

УДК 534.01+621.313

ББК 078.8

**БИФУРКАЦИИ ДВИЖЕНИЙ НАГРУЖЕННОГО  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ДЕМПФИРОВАННОГО МАЯТНИКА  
(СИНХРОНИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ  
С СЕТЬЮ)**

**Скубов Д. Ю.<sup>1</sup>**

*(Санкт-Петербургский политехнический университет,  
Санкт-Петербург)*

*В предлагаемой статье исследуются вопросы синхронизации электрической машины с сетью. Математическое моделирование проводится численно-аналитическими методами на основе асимптотически упрощенных уравнений динамики синхронной электрической машины. Доказывается возможность более грубой (чем это принято на сегодня) синхронизации машины с сетью, а именно, большего начального рассогласования частот вращения ротора турбогенератора и частоты сети.*

Ключевые слова: синхронные электрические машины, нелинейная динамика, электромеханика, устойчивость периодических движений.

## **1. Введение**

Проблема стабильного сохранения синхронного режима электрической машины с общей электрической цепью возникла в середине XX века и сохраняет свою актуальность и на сегодня.

Возможность выхода машины из синхронизма при изменении сетевой нагрузки и, наоборот, не выхода ее на синхронный режим при подключении к общей сети вызывает необходимость аккуратного моделирования переходных процессов такой электромеханической системы.

---

<sup>1</sup> Дмитрий Юльевич Скубов, доктор физико-математических наук, профессор, (Санкт-Петербург, ул. Бассейная, д. 71, кв. 32, (тел. (812) 387-81-52, skubov.dsk@yandex.ru).

В основе исследования таких переходных процессов лежат уравнения Парка–Горева (см., например, [1]). Вместе с тем при их непосредственном использовании неоднократно возникали противоречащие физике (реальным «экспериментам»), математические выводы. А именно, неправильное механическое моделирование приводило к неадекватным выводам об устойчивости работы машины с сетью. Последнее нередко приводило к катастрофическим ситуациям (разгону ротора), наступавшим, например, при «сильном регулировании» напряжением возбуждения – его пропорционально-линейном увеличении при «набросе» нагрузки. Более подробно об этом написано в монографии Ф.Ф. Родюкова [6].

Пожалуй, первой работой, дающей математическое объяснение указанного явления, можно считать небольшую книгу А.А. Янко-Триницкого [7]. Ее основным выводом является то, что при изменении нагрузки происходит изменение особой точки (угла нагрузки в синхронном режиме), и если в результате изменения нагрузки исходная особая точка выходит из зоны притяжения новой, то это и ведет к нарушению синхронизма (аварийному режиму). Конечно, за счет управления напряжением обмотки возбуждения возможно сохранение устойчивости, но для этого требуется не режим прямого регулирования, а регулирование с обратной связью, что, в свою очередь, достаточно трудоемко и, как будет показано ниже, не является необходимым.

## 2. Модель Трикоми

Одной из первых и наиболее простых математических моделей синхронного генератора (двигателя) является маятниковая модель, приведенная в книге Дж. Стокера [9] и описываемая уравнением Трикоми:

$$(1) \quad \ddot{\vartheta} + \beta \dot{\vartheta} + u \sin \vartheta = m.$$

Здесь  $\vartheta$  – угол рассогласования магнитных осей ротора и вращающегося магнитного поля статора;  $u$  – параметр управления, определяемый напряжением возбуждения синхронной машины;  $m$  – момент двигателя, вращающего ротор генератора

(турбины для турбогенератора) или тормозящий вращение – момент нагрузки (при работе машины в режиме двигателя). Слагаемое  $\beta \dot{\vartheta}$ , формально описывает демпфирование эквивалентного маятника. Для синхронной машины оно возникает вследствие линеаризации момента нагрузки как функции угловой скорости относительно синхронного режима  $\dot{\vartheta} = 0$ ,  $\vartheta_* = \arcsin(m/u)$ .

Основная цель исследования уравнения (1) применительно к динамике синхронной машины состоит в определении условий, обеспечивающих стремление любого из его решений к положению равновесия при стремлении независимой переменной (времени) к бесконечности. Такое поведение решений характеризует процесс втягивания машины в синхронизм независимо от начальных условий (на самом деле, при достаточно небольших начальных скольжениях – рассогласованиях скоростей вращения ротора и электромагнитного поля статора). Идеализированная модель динамики синхронной машины, в «первом приближении» описываемая уравнением Трикоми, совсем недавно была модифицирована группой петербургских ученых – механиков под руководством профессора К.Ш. Ходжаева (см. далее).

Более сложной, но не менее важной для практики, является задача определения вращательных движений уравнения (1), так называемых предельных циклов второго рода (замкнутых траекторий вокруг фазового цилиндра), которые для синхронной машины отвечают асинхронному ходу с постоянным средним скольжением.

Отыскание условий устойчивости синхронного режима (устойчивого положения равновесия «эквивалентного маятника») сводится к нахождению соотношения параметров  $m$  и  $\beta$ , которое соответствует гетероклинической фазовой траектории (сепаратрисе, идущей из седла в седло). То есть необходимо найти сепаратрису, соединяющую точки  $-\pi - \alpha$  и  $\pi - \alpha$  ( $\alpha = \arcsin(m/u)$ ,  $|m/u| < 1$ ), эквивалентные на фазовом цилиндре.

Основные типы движений, описываемые уравнением Трикоми, в случае  $m > 0$ ,  $u > 0$  и  $\beta > 0$  приведены на рис. 1. Так на рис. 1(а) показан случай устойчивости синхронного режима. На рис. 1(б) – «граничный» случай гетероклинической сепаратри-

сы, идущей из седла в седло. На рис. 1(в) – случай разделения областей движений на сходящиеся или к устойчивому фокусу (синхронному режиму), или к устойчивой ротации (асинхронному режиму с постоянной средней угловой скоростью – скольжению машины).

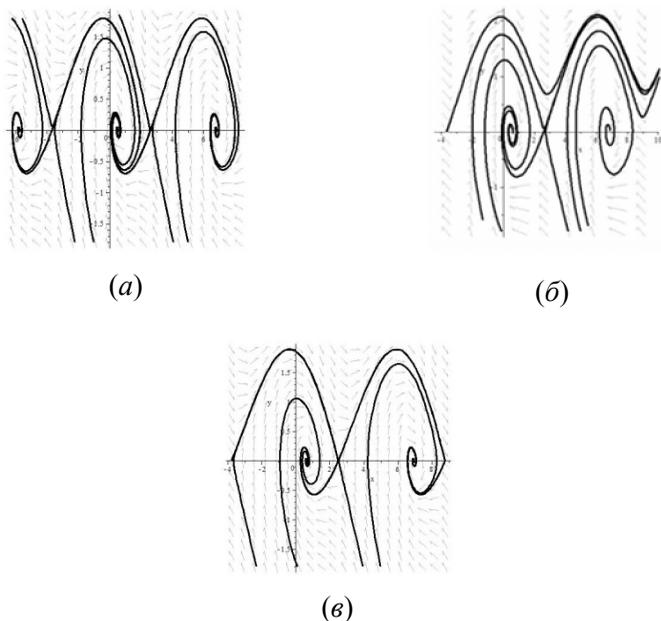


Рис. 1.

Имеет смысл приведение фазового портрета уравнения Трикоми в случае наличия ротации – предельного цикла второго рода на цилиндрическом фазовом пространстве (рис. 2). Здесь предполагается наличие устойчивой ротации и устойчивого фокуса (для случая  $m > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $m/u < 1$ ). Фокус имеет место при  $\beta^2 < 4\sqrt{u^2 - m^2}$ .

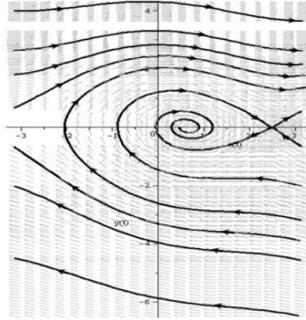


Рис. 2.

Для отыскания движения, отвечающего гетероклинической сепаратрисе (рис. 1(б)), в работе используется полиномиальная аппроксимация гладкой кривой, заданной на отрезке некоторой аналитической функцией по значениям ее самой и ее производных (только их) на концах этого отрезка.

Иными словами, пусть  $y(x)$  – некая аналитическая функция, заданная на отрезке  $[a, b]$ , и известны значения  $y(a), y'(a), \dots, y(b), y'(b), \dots$ . Функция  $y(x)$  может удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению, из которого можно найти  $y'(a), y'(b)$  и остальные производные на концах отрезка. Функция  $y(x)$  далее разыскивается в виде степенного ряда, вид которого был предложен петербургским профессором Р.Ф. Нагаевым:

$$(2) \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} \xi + v_k^{(0)} \eta) (\xi \eta)^k,$$

где  $\xi(x) = (x - a)/(b - a)$ ,  $\eta(x) = (b - x)/(b - a)$ . Такое представление функции  $y(x)$ , как будет показано ниже, сохраняет форму разложения для всех производных, заменяя коэффициенты  $u_k^{(0)}, v_k^{(0)}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , для самой функции  $y(x)$  на  $u_k^{(n)}, v_k^{(n)}$  для ее производной  $y^{(n)}(x)$ , умноженной на  $(b - a)^n$ . Эти коэффициенты находятся рекуррентно, что удобно для их расчета.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения могут быть получены следующим образом. Продифференцируем  $y(x)$ , используя выражение (2):

(3)

$$\begin{aligned}
 (b-a)y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^{(0)}\xi + v_k^{(0)}\eta) (\xi\eta)^{k-1} k(\eta - \xi) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^{(0)}(\xi\eta - \xi(1-\eta)) + \\
 &+ v_k^{(0)}(\eta(1-\xi) - \xi\eta)) (\xi\eta)^{(k-1)} k = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-u_k^{(0)}\xi + v_k^{(0)}\eta) k (\xi\eta)^{(k-1)} + \sum_{k=0}^{\infty} 2k(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)(u_k^{(0)}(\xi + \eta) - v_k^{(0)}(\xi + \eta)) (\xi\eta)^k + \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-u_{k+1}^{(0)}\xi + v_{k+1}^{(0)}\eta) (\xi\eta)^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) (\xi\eta)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-u_{k+1}^{(0)}\xi - v_{k+1}^{(0)}) (\xi\eta)^k.
 \end{aligned}$$

Сравнивая (3) с выражением

$$y'(x)(b-a) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^{(1)}\xi + v_k^{(1)}\eta) (\xi\eta)^k,$$

получаем

$$\begin{aligned}
 (4) \quad u_k^{(1)} &= (2k+1)(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) - (k+1)u_{k+1}^{(0)}, \\
 v_k^{(1)} &= (2k+1)(u_k^{(0)} - v_k^{(0)}) + (k+1)v_{k+1}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Действуя по индукции, найдем связь между остальными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad u_{k+1}^{(n)} &= \frac{2k+1}{k+1} (u_k^{(n)} - v_k^{(n)}) - \frac{1}{k+1} u_k^{(n+1)}, \\
 v_{k+1}^{(n)} &= -\frac{2k+1}{k+1} (u_k^{(n)} - v_k^{(n)}) + \frac{1}{k+1} v_k^{(n+1)}.
 \end{aligned}$$

Перейдя к новой независимой переменной  $\mathcal{Q}$ , перепишем уравнение (1) в виде

$$(6) \quad \frac{d\omega}{d\vartheta} \omega + \beta \omega + u \sin \vartheta = m,$$

принимая за независимую переменную угол  $\vartheta$ , а неизвестную  $\omega = \dot{\vartheta}$ . Значения производных в седловых точках могут быть найдены последовательным дифференцированием (6) с подстановкой значений функций в крайних (седловых) точках:  $\vartheta_1 = \pi - \alpha$  и  $\vartheta_2 = -\pi - \alpha$ .

Для первых производных  $\omega'(\vartheta_1)$  и  $\omega'(\vartheta_2)$  получаем квадратное уравнение:

$$(7) \quad \omega'^2 + \beta \omega' - u \cos \alpha = 0,$$

его корни

$$\omega'_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + u \cos \alpha}.$$

В результате находим направляющие – касательные сепаратрис в седловых точках с положительным и отрицательным наклоном. Для старших производных имеем выражения

$$(8) \quad \begin{aligned} \omega''_{1,2} &= \frac{u \sin \alpha}{3\omega'_{1,2} + \beta}, \\ \omega'''_{1,2} &= -\frac{3\omega''_{1,2} - u \cos \alpha}{4\omega'_{1,2} + \beta}, \\ \omega^{IV}_{1,2} &= -\frac{10\omega'''_{1,2}\omega''_{1,2} + u \sin \alpha}{5\omega'_{1,2} + \beta}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Интегрируя (6) на отрезке между седловыми точками, получим

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi} \beta \int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} \omega(\vartheta) d\vartheta = m.$$

После подстановки в (9) найденного разложения  $\omega(\vartheta)$  и используя соотношение (2), в котором роль функции  $y(x)$  играет  $\omega(\vartheta)$ , и, соответственно,  $a$  и  $b$  равны  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , получаем алгебраическое уравнение  $f(m, \beta) = 0$ , определяющее критическое значение  $m_{cr}(\beta, u)$ , которое отвечает сепаратрисе, идущей из седла в седло при заданном значении параметра управления  $u$ . Случай

$m(u) < m_{cr}(\beta, u)$  соответствует глобальной устойчивости положения равновесия (синхронного движения) рис. 1(а). Если же  $m(u) > m_{cr}(\beta, u)$ , то фазовое пространство разделяется на два потока траекторий, стремящихся либо к положению равновесия, либо к стационарному вращению с периодической по углу угловой скоростью (дихотомия) рис. 1(в).

Кривая  $m_{cr}(\beta, u)$ , полученная на основе полиномиальной аппроксимации вида (2), при значении параметра управления  $u = 1$  приведена на рис. 3(а). На нем же приведена та же бифуркационная кривая, но полученная подстановкой параметров, отвечающих ее аппроксимации на основе метода гармонического баланса. Ограничиваясь первой гармоникой, решение уравнения (6), отвечающее сепаратрисе, (в случае  $u = 1$ ) записывается в виде

$$\omega_* = \omega_0 + \omega_c \cos \vartheta + \omega_s \sin \vartheta.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (6) и балансирования по гармоникам получаются следующие выражения для средней угловой скорости и для амплитуд первых гармоник:

$$\omega_0 = \frac{m}{\beta}, \quad \omega_c = \frac{\omega_0}{\beta^2 + \omega_0^2}, \quad \omega_s = -\frac{\beta}{\beta^2 + \omega_0^2}.$$

В случае гетероклинической сепаратрисы подстановкой в ее гармоническое приближение найденных выражений коэффициентов и значений аргументов – либо  $\vartheta_1 = -\pi - \alpha$ , либо  $\vartheta_2 = -\pi - \alpha$  (в седловых точках),  $\alpha = \arcsin(m)$  – получаем алгебраическое соотношение

$$\omega_0 - \omega_c \cos \alpha + \omega_s \sin \alpha = 0,$$

которое и является уравнением бифуркационной кривой. График этого уравнения, как и график, полученный на основе полиномиальной аппроксимации, изображён на рис. 3(а).

Оценки бифуркационной кривой для уравнения Трикоми, полученные разными способами можно найти в большом числе научных изданий, в частности, в монографии Г.А. Леонова, Н.В. Кондратьевой [3] (рис. 4.14, с. 149).

Среди первых оценок бифуркационной кривой можно отметить следующие:

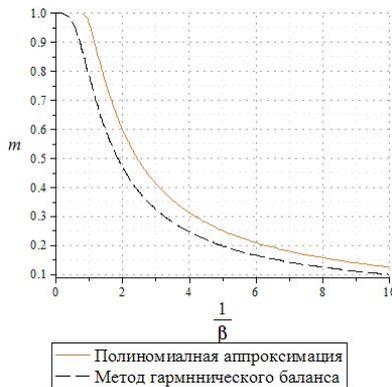
1.  $\beta^2 > \sin^2 \alpha / (\pi(\sin \alpha + \pi \cos \alpha))$  – оценка Трикоми «сверху»,
2.  $\beta^2 < (1 + \sin \alpha) / (\pi - 2\alpha)$  – оценки Трикоми «снизу»,
3.  $\beta^2 > 4 \sin^2 \alpha / (2\pi \sin \alpha + \pi^2 \cos \alpha)$  – оценка К. Бёма.

Соответствующие бифуркационные кривые показаны на рис. 3(б).

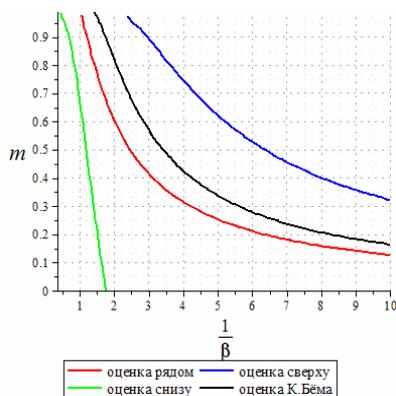
Семейство кривых, отвечающих гетероклинической сепаратрисе при различных значениях параметра управления  $u$ , можно перестроить как совокупность кривых  $m_{cr}(u)$  для заданных значений  $\beta$ . Можно показать, что если при некоторых фиксированных значениях  $\beta$  и  $u$  момент нагрузки  $m(t)$  равномерно стремится к  $m_{cr}(u, \beta)$  при  $t \rightarrow \infty$ , оставаясь при этом меньше его самого, равного  $m_{cr}(u, \beta)$ , то движение ротора синхронной машины сходится к синхронному вращению (устойчивому фокусу для «эквивалентного маятника», отвечающему  $m = m_{cr}(u, \beta)$ ) (см. Леонов Г.А., Смирнова В.Б. [4]).

Среднее значение угловой скорости ротора синхронной машины (в наших обозначениях – скольжение) в случае асинхронного хода (предельного цикла второго рода «эквивалентного маятника») определяется усреднением уравнения (6)

$$(10) \bar{\omega} = \langle \omega \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\vartheta) d\vartheta = m / \beta.$$



(a)



(б)

Рис. 3.

Отметим, что предельные циклы второго рода (ротационные движения маятника) могут быть расположены как в верхней, так и в нижней части цилиндрического фазового пространства (в зависимости от знаков  $m$  и  $\beta$ ). Изменение знака момента соответствует изменению характера работы синхронной машины (для введенных обозначений  $m > 0$  – генератор,  $m < 0$  – двигатель). Изменение знака  $\beta$  (эквивалентного «демпфирования») определяется характером зависимости момента от угловой скорости. Для генератора (в случае  $m > 0$ ) наиболее естественным является уменьшение момента двигателя (для турбогенератора – паровой турбины), вращающего ротор, при увеличении его угловой скорости. В случае  $m < 0$  (работы синхронной машины в режиме двигателя) возможен как первый, так и второй вид зависимости момента нагрузки  $m$  от угловой скорости, например, при работе синхронной машины в качестве привода плунжерного насоса возможны как падающие, так и возрастающие участки стационарной зависимости вращающего момента от угловой скорости.

Устойчивость предельных циклов второго рода определяется абсолютной величиной мультипликатора уравнения в вариациях, записанного относительно периодического стационарного ротационного режима  $\omega(\vartheta)$ . Уравнение в вариациях получается

линеаризацией уравнения (6) относительно известного (найденного) стационарного вращения  $\omega_* = \omega_*(\vartheta)$ :

$$(11) (\omega'_* + \zeta')(\omega_* + \zeta) + \beta(\omega_* + \zeta) + u \sin \vartheta = m.$$

Откуда и получаем уравнение в вариациях

$$(12) \omega_*(\vartheta) \cdot \zeta' + (\omega'_* + \beta)\zeta = 0.$$

Для уравнения первого порядка (6) мультипликатор определяется формулой

$$(13) \rho = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{\omega'_*(\tau) + \beta}{\omega_*(\tau)} d\tau\right) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{\beta}{\omega_*(\tau)} d\tau\right).$$

Вопрос устойчивости периодического вращения решается знаком интеграла под экспонентой. Из невозможности для уравнения Трикоми (при  $m, \beta > 0$ ) движений с переменной по знаку (направлению) стационарной ротацией следует вывод о том, что устойчивость ротационного движения достаточным образом определяется соотношением знаков коэффициента  $\beta$  и средней угловой скорости  $m/\beta$ . Для положительных  $m$  и  $\beta$  подынтегральное выражение положительное, и, следовательно, стационарная ротация устойчива (мультипликатор – вещественный и меньший 1).

Пример неустойчивого предельного цикла второго рода для уравнения Трикоми ( $m < 0, \beta < 0, u > 0$  – работа в режиме синхронного двигателя с возможным уменьшением «демпфирования» по мере роста угловой скорости) приведен на рис. 4 – фазовый портрет в случае неустойчивой ротации с сепаратрисой, убегающей из неустойчивого фокуса, при  $m = -0,6, u = 1, \beta = -0,3$ . В этом случае (при тех же знаках параметров) фокус, который, как и в предыдущем случае, имеет место при  $\beta^2 < 4\sqrt{u^2 - m^2}$ , становится неустойчивым. Обратное неравенство соответствует тоже неустойчивому, но узловому положению равновесия.

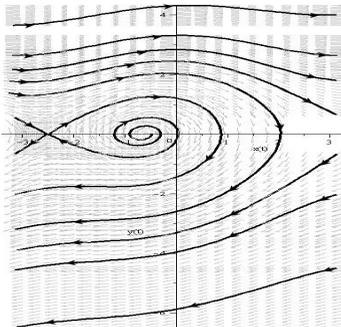


Рис. 4.

Ротационное решение (асинхронный ход синхронной машины), так же как это сделано было раньше при отыскании гетероклинической сепаратрисы, может быть найдено методом гармонического баланса для уравнения (6). В первом приближении (с учетом только первой гармоники по углу  $\vartheta$ ) ротационный режим (предельный цикл второго рода «эквивалентного маятника») может быть найден в виде

$$(14) \quad \omega_*(\vartheta) = \omega_0 + \omega_s \sin \vartheta + \omega_c \cos \vartheta.$$

Удерживая только первую гармонику при балансировании, имеем

$$(15) \quad \begin{aligned} \omega_0 &= \langle \omega_*(\vartheta) \rangle = m / \beta, \\ \omega_s &= u\beta / (\omega_0^2 + \beta^2), \\ \omega_c &= -u\omega_0 / (\omega_0^2 + \beta^2). \end{aligned}$$

Полученная аппроксимация ротационного движения легко уточняется удержанием двух гармоник и т.д.:

$$(16) \quad \omega(\vartheta) = \omega_0 + \omega_s \sin \vartheta + \omega_c \cos \vartheta + \omega_{2s} \sin 2\vartheta + \omega_{2c} \cos 2\vartheta.$$

Коэффициенты второго приближения (в смысле гармонического баланса), а именно, измененные коэффициенты  $\omega_s$ ,  $\omega_c$ , определяются решением системы алгебраических уравнений (после пренебрежения коэффициентами второй гармоники)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 4\omega_0(u\omega_c + 2\beta\omega_s\omega_c + \omega_0(\omega_s^2 - \omega_c^2))/(\omega_s^2 + \omega_c^2) + \\ & + 2\beta(u\omega_s + \beta(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 2\omega_0\omega_c\omega_s)/(\omega_s^2 + \omega_c^2) = 0, \\ & \frac{1}{2}\omega_s\omega_c + 4\omega_0(u\omega_s + \beta(\omega_s^2 - \omega_c^2) - 2\omega_0\omega_c\omega_s)/(\omega_s^2 + \omega_c^2) + \\ & + 2\beta(u\omega_c + 2\beta\omega_s\omega_c + \omega_0(\omega_s^2 - \omega_c^2))/(\omega_s^2 + \omega_c^2) = 0. \end{aligned}$$

Решение данной системы нелинейных алгебраических уравнений может быть получено, например, методом Ньютона. При этом за исходное приближение принимается решение, полученное с удержанием только первой гармоники (15). Отметим еще раз, что среднее значение угловой скорости стационарной ротации  $\omega_0 = m/\beta$  сохраняется независимо от числа удерживаемых гармоник.

Устойчивость стационарного решения может быть исследована путем решения вариационного уравнения относительно приближенного описания стационарной ротации с учетом только ее среднего значения и первой гармоники по  $\mathcal{Q}$ , т.е. найденного первого приближения метода гармонического баланса. Нужно заметить, что исследование устойчивости стационарных вращений на основе приближенных, полученных методом гармонического баланса, может давать результаты, отличающиеся от численных экспериментов по значениям исходных параметров (см. Леонов Г.А., Сперанская Л.С. [5]). Значения параметров  $m$ ,  $u$ ,  $\beta$ , отвечающие границе устойчивости найденного периодического движения, если оно есть, могут быть найдены в результате отыскания периодического решения уравнения в вариациях (12). То есть необходимо найти те значения параметров, при которых решение уравнения в вариациях, может быть представлено в виде ряда Фурье:

$$(17) \quad \zeta(\mathcal{Q}) = \sum_{k=0}^{\infty} (b_{kc} \cos k\mathcal{Q} + b_{ks} \sin k\mathcal{Q}).$$

После подстановки решения (17) в уравнение (12) и балансирования по гармоникам, получаем систему алгебраических уравнений, первоначальная часть которых имеет вид

$$(18) \quad \beta b_{0c} = 0,$$

$$\omega_0 b_{1s} - \omega_s b_{2c} + \omega_c b_{2s} + \frac{1}{2} \omega_s b_{2c} + \omega_s b_{0c} + \beta b_{1c} - \frac{1}{2} \omega_c b_{2s} + \\ + \frac{1}{2} \omega_s b_{2c} = 0,$$

$$-\omega_0 b_{1c} - \omega_s b_{2s} - \omega_c b_{2c} + \frac{1}{2} \omega_s b_{2s} + \frac{1}{2} \omega_c b_{2c} - \omega_c b_{0c} + \beta b_{1s} = 0.$$

Эта система не полна в том смысле, что не выписаны уравнения баланса по второй и высшим гармоникам. Для существования ненулевого периодического решения уравнения в вариациях необходимо обращение в нуль определителя получаемой таким образом однородной системы с учетом соответствующего числа гармоник.

### 3. Модель на основе асимптотически упрощенных уравнений Парка–Горева

Как показали исследования группы механиков Санкт-Петербургского политехнического университета, организованной профессором К.Ш. Ходжаевым, существенно более точное описание процесса синхронизации электрической машины с сетью дают асимптотически преобразованные уравнения Парка–Горева (см. D.Yu. Skubov, K.Sh. Khodzhaev [8]). Основным результатом является полученная методом усреднения математическая модель синхронной машины как математического маятника, жестко связанного с магнитоэлектрическими контурами (проводящими рамками в постоянном магнитном поле), поворачивающегося под действием постоянного момента двигателя (для турбогенератора – турбины) (рис. 5).

Такая модель описывается системой уравнений, имеющей структуру уравнений Лагранжа:

$$(19) \quad \begin{aligned} l\dot{I}_f - \gamma\dot{\delta} \sin \delta + r_f I_f &= 0, \\ l\dot{I}_k - \gamma\dot{\delta} \cos \delta + r_k I_k &= 0, \\ J\ddot{\delta} + \gamma(I_f \sin \delta + I_k \cos \delta) + e_f \sin \delta &= m - \beta\dot{\delta}, \end{aligned}$$

где  $\delta$  – угол поворота маятника, для синхронной машины – угол рассогласования вращающегося с переменной частотой ротора, или генератора, или двигателя, в зависимости от способа приложения мощности, и электромагнитного поля статора, волна которого с учетом только первой гармоники (как по времени, так и по распределению по окружности сердечника статора) вращается по окружности в виде синусоиды с частотой 50 Гц, в простейшем случае трехфазной обмотки со сдвигом фаз на  $2\pi/3$  как по углу, так и по времени. Такого типа движение поля статора обеспечивается способом укладывания трехфазной обмотки. Подробное описание задач проектирования электрических машин переменного поля, как синхронных, так и асинхронных, можно найти во вставшей для инженеров-электриков классической книге В.В. Домбровского, Г.М. Хуторецкого [2]. В зависимости от числа фаз обмотки возбуждения ротора –  $p$ , частота его вращения может быть в  $p$  раз ниже частоты вращения поля статора.

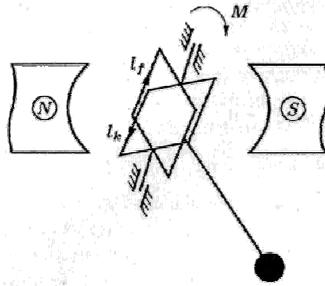


Рис. 5.

Раскроем введенные в системе (19) обозначения:  $I_f, I_k$  – токи, наводимые в демпферных контурах с сопротивлениями  $r_f, r_k$  и индуктивностью  $l$  (эквивалентные в простейшей математической идеализации демпферным контурам синхронной машины, в том числе твердотельной бочке ротора);  $J$  – момент инерции ротора (для нашей аппроксимирующей модели – маятника с магнитоэлектрическим демпфированием при его плоских колебаниях относительно оси поворота);  $\gamma$  – коэффи-

циент, характеризующий значение индуцируемого напряжения (для маятника с контурами в постоянном магнитном поле – величины магнитного потока, создаваемого полем пары постоянных магнитов, обращенных друг к другу противоположными полюсами);  $m - \beta\delta$  – зависящий от частоты вращения ротора момент турбины (линейно падающий при увеличении угловой скорости (в первом приближении) вблизи стационарного режима);

$e_f$  – напряжение обмотки возбуждения, для введенной системы оно эквивалентно моменту силы тяжести, действующей на груз маятника.

Система (19) – результат асимптотического упрощения системы уравнений Парка–Горева. В ней введены масштабированные переменные:

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{d\tau} = S - \text{масштабированное скольжение,}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_\omega}{\sigma_d}} g_0, \quad g_0 = 2\pi \cdot 50 \text{ Гц} \cdot t (\text{сек}) = 314t.$$

Подробное объяснение вывода асимптотических уравнений (19) и способа введения малых параметров можно найти в упомянутой книге [8].

Обратный переход к уравнению Трикоми осуществляется пренебрежением сопротивлениями демпферных контуров  $r_f = r_k = 0$ . Если же, наоборот, пренебречь инерционностью (индуктивностью демпферных контуров), т.е. положить  $l = 0$ , то система (19) преобразуется к виду

$$(20) \quad \kappa\ddot{\delta} + \gamma^2 \left( \frac{\sin^2 \delta}{r_f} + \frac{\cos^2 \delta}{r_k} \right) \dot{\delta} + e_f \sin \delta = m - \beta\dot{\delta},$$

который в случае равенства сопротивлений демпферных контуров снова преобразуется к уравнению Трикоми, но с измененным (увеличенным) коэффициентом при  $\dot{\delta}$ .

После замены, имеющей физический смысл поворота потоковых переменных на угол  $\delta$ .

$$(21) \quad \begin{aligned} x_1 &= I_f \sin \delta + I_k \cos \delta, \\ x_2 &= I_f \cos \delta - I_k \sin \delta, \end{aligned}$$

получаем следующую динамическую систему (далее для простоты, не снижая общности, предполагается равенство демпферных сопротивлений  $r_f = r_k = r$  и  $l = 1, k = 1$ , что можно сделать масштабированием времени):

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 - \dot{\delta} x_2 - \gamma \dot{\delta} + r x_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 + \dot{\delta} x_1 + r x_2 &= 0, \\ \ddot{\delta} + \gamma x_1 + e_f \sin \delta &= m - \beta \dot{\delta}. \end{aligned}$$

Масштабированные значения параметров:

$$\gamma = 1,7; \quad r = 1; \quad e_f = 1; \quad m = 0,5; \quad \beta = 0,02;$$

наиболее приближенные к действительности, соответствующие ТВВ-200:

$$r_f = 0,09214; \quad r_k = 1,3208; \quad \gamma = 1,6906.$$

Подробнее о выводе системы уравнений (22) и о способе введения ее параметров можно узнать в книге [8].

Меняем  $S(0)$  – начальное масштабированное скольжение (разность скоростей вращающегося поля ротора и бегущей волны электромагнитного поля статора в момент включения в сеть). В результате окончания переходного процесса приходим либо к фокусу – равновесию маятника (синхронный ход турбогенератора), либо к его ротации (асинхронный ход генератора с переменной, но периодически меняющейся как по углу, так и по времени угловой скоростью). Задача состоит в отыскании самих ротаций и соотношения параметров, определяющих тот или иной тип движения и его устойчивость. Вернее, границы перехода от одних к другим. Их рождения и устойчивости (ветвления).

Для отыскания ротационного движения переходим к новой (ранее введенной) независимой переменной  $\delta$ . Обозначая  $\dot{\delta} = \omega$ , от уравнений (22) переходим к уравнениям

$$(23) \quad \begin{aligned} \omega x'_1 - \omega x_2 - \gamma \omega + r x_1 &= 0, \\ \omega x'_2 + \omega x_1 + r x_2 &= 0, \\ \omega \omega' + \gamma x_1 + e_f \sin \delta + \beta \omega &= m. \end{aligned} \quad ( )' = \frac{d}{d\delta}$$

В указанном выше случае  $r = 0$  – система (22) (или, что математически эквивалентно,  $\gamma = 0$  для уравнений (23)) сводится к хорошо изученному уравнению Трикоми. Наша задача – выявить отличия, а как показывают численные эксперименты, они есть, и не только количественные, но и качественные.

Для отыскания ротационных движений воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, принимая за исходные однородные уравнения:

$$(24) \quad x_1' + \frac{r}{\omega(\delta)} x_1 = 0,$$

$$x_2' + \frac{r}{\omega(\delta)} x_2 = 0,$$

$$x_i(\delta) = C_i(\delta) \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right), i = 1, 2.$$

В результате приходим к системе

$$C_1' - C_2 = \gamma \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right),$$

$$(25) \quad C_2' + C_1 = 0,$$

$$\omega\omega' + \gamma C_1 \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right) + e_f \sin \delta + \beta\omega = m.$$

Частное решение дифференциального уравнения относительно  $C_1(\delta)$

$$(26) \quad C_1'' + C_1 = \gamma \frac{r}{\omega(\delta)} \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\sigma)} d\sigma\right).$$

при нулевых условиях имеет вид

$$(27) \quad C_1(\delta) = \gamma \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{1}{\omega(\sigma)} \exp\left(-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{r}{\omega(\xi)} d\xi\right) \sin(\delta - \sigma) d\sigma.$$

При отыскании стационарного ротационного решения можно воспользоваться только этим частным решением, поскольку решения однородной части первых двух уравнений системы (25)

затухают при  $\delta \rightarrow \infty$ . После подстановки  $C_1(\delta)$  в третье уравнение системы (27) получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$(28) \quad \omega \omega' + \gamma^2 r \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{\sin(\delta - \sigma)}{\omega(\sigma)} \exp\left(-r \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\xi}{\omega(\xi)}\right) d\sigma + e_f \sin \delta + \beta \omega = m.$$

Только теперь можно начать считать движения, начальная система в трехмерном фазовом пространстве не дает ответа на поиск всех возможных ротаций. Интегралы в случае периодических движений при удержании только первой гармоники могут быть найдены аналитически.

Для приближенного расчета стационарных ротаций воспользуемся методом гармонического баланса, применяя его для системы уравнений (25):

$$(29) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_{10} + x_{1s} \sin \delta + x_{1c} \cos \delta, \\ x_2 &= x_{20} + x_{2s} \cos \delta - x_{2c} \sin \delta, \\ \omega &= \omega_0 + \omega_s \sin \delta + \omega_c \cos \delta; \end{aligned}$$

где  $\omega = \dot{\delta}$ . Оставив после подстановки (29) в систему (23) только постоянные составляющие и первые гармоники по  $\delta$ , приходим к кубическому уравнению, дающему ответ о значениях средних угловых скоростей возможных стационарных ротаций:

$$(30) \quad \beta \omega_0^3 - m \omega_0^2 + (r^2 \beta + \gamma^2 r) \omega_0 - m r^2 = 0$$

и средних составляющих потоков:

$$(31) \quad x_{10} = \frac{\gamma r \omega_0}{\omega_0^2 + r^2}, \quad x_{20} = -\frac{\gamma \omega_0^2}{\omega_0^2 + r^2}.$$

Исходя из правила Декарта, для определенных выше параметров полученное кубическое уравнение (30) имеет три положительных действительных корня. Для указанных выше параметров график кубического уравнения (30) приведен на рис. 6.

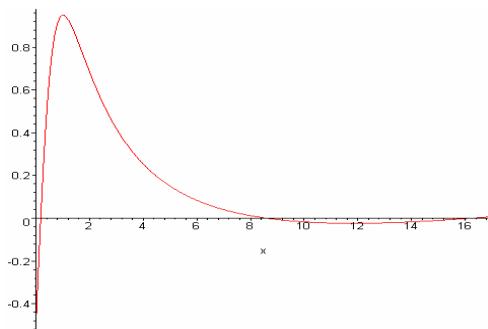


Рис. 6.

Два последних корня полностью совпадают со средними значениями угловых скоростей стационарных ротаций, соответственно неустойчивой (меньшей) и устойчивой (большой), полученных численным расчетом переходных процессов – задачи Коши для системы (22). Вопрос отыскания областей притяжения первой ротации находится в стадии разработки. По корням уравнения (30) определяются сами режимы, но не их устойчивость (пространство трехмерное). Вопрос отыскания границ существования и устойчивости ротационных режимов в пространстве параметров  $m$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $r$  весьма сложен и до конца еще не изучен. Интересно сравнить границы существования полученных ротационных решений в зависимости только от двух параметров  $m$ ,  $\beta$  с границей существования ротационного решения уравнения Трикоми, приведенной на рис. 3(а).

Графики ротационных движений синхронной машины, описываемые системой (22) при различных начальных скольжениях  $S(0)$ , приведены на рис. 7(а), 8(а), 9(а). Начальные потоки определяются из условия включения машины в сеть «бесконечной» мощности с заданным начальным углом рассогласования полей ротора и статора  $\delta_0 = \pi/3$ . Графики изменений магнитных потоков относительно неподвижных осей приведены на рис. 7(б, в), 8(б, в), 9(б, в). В приведенных графиках  $x_4(t) = \dot{\delta}$ , а  $x_1$ ,  $x_2$  соответствуют тем же обозначениям, что и в (22).

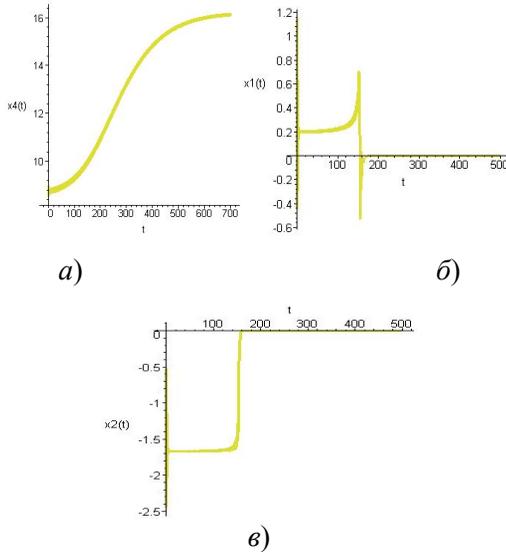
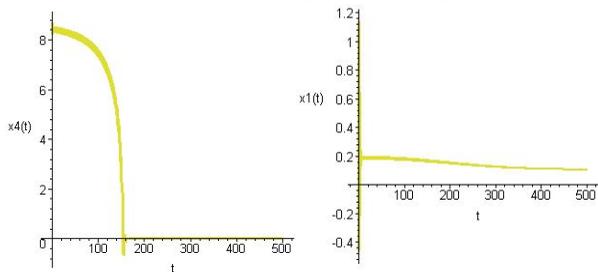


Рис. 7.

На одном из последних рисунков рис. 9(а) синхронизация машины с сетью наблюдается при начальном скольжении  $S(0) = 5,7$ , что физически эквивалентно  $s(0) \approx 2,8$  Гц. Несомненно, такое значение начального скольжения, сохраняющее переход к синхронному режиму, достаточно велико. Но и после расчета переходного процесса при включении в сеть с более реальными параметрами, приведенными после формулы (22), синхронизация оказывается возможной также для сравнительно больших значений начального скольжения  $s(0) = 2 \div 3$  Гц.

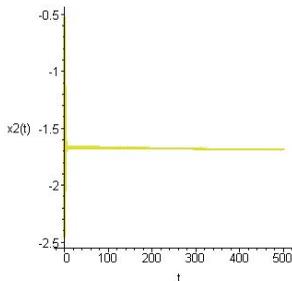
Интересно отметить, что резисторное демпфирование (слагаемые с коэффициентами  $r_f, r_k$  в первых двух уравнениях для токов в демпферных контурах маятника (19)) связано с уравнением вращения гироскопическим образом, так как суммарная мощность связывающих слагаемых равна нулю. Это приводит, в частности, к их недостаточности для ликвидации неограниченных движений по  $\delta$ , которые физически невозможны. Ограничение последних вытекает из наличия в уравнении вращения (третьего уравнения системы (19)) эквивалентного «демпфи-

вания» – слагаемого  $\beta\dot{\delta}$ , отвечающего в первом приближении (при малых скольжениях) падению момента двигателя (турбины) при увеличении угловой скорости ротора.



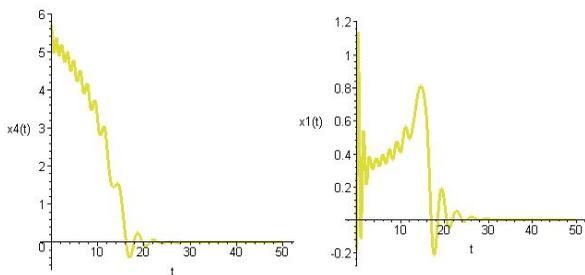
а)

б)



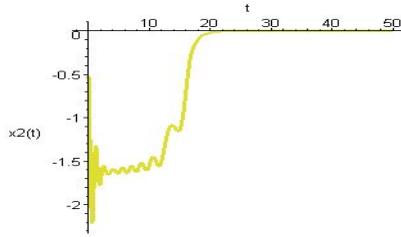
в)

Рис. 8.



а)

б)



в)

Рис. 9.

В зависимости от величины момента  $m$  возможно различное значение числа периодических движений (ротаций маятника). Вопрос устойчивости найденных ротационных движений может быть решен путем вычисления «приближенных» мультипликаторов путем построения матрицы монодромии системы уравнений в вариациях относительно приближенного решения (29). Система уравнений в вариациях имеет вид

$$\begin{aligned}
 \omega_* z_1' + (x_{1*}' - x_{2*})\zeta - \omega_* z_2 + r z_1 &= 0, \\
 (32) \quad \omega_* z_2' + (x_{2*}' + x_{1*})\zeta + \omega_* z_1 + r z_2 &= 0, \\
 \omega_* \zeta' + (\omega_*' + \beta)\zeta + \gamma z_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты системы (32) являются периодическими функциями угла  $\delta$ , и в матричной форме она может быть записана следующим образом:

$$(33) \quad \omega_* \eta'' + A(\delta)\eta + R\eta = 0,$$

где  $\omega_*(\delta)$  – исследуемое периодическое решение (ротация);  $A(\delta)$  – матрица периодических функций с периодом  $2\pi$ ,  $R$  – постоянная матрица сопротивлений. Решение системы (33) в общем случае может быть представлено в виде суммы произведений экспоненциальных и периодических функций. Граница устойчивости найденного ротационного решения в области параметров  $m$ ,  $\beta$ ,  $r$ ,  $\gamma$  может быть найдена в результате отыскания периодических решений уравнения в вариациях (33).

Исследование синхронизации электрической машины с сетью с помощью асимптотических, и далее численных и качественных методов, на основе простейших математических моделей синхронных машин показало возможность более грубого перехода к синхронному режиму – при большем начальном расогласовании частоты сети и частоты вращения ротора (скольжения). Для дальнейшего исследования усовершенствования синхронизации машины с сетью на основе предложенной модели представляется необходимым включение возможного управления для поддержания необходимого уровня статорного напряжения.

### Литература

1. ВАЖНОВ А.И. *Переходные процессы в машинах переменного тока.* – Л.: Энергия, 1980. – 256 с.
2. ДОМБРОВСКИЙ В.В., ХУТОРЕЦКИЙ Г.М. *Основы проектирования электрических машин переменного тока.* – Л., «Энергия», 1974. – 504 с.
3. ЛЕОНОВ Г.А., КОНДРАТЬЕВА Н.В. *Анализ устойчивости электрических машин переменного тока.* – СПб: Изд-во СПб. ун-та, 2009. – 259 с.
4. ЛЕОНОВ Г.А., СМЕРНОВА В.Б. *Математические проблемы теории фазовой синхронизации.* – СПб: Наука, 2000. – 401 с.
5. ЛЕОНОВ Г.А., СПЕРАНСКАЯ Л.С. *Оценки частоты биеений в многомерных системах ФАП // Радиотехника.* – 1985. – №3. – С. 32–35.
6. РОДЮКОВ Ф.Ф. *Математическая модель большой электроэнергетической системы.* – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. – 122 с.
7. ЯНКО-ТРИНИЦКИЙ А.А. *Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках.* – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1958. – 104 с.
8. SKUBOV D.Yu., KHODZHAEV K.Sh. *Non-Linear Electromechanics* – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 395 p.

9. STOKER J.J. *Nonlinear vibrations*. – Interscience. New York, 1950. – 273 p. (СТОКЕР Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: ИЛ, 1953, 256 с.)

**MOTIONS BIFURCATION OF A LOADED ELECTRICALLY DAMPED PENDULUM (SYNCHRONIZATION OF ELECTRIC MACHINE WITH NETWORK)**

**Dmitry Skubov**, St Petersburg Polytechnic University

*Abstract: In this article questions of synchronization of an electric machine with power networks are investigated. Mathematical modeling is performed with numeric-analytical methods for asymptotically simplified equations of synchronous electrical machine dynamics. The possibility of more reliable (as compared to commonly recognized) synchronization with a network is proved, namely, in terms of bigger initial difference of frequencies of turbo-generator rotor and the network.*

Keywords: synchronous electrical machine, nonlinear dynamic, electromechanics, stability of periodic motions.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. Л. Фрадковым*