножения можно встретить во многих книгах в контексте изучения формальных языков [14, с. 13], теории автоматов [8, с. 46] и теории графов [11, с. 101]. В данной работе вводится новая однозначная идемпотентная операция сложения. В предшествующих работах операция сложения всегда была многозначной, и поэтому использование подобных алгебраических структур для решения задач дискретной оптимизации было невозможно и решались лишь перечислительные задачи на графах [12,15].

Носителем идемпотентного полукольца F_{min} выступает множество $[n]^* \cup \{+\omega\}$ вместе с операциями идемпотентного сложения $a \oplus b = min(a, b)$ и некоммутативного умножения $a \otimes b = conc(a, b)$ с нулем $\mathbf{0} = +\omega$ и единицей $\mathbf{1} = \varnothing$, где * – оператор замыкания Клини относительно операций объединения $\cup$ и декартова произведения $\times$; $[n]^* = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [n]^k$ – множество слов конечной длины над алфавитом натуральных чисел от 1 до n; $+\omega$ – бесконечное слово; $min(a, b)$ – операция взятия минимума двух слов $a = \alpha_1 \ldots \alpha_k$, $b = \beta_1 \ldots \beta_l \in [n]^* \cup \{+\omega\}$ в смысле отношения порядка $a \le b \Leftrightarrow k\, \alpha_1 \ldots \alpha_k \le_{lex} m\, \beta_1 \ldots \beta_m$; $conc(a, b) = \alpha_1 \ldots \alpha_k\, \beta_1 \ldots \beta_m$ – операция конкатенации; $\le_{lex}$ – отношение лексикографического порядка.

Все символы слова за исключением первого и последнего будем называть внутренними. Если взять в качестве сложения операцию $a \oplus b = max(a, b)$ в смысле введенного отношения порядка, то получится идемпотентное полукольцо F_{max}. Идемпотентные полукольца F_{min} и F_{max} гомоморфны тропическим полукольцам N_{min} и N_{max}, но в то же время имеют много замечательных особенностей, которые при решении задачи моделирования играют решающую роль.

5. Линейная алгебра

Введем основные понятия и операции линейной алгебры [4, 13]. Будем рассматривать векторы и матрицы с элементами из F – одного из идемпотентных полуколец F_{min} или F_{max}. Для любых матриц $A = [a_{ij}] \in F^{m\times n}$, $B = [b_{ij}] \in F^{m\times n}$, $C = [c_{ij}] \in F^{n\times l}$ операции сложения и умножения матриц определяются обычным путем в соответствии с формулами

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{BC\}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj},$$

причем в алгебраических выражениях знак умножения, как обычно, опускается [4]. В случае работы с квадратными матрицами $A \in F^{n\times n}$ оператор замыкания Клини определяется обычным образом как бесконечный степенной ряд,

$$A^* = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots$$

где $I = A^0$ – единичная матрица [4]. Рассмотрим произвольную степень q матрицы $A \in F^{n\times n}$. Для элементов $a_{ij}^{(q)}$ матрицы A^q имеем

$$a_{ij}^{(q)} = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_q\le n} a_{ii_1}a_{i_1i_2}\ldots a_{i_{q-1}j}\ ,$$

откуда следует, что $a_{ij}^{(q)}$ имеет при $F = N_{min}$ смысл наименьшего расстояния между вершинами i и j вдоль всех путей, которые состоят из q дуг. Из этого следует, что при $F = N_{min}$ элементы $a_{ij}^{(*)}$ матрицы A^* имеют смысл наименьшего расстояния между вершинами i и j вдоль всех возможных путей. Если таких путей вообще нет, то $a_{ij}^{(*)} = \mathbf{0}$. Аналогично, при $F = N_{max}$ элементы $a_{ij}^{(*)}$ матрицы A^* имеют смысл наибольшего расстояния между вершинами i и j вдоль всех возможных путей.

Основной мотивацией для введения в данной статье идемпотентных полуколец F_{min} или F_{max} является необычная интерпретация элементов замыкания Клини матрицы смежности $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ графа $\langle V, E\rangle$ с учетом ее специфического заполнения $a_{ij} = ij$ при $(i, j) \in E$ и $a_{ij} = +\omega$ в противном случае, где V – множество вершин; E – множество ребер; ij – слово длины два, соответствующее ребру $(i, j) \in E,\ i \in \mathrm{V}, j \in \mathrm{V}$.

Структура матрицы смежности графа над идемпотентным полукольцами F_{max} и F_{min} аналогична структуре матрицы смежности над числовыми идемпотентными полукольцами N_{max} и N_{min}. Принципиальное отличие заключается в том, что в первом случае элементами матрицы смежности являются слова длины два и бесконечные слова, а во втором случае элементами матрицы смежности являются числа или бесконечности. При $F = F_{min}$ элемент $a_{ij}^{(*)}$ матрицы A^* есть некоторое слово над алфавитом $[n]$, представляющее кратчайший путь между вершинами i и j с точностью до двукратного повторения внутренних символов.

По аналогии с операцией сложения для любых матриц одинакового размера $A = [a_{ij}] \in F^{m\times n}$, $B = [b_{ij}] \in F^{m\times n}$ определяется покомпонентное адамарово [13] произведение матриц $\bullet$, и для векторов $x \in F^m$ и $y \in F^n$ вводится операция внешнего произведения [13] по формулам

$\{A \bullet B\}_{ij} = a_{ij}b_{ij},\ \{xy^{\mathrm{T}}\}_{ij} = x_i y_j,$

где $^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования. Внешнее произведение является довольно необычной операцией, так как, с одной стороны, в результате произведения двух векторов получается матрица, а с другой стороны, его определение формально полностью совпадает с обычным матричным умножением.

Для окончательной формулировки аналитической модели понадобится ввести несколько нетрадиционных операторов и функций. Во-первых, оператор бинаризации b: $F \to F^n$, превращающий скаляр $a = \alpha_1 \ldots \alpha_k \in F$ в n-мерный вектор с единицами на α_1-м, …, α_k-м местах и нулями на всех остальных. Во-вторых, оператор векторизации v: $F^{m\times n} \to F^{mn}$, известный в литературе как оператор *vec* [13] и «укладывающий» столбцы $a_1, \ldots, a_n \in F^m$ произвольной матрицы $A = [a_1 \mid \ldots \mid a_n] \in F^{m\times n}$ в вектор-столбец большего размера $[a_1^{\mathrm{T}} \mid \ldots \mid a_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

В-третьих, оператор отрицания $-$: $F \to F$, переводящий ненулевые элементы в нулевые, а нулевые элементы в единичные. Также зададим функцию $slice_{i,j}$: $F\backslash\{\mathbf{0},\} \to F\backslash\{\mathbf{0}\}$, выделяющую подслово с i-го по j-й символ включительно из слова-аргумента конечной длины $a = \alpha_1 \ldots \alpha_k \in F\backslash\{\mathbf{0}\}$ в соответствии с формулой $slice_{i,j}(a) = \alpha_I \ldots \alpha_J$, где $I = max(1, min(i, j))$, $J = min(k, max(i, j))$, и функцию pop_i: $F\backslash\{\mathbf{0}\} \to F\backslash\{\mathbf{0}\}$, выделяющую i-й символ из слова-аргумента конечной длины $a = \alpha_1 \ldots \alpha_k \in F\backslash\{\mathbf{0}\}$ в соответствии с формулой $pop_i(a) = \alpha_I$, где $I = max(1, min(k, i))$.

Продемонстрируем, как работают введенные понятия на конкретном примере. Если для фиксированного размера алфавита $n = 9$ взять слово a = 1-2-1-1-4-6-7-8-9 и индексы $i = 4$ и $j = 7$, то справедливо следующее тождество

$$slice^b_{4,7}\left(1-2-1-\underline{1-4-6-7}-8-9\right)=$$

$$=\left(1-4-6-7\right)^b=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^v,$$

Для упрощения обозначений будем считать, что $slice_i$ является краткой формой записи $slice_{1,i}$. Очевидно, что введенные функции являются нелинейными над идемпотентными полукольцами F_{min} и F_{max}. Сочетание нелинейности с новым нетривиальным классом алгебраических структур позволило преодолеть ограниченность инструментария как идемпотентной, так и классической математики и заложить фундамент для формулировки в аналитическом виде искомых законов динамики.

6. Уравнения движения агента

Движение «жадного» агента в дискретной неограниченно неопределенной динамической полностью наблюдаемой внешней среде описывается нелинейной динамической системой над идемпотентным полукольцом F_{min}:

$$(1)\quad \begin{cases}\gamma[t]=x^{\mathrm{T}}[t-1]\left(\bar{u}[t]\bar{u}^{\mathrm{T}}[t]\bullet A\right)^{*}g[t],\\ x[t]=\begin{cases}pop^b_{2c[t]}(\gamma[t]), & \text{если }\ \gamma[t]\neq\mathbf{0},\\ x[t-1], & \text{иначе};\end{cases}\\ y[t]=\begin{cases}slice^b_{2c[t]}(\gamma[t]), & \text{если }\ \gamma[t]\neq\mathbf{0},\\ x[t-1], & \text{иначе};\end{cases}\\ x[0]=x_0,\ u[t]=\theta[t],\ t\in N;\end{cases}$$

где $u[t] \in F^n$ – вход агента в момент t; $x[t] \in F^n$ – состояние агента в момент t; $y[t] \in F^n$ – выход агента в момент t; $\theta[t] \in F^n$ – состояние внешней среды в момент t; $A \in F^{n\times n}$ – матрица смежности конфигурационного пространства агента; $g[t] \in F^n$ – целевое состояние агента в момент t; $\bullet$ – операция адамарова произведения; $^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования; $\bar{u}[t]\bar{u}^{\mathrm{T}}[t] \in F^{n\times n}$ – внешнее произведение логического отрицания вектора входов $u[t]$ на себя; * – оператор замыкания Клини; b – оператор бинаризации; $\gamma[t] \in F$ – кратчайший путь на графе свободного конфигурационного пространства из $[t]$ состояния агента $x[t-1] \in F^n$ в текущее целевое $g[t] \in F^n$; $slice^b{}_{2c[t]}$ и $pop^b{}_{2c[t]}$ – введенные ранее функции; $c[t]$ – скорость агента.

Раскроем более подробно детали построения модели. Подход к моделированию опирается на использование конструкции $\bar{u}[t]\bar{u}^{\mathrm{T}}[t]$, в которой фигурирует вход агента $u[t]$ в момент t, оператор отрицания, оператор транспонирования и адамарово произведение. В случае коммутативности операции умножения или бинарности векторов $\xi, \eta \in F^n$ выполняется тождество, связывающее обычное $\cdot$ и адамарово $\bullet$ умножение

(2) $\xi\eta^{\mathrm{T}} \bullet A = diag\,\xi \cdot A \cdot diag\,\eta$,

где $diag$: $F^n \to F^{n\times n}$ – оператор диагонализации, преобразующий вектор в диагональную матрицу. Формулу (2) легко проверить исходя из соотношений

$$\{\xi\eta^{\mathrm{T}} \bullet A\}_{ij} = \xi_i\ \eta_j\ a_{ij},$$

$$\{diag\,\xi \cdot A \cdot diag\,\eta\}_{ij} = \xi_i\ a_{ij}\ \eta_j,$$

явно свидетельствующих о том, что выражения в левой и провой частях (2) эквивалентны с точностью до порядка следования скалярных множителей η_j и a_{ij}.

Конструкцию $\xi\eta^{\mathrm{T}} \bullet A$ в формуле (1) удобнее использовать для записи закона движения агента, однако в литературе [4, 16] чаще встречается ее аналог – конструкция $diag\,\xi \cdot A \cdot diag\,\eta$, получившая название диагонального масштабирования (*diago-*

nal scaling). Поясним ее смысл в контексте исследуемой задачи аналитического описания динамики одиночного агента.

Пусть на вход агента $u[t]$ подается состояние внешней среды $\theta[t]$, содержащий единицы на местах, соответствующих заблокированным внешней средой вершинам графа конфигурационного пространства, и нули на всех остальных. Тогда вектор $\bar{u}[t]$ содержит нули на местах, соответствующим заблокированным внешней средой вершинам графа конфигурационного пространства, и единицы на всех остальных. Учитывая, что A является матрицей смежности конфигурационного пространства, можно заключить, что матрица $\bar{u}[t]\bar{u}^{\mathrm{T}}[t] \bullet A$ является матрицей смежности свободного конфигурационного пространства, т.е. графом не занятой внешней средой подпространства конфигурационного пространства.

Следовательно, если на указанную матрицу подействовать оператором Клини, то получится матрица кратчайших путей $\left(\bar{u}[t]\bar{u}^{\mathrm{T}}[t] \bullet A\right)^{*}$ на графе свободного конфигурационного пространства. Состояние агента $x[t-1]$ и цель агента $g[t]$ в модели (1) являются бинарными векторами с единственной единицей на некотором месте, так как полагается, что агент может занимать ровно одну клетку конфигурационного пространства и целью агента также служить ровно одна клетка конфигурационного пространства. Тогда если матрицу кратчайших путей на свободном конфигурационном пространстве умножить слева на транспонированный вектор состояния в предыдущий момент $x^{\mathrm{T}}[t-1]$ и справа на текущую цель $g[t]$, то скалярное выражение $\gamma[t] = x^{\mathrm{T}}[t-1]\left(\bar{u}[t]\bar{u}^{\mathrm{T}}[t] \bullet A\right)^{*} g[t]$ будет словом, представляющим некоторый конкретный кратчайший путь с точностью до двухкратного повторения внутренних символов в свободном конфигурационном пространстве в данный момент времени. Условие $\gamma[t] = \mathbf{0}$ будет выполняться только в том случае, если таких путей вообще нет.

Если $\gamma[t] \neq \mathbf{0}$, то текущее состояние $x[t]$ получается из величины $\gamma[t]$ в результате действия на нее композиции функции $pop_{2c[t]}$ и оператора бинаризации b. Наличие множителя 2 в значении параметра $2c[t]$ функции pop, связано с дублированием внутренних символов в слове $\gamma[t]$. В случае $\gamma[t] = \mathbf{0}$, когда цель недостижима, агенту делать ничего не нужно и текущее состояние $x[t]$ полагается равным предыдущему $x[t-1]$. Выход агента $y[t]$, содержащий информацию о текущих намерениях агента вычисляется аналогичным образом с использованием композиции функции $slice_{2c[t]}$ и оператора бинаризации b. Принципиальное отличие функций $pop^b{}_{2c[t]}$ и $slice^b{}_{2c[t]}$ заключается в том, что в результате действия функции $pop^b{}_{2c[t]}$ получается бинарный вектор состояния с единственной единицей, а в результате действия функции $slice^b{}_{2c[t]}$ получается бинарный вектор с несколькими единицами. Данный факт отражает различие между векторами состояний $x[t]$ и выходов $y[t]$. Вектор состояния всегда содержит ровно одну единицу, так как агент может занимать ровно одну клетку конфигурационного пространства. Вектор выхода содержит произвольное количество единиц, так как агент занимает одну из клеток конфигурационного пространства и в дополнение к этому может намереваться посетить еще несколько.

Динамика системы (1) подчинена следующему алгоритму.

0. Инициализация. Матрица смежности конфигурационного пространства A, целевое состояние $g[t]$ и скорость $c[t]$ в каждый момент времени считаются заданными, $t = 1$.

1. Для начала работы системы подается вектор начального состояния $x[0]$.

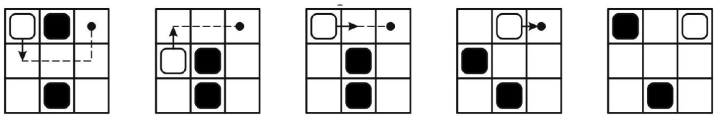
2. С датчиков получается вектор состояния внешней среды $\theta[t]$, вычисляется вход $u[t] = \theta[t]$.

3. Вычисляются новое состояние $x[t]$ и выход $y[t]$.

4. Проверяется критерий останова: если $x[t] = y[t]$, то система достигла своего устойчивого состояния, иначе $t = t + 1$ и происходит переход на шаг 2.

Так как все основные переменные $u[t]$, $x[t]$ и $y[t]$ являются бинарными векторами, с динамикой данной системы можно ассоциировать геометрические объекты – вращающийся единичные гиперкубы. И тогда каждая итерация системы (1) будет интерпретироваться как действие группы поворотов этих гиперкубов. Как правило, система достигает своего устойчивого состояния, тем самым прекращая процесс вращения всех гиперкубов. Однако динамический процесс (1) в общем случае не является асимптотически устойчивым в силу специфики предметной области, которую он описывает: неустойчивость в первую очередь связана с наличием неограниченной неопределенности в условии исходной модели. Те вырожденные случаи, когда определяемый уравнением (1) процесс не сходится ни за конечное, ни за бесконечное время, вызваны крайне неблагоприятными условиями внешней среды и редко встречаются на практике. Таким образом, приведенное уравнение (1) является алгебраической моделью движения «жадного» агента в дискретной динамической неопределенной полностью наблюдаемой внешней среде, на основе которой решается и задача управления этим агентом.

Пример вычислений



$$u[1] \quad u[2] \quad u[3] \quad u[4] \quad u[5]$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{v}$$

$$x[1] \quad x[2] \quad x[3] \quad x[4] \quad x[5]$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v}$$

$$y[1] \quad y[2] \quad y[3] \quad y[4] \quad y[5]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v} \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}^{v}$$

Рис. 1. Процесс движения

Каждый такт работы системы (1), как показано на рис. 1, интерпретируется как субоптимальное перемещение (обозначаемое стрелкой →) агента (обозначаемого незакрашенным квадратом ▢) в дискретном конфигурационном пространстве (на плоской решетке) к целевому состоянию (обозначаемого кругом ●) вдоль мгновенно-оптимальной траектории (обозначаемой пунктирной линией). Таким образом, агент за четыре шага достигает целевого состояния, согласуя свое движение с динамичным окружением, в каждый момент времени блокирующего часть доступных агенту состояний (обозначаемых закрашенными квадратами ■).

Основываясь на данных рис. 1 можно видеть эквивалентность геометрического и алгебраического описания модели. После погружения в среду агент из начального состояния $x[0]$ вырабатывает последовательность состояний $x[1]$, $x[2]$, $x[3]$, $x[4]$ и выходов $y[1]$, $y[2]$, $y[3]$, $y[4]$, соответствующих полученным им входам $u[1]$, $u[2]$, $u[3]$, $u[4]$ и заданной скорости $c[t] = 1$. Как оказалось, «жадный» агент не находит истинную оптимальную траекторию, решая задачу за четыре итерации, в то время как это было возможно сделать за три. Таким образом, пример явно демонстрирует неэквивалентность понятий субоптимальности и оптимальности.

В разобранном примере при $c[t] = 1$ за одну итерацию «жадный» агент может передвинуться к цели ровно на одну клетку вдоль мгновенно-оптимальной траектории. В этом случае агент может либо находиться в одной клетке и намереваться посетить еще одну клетку, если он не достиг цели, либо находиться в одной клетке и намереваться остаться в ней же, если цель недостижима или эта клетка является его текущей целью. Следовательно, бинарные вектор выхода $y[t]$ всегда содержат либо одну, либо две единицы. В более сложных ситуациях единиц может быть произвольное количество.

7. Заключение

Несмотря на длительную историю и возрастающее прикладное значение задач управления в условиях неопределенности, алгебраических моделей изучаемого процесса движения агента к настоящему времени получено не было. Традиционная методика не ставит целью дать исчерпывающее решение задачи, ограничиваясь разработкой алгоритмов и оставляя поиск тех уравнений, что потенциально должны присутствовать за кадром, для дополнительного исследования. Полученные в настоящей статье результаты в области аналитического описания дискретной динамики представляют теоретический интерес и служат дополнением к известным алгоритмическим решениям, попыткой строгого и глубокого исследования корректно заданных на инженерном уровне моделей с помощью аппарата идемпотентной математики.

Одним из главных выводов является замечание о том, что даже в тех случаях, когда зависимости в области интеллектного управления настолько сложны и не допускают аналитической формулировки в рамках классической математики, ситуация не является полностью безнадежной, и с помощью идемпотентной математики удается формализовать даже те задачи, которые на первый взгляд кажутся чуждыми какой бы то ни было формализации. Также в работе получен новый класс алгебраических структур и с их помощью построен важный класс нелинейных динамических систем. Исследуемые методы и модели находят приложения в компьютерной графике, робототехнике и многих других областях.

Литература

1. БУРБАКИ Н. *Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра.* – М.: ГИФМЛ, 1962. – 516 с.
2. ВАСИЛЬЕВ С.Н., ЖЕРЛОВ А.К., ФЕДОСОВ Е.А., ФЕДУНОВ Б.Е. *Интеллектное управление динамическими системами.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 352 с.

3. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. – М.: ИПУ РАН, 2005. – 138 с.
4. КРИВУЛИН Н.К. *Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем.* – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. – 256 с.
5. КУРЖАНСКИЙ А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*. – М.: «Наука», 1977. – 392 с.
6. МАСЛОВ В.П., КОЛОКОЛЬЦЕВ В.Н. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* – М.: Наука, 1994. – 149 с.
7. РАССЕЛ С., НОРВИГ П. *Искусственный интеллект: современный подход.* – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.
8. ХОПКРОФТ Д., МОТВАНИ Р., УЛЬМАН Д. *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 528 с.
9. ALLAMIGEON X., GAUBERT S., KATZ R. *Tropical polar cones, hypergraph transversals, and mean payoff games* // Linear Algebra and its Applications. – 2011. – Vol. 435, №7. – P. 1549–1574.
10. BUTCOVIC P. *Max-linear systems: Theory and algorithms.* – London : Springer, 2010. – 267 p.
11. BAŞAR T., OLSDER G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. – 519 p.
12. CARRE B. *Graphs and Networks.* – London: Oxford University Press, 1979. – 277 p.
13. HOGBEN L. *Handbook of Linear Algebra*. – London : Chapman & Hall / CRC, 2007. – 435 p.
14. GOLAN J.S. *Semirings and their applications.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 396 p.
15. GONDRAN M., MINOUX M. *Graphs, Dioids and Semirings: New Models and Algorithms.* – New York: Springer Science + Business Media, 2008 – 383 p.

16. KOLOKOLTSOV V.N., MALAFEYEV O.A. *Understanding game theory: introduction to the analysis of many agent systems with competition and cooperation.* – Singapore : World Scientific, 2010. – 286 p.

MODELLING AND CONTROL OF AGENT'S MOTION IN UNCERTAIN ENVIRONMENT WITH METHODS OF IDEMPOTENT ALGEBRA

Nikolayev Dmitry, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Graduate student (NikolayevDmitry@yandex.ru).

Abstract: *Intelligent nature of agent motion always implies several stages* (*perception, planning and partial implementation of a plan*). *That is why it is difficult or even impossible to build mathematical models based on traditional mathematical tools such as algebraic, differential or difference equations over the field of real or complex numbers. Therefore the main subject of the present article is using the methods of idempotent algebra to develop and research the model of agent motion in discrete unbounded uncertain dynamical completely observable environment. The model is formulated in terms of a nonlinear dynamical system over idempotent semi-rings*, *and*, *thus, has explicit analytical form.*

Keywords: agent, idempotent algebra, uncertain environment, motion equation, intelligent control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. К. Погодаевым