

УДК 681.5.013; 681.514; 681.511.22; 681.516.42; 681.516.74  
ББК 32.965.4.32.965.6

## **СИНТЕЗ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МЕТОДАМИ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ<sup>1</sup>**

**Чайковский М. М.<sup>2</sup>**

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

*Представлены постановки и решения задач синтеза анизотропийных субоптимальных и  $\gamma$ -оптимальных регуляторов для подавления влияния случайных возмущений с неизвестными распределениями на качество работы системы управления. Рассматривается синтез статической обратной связи по состоянию, регулятора полного порядка по выходу, а также статической обратной связи по выходу. Применение известных линеаризующих замен переменных и процедур выпукления в задачах синтеза для рассматриваемых частных случаев структуры объекта управления и регулятора позволяет выразить решение задачи через систему выпуклых ограничений, представимую в виде системы линейных матричных неравенств. Анизотропийные субоптимальные регуляторы стабилизируют замкнутую систему и сохраняют ее анизотропийную норму ниже заданного порогового значения;  $\gamma$ -оптимальные регуляторы строятся для минимального порогового значения. Разработанный метод синтеза анизотропийных регуляторов является новым и удобным для расчетов.*

Ключевые слова: дискретные линейные стационарные системы, случайные возмущения, статистическая неопределенность, норма, анизотропия, выпуклая оптимизация, линейные матричные неравенства.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-08-00714-а) и Программы №14 ОЭММПУ РАН.

<sup>2</sup> Михаил Михайлович Чайковский, доктор технических наук (mmtchaikovsky@hotmail.com).

## **Введение**

Задачи подавления неизвестных возмущений являются чрезвычайно важными задачами теории управления, неизбежно возникающими при проектировании современных систем управления техническими объектами. Как правило, системы автоматического управления работают в условиях помех, под влиянием неизвестных внешних воздействий, к которым относятся как неизвестные заранее и неизмеряемые возмущения, так и задающие команды, известные в данный момент времени, но неизвестные в будущем. Измеряемые значения сигналов содержат случайные ошибки. Управляющие воздействия могут обрабатываться со случайными погрешностями. Для решения задач подавления возмущений в теории управления применяются разнообразные подходы. Оптимальную (или субоптимальную) задачу подавления возмущений можно сформулировать как задачу минимизации (ограничения) влияния этих возмущений на точность работы системы управления или процессы в системе. Выбор критерия качества оптимизации мотивируется различными предположениями о характере возмущений, действующих на систему. В классической задаче синтеза линейно-квадратичного гауссовского регулятора, являющейся частным случаем более общей задачи  $\mathcal{H}_2$ -оптимизации, предполагается, что внешнее возмущение представляет собой гауссовский белый шум [6, 19]. В стандартной задаче  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации линейных стационарных систем управления [13] предполагается, что внешнее воздействие представляет собой сигнал, интегрируемый (суммируемый) с квадратом. Однако в случаях, когда реальные внешние воздействия отличаются от номинальных моделей и исходные предположения относительно их свойств, принятые в процедуре синтеза регулятора, нарушаются, качество работы системы управления может значительно ухудшиться.

Анизотропийная теория стохастического робастного управления [2, 3, 29, 34] направлена на преодоление неблагоприятного влияния статистической неопределенности внешних возмуще-

ний, которая рассматривается как различие между неточно известным распределением реального случайного возмущения и распределением его номинальной модели и количественно характеризуется функционалом средней анизотропии [2, 12, 34]. Анизотропийный оптимальный регулятор [35], стабилизирующий замкнутую систему и минимизирующий ее анизотропийную норму, проявляет меньший консерватизм, т.е. характеризуется меньшими энергетическими затратами на управление, чем  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятор, и более эффективен при подавлении коррелированных внешних возмущений с неизвестными распределениями по сравнению с  $\mathcal{H}_2$ -регулятором [12, 34]. Анизотропийный оптимальный регулятор является оценивающим; его реализация в пространстве состояний вычисляется из единственного решения системы нелинейных перекрестно-связанных матричных алгебраических уравнений, для решения которой разработан специальный вычислительный алгоритм на основе метода гомотопий [11].

В этой статье вниманию читателя предлагается дальнейшее развитие методики синтеза анизотропийных *субоптимальных* регуляторов на основе выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования, предложенной в [7, 8, 32, 33]. В отличие от оптимального, субоптимальный регулятор стабилизирует замкнутую систему и обеспечивает подавление возмущений с качеством *не хуже заданного*, гарантируя, что анизотропийная норма замкнутой системы не превосходит заданного порогового значения  $\gamma$ . Общая процедура синтеза анизотропийного регулятора заданного порядка сводится к решению неравенства относительно детерминанта положительно определенной матрицы и двух линейных матричных неравенств (ЛМН) относительно взаимно обратных матриц, результирующая задача оптимизации не является выпуклой [8]. С помощью применения стандартных процедур овыпукления (линеаризирующих замен переменных и введения дополнительных переменных) результирующие задачи оптимизации можно сделать выпуклыми для ряда частных случаев структуры объекта управления и регулятора, рассмотренных в этой работе. Минимизируя пороговое значение  $\gamma$ , для этих частных слу-

чаев можно найти анизотропийные  $\gamma$ -оптимальные регуляторы из решения задач выпуклой оптимизации. Новый метод синтеза анизотропийных регуляторов, не требующий применения специального вычислительного алгоритма на основе метода гомотопий, является привлекательным с вычислительной точки зрения и удобным для практических расчетов, позволяет синтезировать анизотропийные регуляторы не только в форме наблюдателя, но и в форме произвольного динамического компенсатора, а также статической обратной связи по состоянию и измеряемому выходу модели объекта управления.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 изложена постановка общей задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора. В разделе 2 представлено решение задачи синтеза регулятора для трех частных случаев структуры объекта управления и регулятора: регулятор в виде статической обратной связи по состоянию для объекта, состояние которого измеряется точно; динамический регулятор полного порядка по измеряемому выходу; регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу. В разделе 3 рассматривается ряд иллюстративных вычислительных примеров, в одном из которых выполнено сравнение анизотропийных оптимального и  $\gamma$ -оптимального регуляторов. Заключительные замечания даны в разделе 4.

В статье используются обозначения работы [8].

## 1. Постановка задачи синтеза

Объект управления представлен дискретной линейной стационарной моделью  $P(z)$  с  $n_x$ -мерным состоянием  $X$ ,  $m_w$ -мерным входом возмущения  $W$ ,  $m_u$ -мерным входом управления  $U$ ,  $p_z$ -мерным управляемым выходом  $Z$  и  $p_y$ -мерным измеряемым выходом  $Y$ :

$$(1) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы,  $p_z \leq m_w$ , пара матриц  $(A, B_u)$  является стабилизируемой, а пара  $(A, C_y)$  – де-

тектируемой. Предполагается, что внешнее возмущение  $W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty}$  является случайной последовательностью с ограниченным уровнем средней анизотропии  $a$ , т.е.

$$W \in \mathcal{W}_a := \{W \in \ell_{\mathcal{P}}^m : \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a\},$$

где

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left( \frac{m_w S(\omega)}{\|W\|_{\mathcal{P}}^2} \right) d\omega$$

– функционал средней анизотропии [12, 34];

$$\ell_{\mathcal{P}}^m = \{W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty} : w_k \in \mathbb{L}_2^m \wedge \|W\|_{\mathcal{P}} < +\infty\},$$

– пространство стационарных в узком смысле последовательностей интегрируемых с квадратом случайных векторов [5];

$$\|W\|_{\mathcal{P}} := \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \mathbf{E}|w_k|^2 \right)^{1/2}$$

– мощностная норма последовательности случайных векторов  $W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty}$  [5, 37], которая может быть вычислена через спектральную плотность  $S(\omega)$  этой последовательности:

$$\|W\|_{\mathcal{P}} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr } S(\omega) d\omega \right)^{1/2}.$$

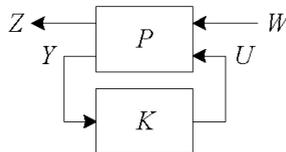


Рис. 1. Замкнутая система

Требуется найти регулятор  $K(z)$ , стабилизирующий замкнутую систему (рис. 1) и гарантирующий робастное подавление

внешних возмущений с качеством не хуже заданного. Пусть  $T_{zw}(z)$  — матричная передаточная функция замкнутой системы от возмущения  $W$  к управляемому выходу  $Z$ , заданная нижним дробно-линейным преобразованием пары  $(P, K)$  :

$$(2) \quad T_{zw}(z) = \mathcal{F}_l(P, K) = P_{zw} + P_{zu}K(I_{p_y} - P_{yu}K)^{-1}P_{yw},$$

где

$$(3) \quad P_{zw}(z) \sim \left[ \begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array} \right], \quad P_{zu}(z) \sim \left[ \begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_z & D_{zu} \end{array} \right],$$

$$P_{yw}(z) \sim \left[ \begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_y & D_{yw} \end{array} \right], \quad P_{yu}(z) \sim \left[ \begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_y & 0 \end{array} \right].$$

$a$ -Анизотропийная норма передаточной функции  $T_{zw}(z) \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$  количественно характеризует возможности замкнутой системы по подавлению внешних возмущений и определяется как наибольшее отношение мощностной нормы выхода этой системы к мощностной норме входа при условии, что средняя анизотропия возмущения не превосходит уровня  $a$  [12, 34]:

$$(4) \quad \|T_{zw}\|_a := \sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

В [4] показано, что для фиксированной системы  $F \in \mathcal{H}_\infty^{p_z \times m_w}$  ее  $a$ -анизотропийная норма является неубывающей функцией уровня средней анизотропии  $a$ , удовлетворяющей неравенству

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{m_w}} \|T_{zw}\|_2 = \|T_{zw}\|_0 \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|T_{zw}\|_a = \|T_{zw}\|_\infty,$$

т.е.  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы являются предельными случаями  $a$ -анизотропийной нормы при  $a \rightarrow 0, +\infty$  соответственно.

Общая постановка задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора следующая.

**Задача 1.** Для заданных объекта управления  $P$  с моделью в пространстве состояний (1), уровня средней анизотропии  $a \geq 0$  входного возмущения  $W$  и некоторого желаемого порогового значения  $\gamma > 0$  найти закон управления в виде обратной связи

$$U = K(z)Y,$$

стабилизирующий замкнутую систему и гарантирующий, что ее  $a$ -анизотропийная норма не превышает  $\gamma$ , т.е.

$$(6) \quad \|T_{zw}\|_a < \gamma.$$

## 2. Решение задачи синтеза

Уравнения замкнутой системы имеют вид

$$(7) \quad T_{zw}(z) : \begin{bmatrix} \chi_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_k \\ w_k \end{bmatrix},$$

где  $\chi_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq n_x$ , а матрицы реализации замкнутой системы  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  аффинно зависят от параметров реализации регулятора  $K$ .

Для доказательства последующих теорем синтеза, устанавливающих достаточные условия существования анизотропийных субоптимальных регуляторов, нам потребуется вспомогательный результат — модификация частотной теоремы для анизотропийной нормы [7, 32], полученная в [8].

**Лемма 1.** Пусть  $T_{zw} \in \mathcal{H}_{\infty}^{p_z \times m_w}$  — матричная передаточная функция системы с реализацией (7) и  $\rho(\mathcal{A}) < 1$ . Анизотропийная норма (4) системы  $T_{zw}$  строго ограничена заданным пороговым значением  $\gamma > 0$ , т.е.  $\|T_{zw}\|_{\alpha} < \gamma$ , если система неравенств

$$(8) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2$$

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(10) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(11) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \Phi \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной  $\eta$ , вещественных  $(m_w \times m_w)$ -матрицы  $\Psi$  и  $(n \times n)$ -матрицы  $\Phi$ .

**Замечание 1.** Неравенство (8) представляет собой выпуклое ограничение относительно вспомогательной переменной  $\Psi$ . Подграфик вогнутой функции  $(\det \Psi)^{1/m}$   $(m \times m)$ -матрицы  $\Psi = \Psi^T \succcurlyeq 0$  представим в виде пересечения конечного числа конусов второго порядка и, следовательно, в виде ЛМН [9], см. также замечание 1 в [8]. Существуют свободно распространяемые

программные пакеты для решения задач выпуклой оптимизации, позволяющие использовать выпуклую функцию  $-(\det(\Psi))^{1/m}$  ( $m \times m$ )-матрицы  $\Psi \succcurlyeq 0$  не только в качестве целевой функции, но и в качестве ограничения, например, интерфейс *YALMIP* [26] в сочетании с программой-решателем *SeDuMi* [31] для систем *Matlab* и *Scilab*. В интерфейсе *YALMIP* функции  $-(\det(\Psi))^{1/m}$  соответствует команда `geomean`, возвращающая среднее геометрическое собственных чисел положительно-определенной матрицы [26].

## 2.1. СТАТИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО СОСТОЯНИЮ

Сперва рассмотрим случай, когда вектор состояния можно измерить точно и модель объекта управления описывается уравнениями

$$(12) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ I_{n_x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы,  $p_z \leq m_w$ , пара матриц  $(A, B_u)$  является стабилизируемой.

**Задача 2.** Для заданных объекта управления  $P$  с моделью (12), уровня средней анизотропии  $\alpha \geq 0$  внешнего возмущения  $W$  и некоторого желаемого порогового значения  $\gamma > 0$  найти регулятор в форме статической обратной связи по состоянию

$$(13) \quad u_k = Kx_k,$$

стабилизирующий замкнутую систему  $T_{zw}(z)$  с реализацией

$$(14) \quad \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_u K & B_w \\ \hline C_z + D_{zu} K & D_{zw} \end{array} \right]$$

и гарантирующий, что ее  $\alpha$ -анизотропийная норма не превышает порогового значения  $\gamma$ , т.е. выполняется неравенство (6).

Следующая теорема дает достаточные условия существования анизотропийного субоптимального регулятора в форме статической обратной связи по состоянию.

**Теорема 1.** Для заданных  $\alpha \geq 0$ ,  $\gamma > 0$  статический регулятор по состоянию (13), стабилизирующий замкнутую систему (14) ( $\rho(A + B_u K) < 1$ ) и гарантирующий выполнение (6),

существует, если система неравенств

$$(15) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(16) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w & -\Pi & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(17) \quad \begin{bmatrix} -\Pi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A\Pi + B_u\Lambda & B_w & -\Pi & * \\ C_z\Pi + D_{zu}\Lambda & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(18) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \Pi \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной  $\eta$ , вещественных  $(m_w \times m_w)$ -матрицы  $\Psi$ ,  $(n_x \times n_x)$ -матрицы  $\Pi$  и  $(m_u \times n_x)$ -матрицы  $\Lambda$ . Если задача (15)–(18) разрешима, и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора определяется выражением  $K = \Lambda\Pi^{-1}$ .

**Доказательство.** Пусть решение задачи (15)–(18) существует. Определим  $\Phi := \overline{\Pi}^{-1}$ . По определению  $K = \Lambda\Pi^{-1}$ , ЛМН (16), (17) можно переписать в виде

$$(19) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w & -\Phi^{-1} & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi^{-1} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A\Phi^{-1} + B_u K \Phi^{-1} & B_w & -\Phi^{-1} & * \\ C_z \Phi^{-1} + D_{zu} K \Phi^{-1} & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Умножая последнее неравенство слева и справа на матрицу  $\text{blockdiag}(\Phi, I_{m_w}, I_{n_x}, I_{p_z}) \succ 0$ , получим

$$(20) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A + B_u K & B_w & -\Phi^{-1} & * \\ C_z + D_{zu} K & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (15), (18), (19), (20) следует, что матрица статического регулятора по состоянию  $K$  является решением задачи 2 для замкнутой реализации (14), что и требовалось доказать.

**Замечание 2.** Нетрудно доказать полную эквивалентность неравенств синтеза (15)–(18) и условий (8)–(10) леммы 1. Однако можно сформулировать и доказать лишь достаточные условия существования регулятора (13), поскольку условия леммы 1 являются лишь достаточными. Это замечание касается также двух последующих теорем синтеза.

**Следствие 1.** *Неравенства (15)–(18) являются не только выпуклыми по  $\Psi$  и аффинными по  $\Pi$  и  $\Lambda$ , но также линейными относительно  $\gamma^2$ . Минимизируя  $\gamma^2$  при ограничениях (15)–(18), мы минимизируем  $\gamma$  при тех же ограничениях. Обозначим  $\hat{\gamma} := \gamma^2$ . Условия теоремы 1 позволяют вычислять наименьшее значение  $\gamma$  из решения задачи оптимизации*

$$(21) \quad \begin{cases} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \Pi, \Lambda, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (15)–(18).} \end{cases}$$

Если задача выпуклой оптимизации (21) разрешима, матрица усиления статического регулятора по состоянию вычисляется согласно теореме 1.

Анизотропийные регуляторы, получаемые из решений задач оптимизации, аналогичных (21), называются анизотропийными  $\gamma$ -оптимальными регуляторами.

## 2.2. РЕГУЛЯТОР ПО ВЫХОДУ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Для решения задачи синтеза регулятора по выходу полного порядка в форме динамического компенсатора

$$(22) \quad K(z) : \begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

с  $n_x$ -мерным состоянием  $\Xi = (\xi_k)_{-\infty < k < +\infty}$  можно эффективно применить известную линеаризующую замену переменных, предложенную в [15] и примененную в [30] для решения задач многокритериального управления непрерывными системами с помощью ЛМН.

Для объекта управления (1) и регулятора (22) реализация за-

мкнутой системы  $T_{zw}(z)$  имеет вид  
(23)

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c & D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \end{array} \right].$$

Обозначим в неравенствах (9), (10) леммы 1  $\Pi := \Phi^{-1}$ . Из блочного разбиения

$$(24) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix}$$

и условия

$$(25) \quad \Phi \Pi = I_{2n_x}$$

следует

$$(26) \quad \Phi \begin{bmatrix} \Pi_{11} \\ \Pi_{12}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\Phi \Pi_1 = \Phi_1, \quad \Pi \Phi_1 = \Pi_1$$

с учетом обозначений

$$(27) \quad \Phi_1 := \begin{bmatrix} I_{n_x} & \Phi_{11} \\ 0 & \Phi_{12}^T \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 := \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ \Pi_{12}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Прямым вычислением можно показать, что

$$(28) \quad \Pi_1^T \Phi \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi \Phi_1 = \Pi_1^T \Phi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix}.$$

Ключевая линеаризующая замена переменных матриц регулятора определяется следующим образом [15]:

$$(29) \quad \mathcal{A}_c := \Phi_{12} A_c \Pi_{12}^T + \Phi_{12} B_c C_y \Pi_{11} + \\ + \Phi_{11} B_u C_c \Pi_{12}^T + \Phi_{11} (A + B_u D_c C_y) \Pi_{11},$$

$$(30) \quad \mathcal{B}_c := \Phi_{12} B_c + \Phi_{11} B_u D_c,$$

$$(31) \quad \mathcal{C}_c := C_c \Pi_{12}^T + D_c C_y \Pi_{11},$$

$$(32) \quad \mathcal{D}_c := D_c.$$

Новые переменные  $\mathcal{A}_c, \mathcal{B}_c, \mathcal{C}_c, \mathcal{D}_c$  имеют размерности  $n_x \times n_x$ ,  $n_x \times p_y$ ,  $m_u \times n_x$  и  $m_u \times p_y$  соответственно, даже если  $n_\xi \neq n_x$ . В [30] отмечено, что если матрицы  $\Phi_{12}$  и  $\Pi_{12}$  имеют полный

строчный ранг и если матрицы  $A_c, B_c, C_c, D_c, \Pi_{11}$  и  $\Phi_{11}$  известны, всегда можно найти матрицы регулятора  $A_c, B_c, C_c, D_c$ , удовлетворяющие (29)–(32). Если матрицы  $\Phi_{12}$  и  $\Pi_{12}$  являются квадратными ( $n_\xi = n_x$ ) и обратимыми, то матрицы  $A_c, B_c, C_c$  и  $D_c$ , удовлетворяющие (29)–(32), единственны. Таким образом, при синтезе регулятора полного порядка отображение, определяемое (29)–(32), биективно [15, 30].

Решение задачи 1 синтеза регулятора полного порядка дано в следующей теореме.

**Теорема 2.** Для заданных  $a \geq 0, \gamma > 0$  динамический регулятор по выходу  $K$  полного порядка  $n_\xi = n_x$  с реализацией (22), являющийся решением задачи 1, существует, если система неравенств

$$(33) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(34) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\ B_w + B_u \mathcal{D}_c D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ \Phi_{11} B_w + \mathcal{B}_c D_{yw} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\ D_{zw} + D_{zu} \mathcal{D}_c D_{yw} & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(35) \quad \begin{bmatrix} -\Pi_{11} & * & * & * & * & * \\ -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & * \\ A\Pi_{11} + B_u C_c & A + B_u \mathcal{D}_c C_y & B_w + B_u \mathcal{D}_c D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ A_c & \Phi_{11} A + \mathcal{B}_c C_y & \Phi_{11} B_w + \mathcal{B}_c D_{yw} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\ C_z \Pi_{11} + D_{zu} C_c & C_z + D_{zu} \mathcal{D}_c C_y & D_{zw} + D_{zu} \mathcal{D}_c D_{yw} & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(36) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Pi_{11} \succ 0, \quad \Phi_{11} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \succ 0$$

разрешима относительно скалярной переменной  $\eta$ , вещественных  $(m_w \times m_w)$ -матрицы  $\Psi$ , матриц  $A_c \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, B_c \in \mathbb{R}^{n_x \times p_y}, C_c \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}, D_c \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$  и двух  $(n_x \times n_x)$ -матриц  $\Pi_{11}, \Phi_{11}$ . Если задача (33)–(36) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрицы регулятора  $A_c \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, B_c \in \mathbb{R}^{n_x \times p_y}, C_c \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}, D_c \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$  единственным образом определяют

ся выражениями

$$(37) \quad D_c := \mathcal{D}_c,$$

$$(38) \quad C_c := (\mathcal{C}_c - D_c C_y \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T},$$

$$(39) \quad B_c := \Phi_{12}^{-1} (\mathcal{B}_c - \Phi_{11} B_u D_c),$$

$$(40) \quad A_c := \Phi_{12}^{-1} (A_c - \Phi_{12} B_c C_y \Pi_{11} - \Phi_{11} B_u C_c \Pi_{12}^T - \\ - \Phi_{11} (A + B_u D_c C_y) \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T}$$

и вычисляются из решения задачи нахождения двух невырожденных  $(n_x \times n_x)$ -матриц  $\Pi_{12}$ ,  $\Phi_{12}$ , удовлетворяющих условию

$$(41) \quad \Pi_{12} \Phi_{12}^T = I_{n_x} - \Pi_{11} \Phi_{11}.$$

**Доказательство.** Пусть решение системы (33)–(36) существует. Из (27)–(32) и (23) следует, что

$$\begin{bmatrix} A \Pi_{11} + B_u \mathcal{C}_c & A + B_u D_c C_y \\ \mathcal{A}_c & \Phi_{11} A + \mathcal{B}_c C_y \end{bmatrix} = \Phi_1^T \mathcal{A} \Pi_1,$$

$$\begin{bmatrix} B_w + B_u D_c D_{yw} \\ \Phi_{11} B_w + \mathcal{B}_c D_{yw} \end{bmatrix} = \Phi_1^T \mathcal{B},$$

$$\begin{bmatrix} C_z \Pi_{11} + D_{zu} \mathcal{C}_c & C_z + D_{zu} D_c C_y \end{bmatrix} = \mathcal{C} \Pi_1,$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} = \Pi_1^T \Phi \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi \Phi_1,$$

где  $\Phi$  и  $\Pi$  определяются (24) и удовлетворяют (25). Подстановка предыдущих выражений в неравенства (34), (35) дает

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi_1 & \mathcal{D}^T \\ \Phi_1^T \mathcal{B} & -\Phi_1^T \Pi \Phi_1 & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(42) \quad \begin{bmatrix} -\Pi_1^T \Phi \Pi_1 & 0 & \Pi_1^T \mathcal{A}^T \Phi_1 & \Pi_1^T \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi_1 & \mathcal{D}^T \\ \Phi_1^T \mathcal{A} \Pi_1 & \Phi_1^T \mathcal{B} & -\Phi_1^T \Pi \Phi_1 & 0 \\ \mathcal{C} \Pi_1 & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование неравенств (42) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, \Phi_1^{-T}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(\Pi_1^{-T}, I_{m_w}, \Phi_1^{-T}, I_{p_z}),$$

соответственно, приводит к

$$(43) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Pi & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(43) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Pi & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (24), (25), (33), (43) следует, что замкнутая система (23) является устойчивой и ее  $\alpha$ -анизотропийная норма не превосходит желаемого порогового значения  $\gamma$ , т.е. выполняется неравенство (6). Процедура восстановления матриц реализации регулятора  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$  из переменных решения  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$  по формулам (37)–(40), (41) является стандартной [15, 30].

**Следствие 2.** *Поскольку неравенства (33)–(36) являются линейными по  $\hat{\gamma} := \gamma^2$ , условия теоремы 2 позволяют вычислять наименьшее значение  $\gamma$  из численного решения задачи выпуклой оптимизации*

$$(44) \quad \begin{cases} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \Phi_{11}, \Pi_{11}, A_c, B_c, C_c, D_c, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (33)–(36).} \end{cases}$$

*Если задача выпуклой оптимизации (44) разрешима, матрицы параметров регулятора вычисляются согласно теореме 2.*

В [30] подчеркивается, что применяемая процедура синтеза не вносит дополнительного консерватизма в решение задачи. Результат теоремы 2 делает возможным применение анизотропийной нормы замкнутой системы в качестве целевой функции или спецификации качества для определенных групп входных каналов замкнутой системы в задачах многокритериального управления, решение которых основано на существовании общей функции Ляпунова [30], наряду с другими спецификациями качества и целевыми функциями, которые могут быть сформулированы в терминах ЛМН.

### 2.3. СТАТИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО ВЫХОДУ

Рассмотрим важный случай, когда регулятор имеет вид статической обратной связи по измеряемому выходу

$$(45) \quad u_k = K y_k.$$

Предполагается, что для объекта управления (1) и регулятора (45) выполняется условие Кимуры [20] нулевого порядка:

$$n_x - m_u - p_y < 0.$$

Выполнение этого условия гарантирует существование стабилизирующей статической обратной связи по измеряемому выходу.

**Задача 3.** Для заданного объекта управления  $P$  с реализацией (1), уровня средней анизотропии  $a \geq 0$  внешнего возмущения  $W$  и некоторого желаемого порогового значения  $\gamma > 0$  найти регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу (45), стабилизирующий замкнутую систему  $T_{zw}(z)$  с реализацией

$$(46) \quad \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{array} \right]$$

и гарантирующий, что ее  $a$ -анизотропийная норма не превышает порогового значения  $\gamma$ , т.е.

$$(47) \quad \|T_{zw}\|_a < \gamma.$$

В [8] показано, что прямое применение достаточных условий (8)–(10) леммы 1 к реализации замкнутой системы (46) приводит к невыпуклой задаче поиска взаимно обратных матриц, удовлетворяющих двум ЛМН и выпуклому ограничению относительно детерминанта положительно определенной матрицы.

Тем не менее, специальная линеаризующая замена переменных, предложенная в [28], может сделать результирующую задачу оптимизации выпуклой для отдельного класса объектов управления, определенного некоторым структурным свойством. А именно, предполагается, что матричная передаточная функция объекта управления (1) от входа управления  $U$  к измеряемому выходу  $Y$  равна нулю, т.е. [28]

$$(48) \quad P_{yu}(z) := C_y(zI - A)^{-1}B_u = 0.$$

Для стабилизируемого и детектируемого объекта управления (1), если выполняется условие (48), существует преобразование подобия  $T$ , такое что

$$(49) \quad \left[ \begin{array}{c|cc} TAT^{-1} & TB_w & TB_u \\ \hline C_z T^{-1} & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y T^{-1} & D_{yw} & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} & B_{w_1} & B_{u_1} \\ 0 & A_{22} & B_{w_2} & 0 \\ \hline C_{z_1} & C_{z_2} & D_{zw} & D_{zu} \\ 0 & C_{y_2} & D_{yw} & 0 \end{array} \right],$$

где подсистема  $(A_{11}, B_{u_1})$  является управляемой,  $(A_{11}, C_{y_2})$  — наблюдаемой, а матрица  $A_{22}$  — устойчивой [28]; см. также [27]. Из представления (49) следует, что реализация системы, замкнутой статической обратной связью по измеряемому выходу, имеет вид (50)

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} + B_{u_1} K C_{y_2} & B_{w_1} + B_{u_1} K D_{yw} \\ 0 & A_{22} & B_{w_2} \\ \hline C_{z_1} & C_{z_2} + D_{zu} K C_{y_2} & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{array} \right].$$

Неизвестная матрица  $\Phi$  в неравенствах (9), (10) леммы 1 разбивается на блоки в соответствии с блочным разбиением  $\mathcal{A}$  в (50) [28]:

$$(51) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} \succ 0.$$

Ключевая линеаризующая замена переменных определяется в [28] следующим образом:

$$(52) \quad P := \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{-1} & -\Phi_{11}^{-1} \Phi_{12} \\ -\Phi_{12}^T \Phi_{11}^{-1} & \Phi_{22} - \Phi_{12}^T \Phi_{11}^{-1} \Phi_{12} \end{bmatrix}.$$

В [28] отмечено, что преобразование (52) отображает множество всех положительно определенных матриц в множество всех матриц с положительно определенными блоками на главной диагонали; это отображение биективно; обратное отображение определяется как

$$(53) \quad \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} S \\ -S^T Q^{-1} & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix}.$$

Преобразование (52) мотивируется факторизацией [28]

$$(54) \quad P_1 \Phi = P_2,$$

где

$$(55) \quad P_1 := \begin{bmatrix} Q & 0 \\ S^T & I \end{bmatrix}, \quad P_2 := \begin{bmatrix} I & -S \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

**Теорема 3.** *Предположим, что для объекта управления  $P$  с реализацией (1) выполняется условие (48). Для заданных  $a \geq 0$ ,  $\gamma > 0$  статический регулятор по выходу (45), являющийся решением задачи 3, существует, если система неравенств*

$$(56) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(57) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathbf{B}(R, S, K) & \mathbf{P}(Q, R) & * \\ \mathbf{D}(K) & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(58) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{P}(Q, R) & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathbf{A}(Q, R, S, K) & \mathbf{B}(R, S, K) & \mathbf{P}(Q, R) & * \\ \mathbf{C}(Q, S, K) & \mathbf{D}(K) & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\mathbf{P}(Q, R) := \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(Q, R, S, K) := \begin{bmatrix} A_{11}Q & A_{11}S - SA_{22} + A_{12} + B_{u_1}KC_{y_2} \\ 0 & RA_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(R, S, K) := \begin{bmatrix} B_{w_1} + B_{u_1}KD_{yw} - SB_{w_2} \\ RB_{w_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(Q, S, K) := [ C_{z_1}Q \quad C_{z_1}S + C_{z_2} + D_{zu}KC_{y_2} ],$$

$$\mathbf{D}(K) := D_{zw} + D_{zu}KD_{yw},$$

$$(59) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad Q \succ 0, \quad R \succ 0$$

*разрешима относительно скалярной переменной  $\eta$ , вещественных  $(m_w \times m_w)$ -матрицы  $\Psi$ , матрицы регулятора  $K$  и матриц  $Q, R$  и  $S$ .*

**Доказательство.** Пусть решение системы неравенств (56)–(59) существует. Тогда из (50), (53), (55) следует, что

$$(60) \quad \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = P_1 \Phi P_1^T,$$

$$(61) \quad \begin{bmatrix} A_{11}Q & A_{11}S - SA_{22} + A_{12} + B_{u_1}KC_{y_2} \\ 0 & RA_{22} \end{bmatrix} = P_1 \Phi A P_1^T,$$

$$(62) \quad \begin{bmatrix} B_{w_1} + B_{u_1}KD_{yw} - SB_{w_2} \\ RB_{w_2} \end{bmatrix} = P_1 \Phi B,$$

$$(63) \quad [ C_{z_1}Q \quad C_{z_1}S + C_{z_2} + D_{zu}KC_{y_2} ] = \mathcal{C}P_1^T.$$

Подставляя выражения (60)–(63) в ЛМН (57), (58), получаем

$$(64) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi P_1^T & \mathcal{D}^T \\ P_1 \Phi \mathcal{B} & -P_1 \Phi P_1^T & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 \Phi P_1^T & 0 & P_1 \mathcal{A}^T \Phi P_1^T & P_1 \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi P_1^T & \mathcal{D}^T \\ P_1 \Phi \mathcal{A} P_1^T & P_1 \Phi \mathcal{B} & -P_1 \Phi P_1^T & 0 \\ \mathcal{C} P_1^T & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование неравенств (64) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, P_1^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(P_1^{-1}, I_{m_w}, P_1^{-1}, I_{p_z})$$

соответственно, где  $P_1$  определяется (55), приводит к

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi & \mathcal{D}^T \\ \Phi \mathcal{B} & -\Phi & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(65) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T \Phi & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T \Phi & \mathcal{D}^T \\ \Phi \mathcal{A} & \Phi \mathcal{B} & -\Phi & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Умножая неравенства (65) слева и справа на матрицы

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, \Phi^{-1}, I_{p_z}) \succ 0, \quad \text{blockdiag}(I_{n_x}, I_{m_w}, \Phi^{-1}, I_{p_z}) \succ 0$$

соответственно, получим

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(66) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ 0 & -\eta I_{m_w} & \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Phi^{-1} & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (51),(56), (59),(66) следует, что матрица статического регулятора по выходу  $K$  является решением задачи 3 для объекта управления (49) и замкнутой системы (50), что и требовалось доказать.

**Следствие 3.** *Условия теоремы 3 позволяют вычислять наименьшее значение  $\gamma$  из решения задачи выпуклой оптимизации*

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, Q, R, S, K, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (56)–(59),} \end{array} \right.$$

где  $\hat{\gamma} := \gamma^2$ .

Матрица коэффициента усиления  $K$  статического регулятора по выходу непосредственно входит в ЛМН (57), (58). Как отмечено в [28], это позволяет налагать на матрицу регулятора некоторые структурные требования для синтеза, например, децентрализованного управления (с блочно-диагональной матрицей  $K$ ) из решения задачи выпуклой оптимизации (67).

Результат теоремы 3 делает возможным применение анизотропной нормы замкнутой системы в качестве целевой функции или спецификации качества для определенных групп вход-выходных каналов замкнутой системы в задачах многокритериального управления со спецификациями в терминах ЛМН, рассматриваемых в [30].

Следует также отметить, что в общем случае, когда структурное свойство (48) не выполняется, можно следовать [28] и использовать параметризацию Юлы–Кучеры стабилизирующего регулятора [21, 36] для аффинной параметризации замкнутой системы, навязывая указанное структурное свойство и приводя реализацию замкнутой системы к виду (49). Тогда задачу синтеза анизотропного регулятора можно переформулировать как задачу нахождения параметра Юлы, входящего в замкнутую систему аффинно, посредством применения результата теоремы 3 и следствия 3.

Кроме класса систем, для которых выполняется структурное свойство (48), существуют два важных частных случая структуры

объекта управления, которые позволяют сформулировать задачу синтеза статического регулятора по выходу в виде задачи выпуклой оптимизации посредством применения невырожденных преобразований координат и введения некоторых вспомогательных переменных аналогично тому, как это было сделано в [23] для задач синтеза  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторов. Эти случаи называются сингулярными задачами управления и фильтрации.

Рассмотрим сперва сингулярную задачу управления, когда матрица  $D_{zu}$  реализации объекта управления (1) равна нулю, а матрица  $B_u$  имеет полный ранг по столбцам. Тогда существует невырожденная матрица преобразования координат состояния  $T_u$  такая что [23]

$$(68) \quad \bar{B}_u := T_u B_u = \begin{bmatrix} I_{m_u} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В частности, такая матрица может быть выбрана в виде  $T_u = [B_u \ \mathcal{N}_{B_u^T}]^{-1}$ , где столбцы матрицы  $\mathcal{N}_{B_u^T}$  образуют базис нуль-пространства матрицы  $B_u^T$ . В новых координатах матрицы реализации объекта управления имеют вид

$$(69) \quad \bar{A} := T_u A T_u^{-1}, \bar{B}_w := T_u B_w, \bar{C}_z := C_z T_u^{-1}, \bar{C}_y := C_y T_u^{-1}.$$

**Теорема 4.** Пусть для объекта управления  $P$  с реализацией (1) выполняется  $D_{zu} = 0$  и  $\text{rank } B_u = m_u$ . Для заданных  $\alpha \geq 0$ ,  $\gamma > 0$  анизотропный субоптимальный регулятор в виде статической обратной связи по выходу (45), являющийся решением задачи 3 для реализации замкнутой системы

$$(70) \quad \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array} \right],$$

существует, если система неравенств

$$(71) \quad \eta - (e^{-2\alpha/m_w} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(72) \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & \\ \bar{S} \bar{B}_w + L D_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * & \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} & \end{array} \right] < 0,$$

$$(73) \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} -\bar{\Phi} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{S} \bar{A} + L \bar{C}_y & \bar{S} \bar{B}_w + L D_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * \\ \bar{C}_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] < 0,$$

(74)  $\eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \bar{\Phi} \succ 0,$   
 где  $\bar{A}, \bar{B}_w, \bar{C}_z, \bar{C}_y$  определяются (69), разрешима относительно скалярной переменной  $\eta$ , вещественных  $(m_w \times m_w)$ -матрицы  $\Psi$ ,  $(n_x \times n_x)$ -матрицы  $\bar{\Phi}$  и двух структурированных матричных переменных

$$(75) \quad \bar{S} := \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если система неравенств (71)–(74) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора по выходу  $K = \bar{S}_1^{-1} L_1$ .

**Доказательство.** Пусть решение системы неравенств (71)–(74) существует. Конгруэнтное преобразование неравенств (72), (73) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, T_u^\top, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(T_u^\top, I_{m_w}, T_u^\top, I_{p_z})$$

соответственно, приводит к

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ T_u^\top \bar{S} T_u B_w + T_u^\top L D_{yw} & T_u^\top (\bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^\top) T_u & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -T_u^\top \bar{\Phi} T_u & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ T_u^\top \bar{S} T_u A + T_u^\top L C_y & T_u^\top \bar{S} T_u B_w + T_u^\top L D_{yw} & T_u^\top (\bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^\top) T_u & * \\ C_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0$$

где матрицы реализации объекта управления получены применением обратного преобразования (69). Обозначим  $S := T_u^\top \bar{S} T_u$ ,  $\Phi := T_u^\top \bar{\Phi} T_u$ . Тогда из (75) и определения  $K = \bar{S}_1^{-1} L_1$  следует, что

$$(76) \quad T_u^\top L = T_u^\top \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T_u^\top \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_u} \\ 0 \end{bmatrix} K = \\ = T_u^\top \bar{S} \bar{B}_u K = S B_u K,$$

и предыдущие ЛМН можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ S(B_w + B_u K D_{yw}) & \Phi - S - S^\top & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ S(A + B_u K C_y) & S(B_w + B_u K D_{yw}) & \Phi - S - S^T & * \\ C_z & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

или, в терминах реализации замкнутой системы (70), в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ S\mathcal{B} & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ S\mathcal{A} & S\mathcal{B} & \Phi - S - S^T & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование предыдущих неравенств с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, S^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(I_{n_x}, I_{m_w}, S^{-1}, I_{p_z})$$

соответственно, приводит к

$$(77) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{B} & S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T} & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(78) \quad \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T} & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Из неравенства

$$(S^{-1} - \Phi^{-1})(-\Phi)(S^{-1} - \Phi^{-1})^T \prec 0$$

следует, что

$$-\Phi^{-1} \prec S^{-1}\Phi S^{-T} - S^{-1} - S^{-T}.$$

Тогда, в силу леммы 1, из (71), (74), (77), (78) следует, что матрица статического регулятора  $K$  является решением задачи 3 для замкнутой системы с реализацией (70), что и требовалось доказать.

**Замечание 3.** В отличие от доказательств теорем 1–3, для теоремы 4 невозможно доказать эквивалентность неравенств синтеза (71)–(74) и условий (8)–(10) леммы 1. ЛМН синтеза (72), (73) устанавливают только достаточные условия разрешимости неравенств (9), (10) леммы 1. Это также касается и последующей теоремы синтеза.

**Следствие 4.** Условия теоремы 4 позволяют вычислять наименьшее значение  $\gamma$  из решения задачи выпуклой оптимизации

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \bar{\Phi}, \bar{S}, L, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (71)–(74),} \end{array} \right.$$

где  $\hat{\gamma} := \gamma^2$ . Если задача (79) разрешима, матрица статического регулятора вычисляется согласно теореме 4.

Рассмотрим теперь сингулярную задачу фильтрации, когда матрица  $D_{yw}$  реализации объекта управления (1) равна нулю, а матрица  $C_y$  имеет полный строчный ранг. Тогда существует невырожденная матрица преобразования координат  $T_y$ , такая что [23]

$$(80) \quad \bar{C}_y := C_y T_y^{-1} = \begin{bmatrix} I_{p_y} & 0 \end{bmatrix}.$$

В частности, такую матрицу можно выбрать в виде  $T_y = \begin{bmatrix} C_y^T & \mathcal{N}_{C_y} \end{bmatrix}^T$ , где строки матрицы  $\mathcal{N}_{C_y}$  образуют базис нуль-пространства матрицы  $C_y$ . В новых координатах матрицы реализации объекта управления имеют вид

$$(81) \quad \bar{A} := T_y A T_y^{-1}, \quad \bar{B}_w := T_y B_w, \quad \bar{B}_u := T_y B_u, \quad \bar{C}_z := C_z T_y^{-1}.$$

**Теорема 5.** Предположим, что для объекта управления  $P$  с реализацией (1) выполняется  $D_{yw} = 0$  и  $\text{rank } C_y = p_y$ . Для заданных  $a \geq 0$ ,  $\gamma > 0$  статический регулятор по выходу (45), являющийся решением задачи 3 для реализации замкнутой системы

$$(82) \quad \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_u K C_y & B_w \\ \hline C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} \end{array} \right],$$

существует, если система неравенств

$$(83) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(84) \quad \left[ \begin{array}{ccc} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{B}_w & -\bar{\Pi} & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{array} \right] \prec 0,$$

$$(85) \quad \begin{bmatrix} \bar{\Pi} - \bar{R} - \bar{R}^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{A}\bar{R} + \bar{B}_u M & \bar{B}_w & -\bar{\Pi} & * \\ \bar{C}_z \bar{R} + D_{zu} M & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(86) \quad \eta > \gamma^2, \quad \Psi \succ 0, \quad \bar{\Pi} \succ 0,$$

где  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}_w$ ,  $\bar{C}_z$ ,  $\bar{C}_y$  определяются (81), разрешима в отношении скалярной переменной  $\eta$ , вещественных  $(m_w \times m_w)$ -матрицы  $\Psi$ ,  $(n_x \times n_x)$ -матрицы  $\bar{\Pi}$  и двух структурированных матричных переменных

$$(87) \quad \bar{R} := \begin{bmatrix} \bar{R}_1 & 0 \\ 0 & \bar{R}_2 \end{bmatrix}, \quad M := \begin{bmatrix} M_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если система неравенств (83)–(86) разрешима и неизвестные переменные найдены, матрица статического регулятора по выходу  $K = M_1 \bar{R}_1^{-1}$ .

Доказательство этой теоремы дуально доказательству теоремы 4.

**Доказательство.** Пусть существует решение системы неравенств (83)–(86). Поставим матрицы реализации, определяемые (81), в ЛМН (84), (85). Выполним конгруэнтное преобразование ЛМН (84), (85) с матрицами

$$\text{blockdiag}(I_{m_w}, T_y^{-1}, I_{p_z}), \quad \text{blockdiag}(T_y^{-1}, I_{m_w}, T_y^{-1}, I_{p_z})$$

соответственно. Затем определим  $R := T_y^{-1} \bar{R} T_y^{-T}$  и  $\Pi := T_y^{-1} \bar{\Pi} T_y^{-T}$ . Из (87) и определения  $K = M_1 \bar{R}_1^{-1}$  следует, что  $MT_y^{-T} = KC_y R$  и ЛМН (84), (85) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w & -\Pi & * \\ D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Pi - R - R^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ (A + B_u K C_y) R & B_w & -\Pi & * \\ (C_z + D_{zu} K C_y) R & D_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

или, в терминах реализации замкнутой системы (82), в виде

$$(88) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$(88) \quad \begin{bmatrix} \Pi - R - R^T & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A}R & \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{C}R & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Конгруэнтное преобразование последнего неравенства с матрицей

$$\text{blockdiag}(R^{-T}, I_{m_w}, I_{n_x}, I_{p_z})$$

приводит к

$$(89) \quad \begin{bmatrix} R^{-T}\Pi R^{-1} - R^{-1} - R^{-T} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & -\Pi & * \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Из неравенства

$$(R^{-1} - \Pi^{-1})^T(-\Pi)(R^{-1} - \Pi^{-1}) \prec 0$$

следует

$$-\Pi^{-1} \prec R^{-T}\Pi R^{-1} - R^{-1} - R^{-T}.$$

Обозначим  $\Phi := \Pi^{-1}$ . В силу леммы 1, из (83), (86), (88), (89) следует, что матрица статического регулятора по выходу  $K$  является решением задачи 3 для реализации замкнутой системы (82), что и требовалось доказать.

**Следствие 5.** Условия теоремы 5 позволяют вычислять наименьшее значение  $\gamma$  из решения задачи выпуклой оптимизации

$$(90) \quad \begin{cases} \hat{\gamma} \rightarrow \inf \\ \text{на множестве } \Psi, \bar{\Pi}, \bar{R}, M, \eta, \hat{\gamma}, \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (83)–(86),} \end{cases}$$

$\hat{\gamma} := \gamma^2$ . Если задача (90) разрешима, матрица регулятора вычисляется согласно теореме 5.

Как отмечено в [23], поскольку сингулярные задачи управления и фильтрации дуальны, системы неравенств (71)–(74) и (83)–(86) теорем 4 и 5 в некотором смысле также являются дуальными, как и задачи выпуклой оптимизации (79) и (90) следствий 4 и 5. Заменяя матрицы реализаций и переменные в новых координатах в формулах теоремы 4 и следствия 4 как

$$\begin{aligned} \{\bar{A}, \bar{B}_w, \bar{B}_u, \bar{C}_z, D_{zw}, \bar{C}_y, D_{yw}\} \\ \longrightarrow \{\bar{A}^T, \bar{C}_z^T, \bar{C}_y^T, \bar{B}_w^T, D_{zw}^T, \bar{B}_u^T, D_{zu}^T\}, \\ \{\eta, \Psi, \bar{\Phi}, \bar{S}, L\} \longrightarrow \{\eta, \Psi, \bar{\Pi}, \bar{R}^T, M^T\}, \end{aligned}$$

получим соответствующие формулы теоремы 5 и следствия 5, где матрица статического регулятора по выходу  $K \longrightarrow K^T$ .

В [23] показано, что результаты теоремы 4 и следствия 4 можно применять для синтеза децентрализованных анизотропийных субоптимальных и  $\gamma$ -регуляторов в виде статической обратной связи по выходу и заданного порядка. В свою очередь, теорема 5 и следствие 5 позволяют получить решение задач анизотропийного управления множественными объектами по измеряемому выходу.

#### 2.4. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ЗАДАННОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Известно (см. например [17]), что задачу синтеза динамического регулятора заданного порядка можно представить в виде задачи синтеза статического регулятора по выходу, дополнив вектор состояния объекта управления состояниями регулятора:

$$(91) \quad \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} := \left[ \begin{array}{cc|cc} A & 0 & B_w & 0 & B_u \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_\xi} & 0 \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} & 0 & D_{zu} \\ 0 & I_{n_\xi} & 0 & 0 & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Реализация замкнутой системы с расширенным объектом управления (91) имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_w \\ C_z & D_{zw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ D_{zu} \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{zw} \\ C_z + D_{zw} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где матрица  $K$  включает матрицы параметров регулятора:

$$(92) \quad K := \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}.$$

Поэтому, если в модели объекта управления (1) одна из матриц  $D_{zu}$  или  $D_{yw}$  равна нулю, и матрицы  $B_u$  или  $C_y$  имеют полный столбцовый/строчный ранг соответственно, можно применить теорему 4 и следствие 4 или теорему 5 и следствие 5, чтобы найти анизотропийный  $\gamma$ -оптимальный (субоптимальный) регулятор заданного порядка как решение задачи синтеза статического регулятора по выходу (92) для расширенной реализации объекта управления (91).

### 3. Примеры решения прикладных задач

В этом разделе мы рассмотрим несколько иллюстративных примеров синтеза анизотропийных  $\gamma$ -оптимальных регуляторов методом выпуклой оптимизации. Будут рассматриваться только два частных случая структуры регулятора и объекта, а именно, регулятор полного порядка и статическая обратная связь по выходу для сингулярной задачи фильтрации, определенные в теоремах 2 и 5 соответственно.

Все вычисления выполнялись в системе *MATLAB* 7.9.0 (R2009b) средствами пакетов *Control System Toolbox* и *Robust Control Toolbox* в сочетании с интерфейсом *YALMIP* [26] и решателем *SeDuMi* [31] на процессоре P8700  $2 \times 2$ , 53ГГц.

### 3.1. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ПОЛНОГО ПОРЯДКА ПО ВЫХОДУ

#### 3.1.1. ПОСАДКА САМОЛЕТА ТУ-154

Рассмотрим сперва задачу управления продольным движением самолета при заходе на посадку под воздействием детерминированных и стохастических возмущений в условиях сдвига ветра и шума измерений. Управление направлено на подавление влияния внешних возмущений и стабилизацию продольного движения самолета вдоль некоторой заданной глиссады. Линеаризованная дискретная стационарная модель посадки самолета Ту-154 представлена в [22], где задача была решена с помощью анизотропийного оптимального регулятора [35], и подробно рассмотрена в [8]. Здесь приводятся результаты решения задачи синтеза анизотропийного  $\gamma$ -оптимального регулятора полного порядка методом выпуклой оптимизации в соответствии с теоремой 2 и следствием 2.

Математическая модель продольного движения самолета в отклонениях от номинальной траектории приводится в [8, 22] для точки траектории, характеризующейся воздушной скоростью  $V_0 = 71,38$  м/с, углом наклона траектории полета  $\theta_0 = -2,7$  град, угловой скоростью тангажа  $\omega_{z0} = 0$  град/с, углом тангажа  $\vartheta_0 = 0$  град, высотой  $h_0 = 600$  м и тягой  $T_0 = 52540$  Н. Модель имеет порядок  $n_x = 6$ , два входа управления (сигналы  $\Delta\vartheta_{cy}$  и  $\Delta\delta_t$ , генерируемые регулятором для отклонения обобщенных элеронов и положения сектора газа) и два измеряемых выхода (отклонения воздушной скорости  $\Delta V + w_{V,k}$  и высоты  $\Delta h + w_{h,k}$ ). Шаг дискретного времени модели  $\Delta t = 0,01$  с.

Анизотропийный  $\gamma$ -оптимальный регулятор  $K_a$  был получен из решения задачи выпуклой оптимизации (44) по теореме 2. Реализация в пространстве состояний анизотропийного  $\gamma$ -оптимального регулятора  $K_a$  была вычислена для уровня средней

анизотропии возмущения  $a = 0,7$  и имеет вид

$$A_c^a = \begin{bmatrix} 0,9959 & -0,0001701 & -0,0009358 & -0,001023 & 0,005572 & 0,01975 \\ -0,001248 & 0,9946 & 0,007195 & -0,0001598 & -0,00115 & 0,002974 \\ 0,003114 & -0,01651 & 0,9865 & 0,0004621 & 0,01104 & -0,004157 \\ 0,0009071 & 0,0004571 & -0,002899 & 0,9953 & -0,00819 & 0,006493 \\ -0,001239 & -0,004594 & -0,002913 & -0,0006268 & 0,9905 & -0,003993 \\ -0,0006717 & -0,0216 & -0,0315 & -0,06266 & 0,007809 & 0,9647 \end{bmatrix},$$

$$C_c^a = \begin{bmatrix} 5,558 \cdot 10^{-6} & 4,835 \cdot 10^{-5} & -2,522 \cdot 10^{-5} & 0,00066 & 0,002 & -0,0015 \\ 1,122 \cdot 10^{-5} & 4,891 \cdot 10^{-5} & 7,805 \cdot 10^{-5} & 0,0001 & -0,00058 & -0,0020 \end{bmatrix},$$

$$B_c^a = \begin{bmatrix} 1,698 & 0,7115 \\ 0,2287 & 0,1535 \\ -0,02124 & -0,06646 \\ -5,48 & -1,223 \\ 22,7 & 1,848 \\ 79,44 & 34,71 \end{bmatrix}, \quad D_c^a = \begin{bmatrix} -0,08091 & -0,05013 \\ -0,1794 & -0,07335 \end{bmatrix}.$$

Реализации  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторов  $K_2$  и  $K_\infty$  были вычислены функциями пакета *Robust Control Toolbox* системы *MATLAB* `h2syn` (решение уравнений Риккати) и `hinfsyn` (ЛМН). Матрицы реализации регулятора  $K_2$  имеют вид

$$A_c^2 = \begin{bmatrix} 0,9901 & -0,0008 & 0 & -0,0009 & -0,000133 & 0,0009 \\ 0,002025 & 0,9962 & 0,001999 & 0,008616 & -0,002482 & 6,243 \cdot 10^{-5} \\ -0,007851 & -0,01844 & 0,9754 & -0,0292 & -0,01198 & -0,0006086 \\ -0,0001271 & -0,0002021 & 0,009825 & 0,9998 & -0,001113 & -5,202 \cdot 10^{-6} \\ -0,0006442 & 0,0124 & 0 & 0 & 0,9862 & 0 \\ -0,003035 & -0,0006769 & -0,0001388 & -0,0001432 & -0,0004761 & 0,9954 \end{bmatrix},$$

$$C_c^2 = \begin{bmatrix} -0,6649 & -2,021 & -0,749 & -1,18 & -0,9897 & -0,05202 \\ -0,7587 & -0,1692 & -0,03469 & -0,03581 & -0,119 & -0,1572 \end{bmatrix},$$

$$B_c^2 = \begin{bmatrix} 0,009301 & 0,000133 \\ 0,0009729 & 0,003669 \\ 0,0001711 & 0,0003985 \\ 6,059 \cdot 10^{-5} & 0,001014 \\ 0,0001442 & 0,01381 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы реализации регулятора  $K_\infty$  равны

$$A_c^\infty = \begin{bmatrix} 0,9959 & -0,0001701 & -0,0009358 & -0,001023 & 0,005572 & 0,01975 \\ -0,001248 & 0,9946 & 0,007195 & -0,0001598 & -0,00115 & 0,002974 \\ 0,003114 & -0,01651 & 0,9865 & 0,0004621 & 0,01104 & -0,004157 \\ 0,0009071 & 0,0004571 & -0,002899 & 0,9953 & -0,00819 & 0,006493 \\ -0,001239 & -0,004594 & -0,002913 & -0,0006268 & 0,9905 & -0,003993 \\ -0,0006717 & -0,0216 & -0,0315 & -0,06266 & 0,007809 & 0,9647 \end{bmatrix},$$

$$C_c^\infty = \begin{bmatrix} 5,558 \cdot 10^{-6} & 4,835 \cdot 10^{-5} & -2,522 \cdot 10^{-5} & 0,00066 & 0,002 & -0,0015 \\ 1,122 \cdot 10^{-5} & 4,891 \cdot 10^{-5} & 7,805 \cdot 10^{-5} & 0,0001 & -0,00058 & -0,0020 \end{bmatrix},$$

$$B_c^\infty = \begin{bmatrix} 1,698 & 0,7115 \\ 0,2287 & 0,1535 \\ -0,02124 & -0,06646 \\ -5,48 & -1,223 \\ 22,7 & 1,848 \\ 79,44 & 34,71 \end{bmatrix}, \quad D_c^\infty = \begin{bmatrix} -0,08091 & -0,05013 \\ -0,1794 & -0,07335 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования замкнутых систем в условиях сдвига ветра и шумов измерений представлены вместе с результатами решения задачи в таблице 1 и проиллюстрированы на рис. 2–5. При моделировании применялся типичный профиль ветра, описываемый моделью в форме вихревого кольца [18].

Из результатов решения задачи в таблице 1 можно заключить, что

- квадратный корень из наименьшего значения целевой функции удовлетворяет цепочке неравенств  $\gamma_2 < \gamma_a < \gamma_\infty$ ;
- $a$ -анизотропийная норма замкнутой системы с анизотропийным  $\gamma$ -оптимальным регулятором удовлетворяет условию  $\|T_{zw}\|_{0,7} < \gamma_a$ ; регулятор является действительно субоптимальным.

Анализ результатов моделирования, представленных в таблице 1 и на рис. 2–5, показывает, что

- анизотропийный  $\gamma$ -оптимальный регулятор приводит к наименьшему максимальному абсолютному отклонению воздушной скорости и допустимому максимальному абсолютному отклонению высоты;

Таблица 1. Посадка самолета Ту-154. Сравнение замкнутых систем

	Регулятор в цепи обратной связи		
	$K_2$	$K_a$	$K_\infty$
Результаты решения:			
$\min \gamma$	0,516	5,4203	10,894
$\ T_{zw}\ _2$	0,516	1,1473	3,1448
$\ T_{zw}\ _{0,7}$	7,8391	5,1768	5,5944
$\ T_{zw}\ _\infty$	15,855	10,93	10,891
Время ЦП, с	0,78001	5,928	1,7004
Результаты моделирования:			
$\max  \Delta V $ , м/с	11,3	3,559	4,329
$\max  \Delta h $ , м	54,79	46,87	39,79
$\max  \Delta \theta $ , град	14,86	16,04	31,6
$\max  \Delta \omega_z $ , град/с	4,884	5,043	10,56
$\max  \Delta \vartheta $ , град	19,06	19	38,08
$\max  \Delta T $ , кН	7,263	22,58	42,48
$\max  \Delta \vartheta_{cy} $ , град	20,7	20,8	21,91
$\max  \Delta \delta_t $ , град	8,224	29,25	29,23

- наихудшие максимальные абсолютные отклонения управляемых переменных продемонстрированы замкнутой системой с  $\mathcal{H}_2$ -оптимальным регулятором;
- в замкнутой системе с анизотропийным регулятором максимальное дополнительное значение тяги двигателя, требуемое для маневра, почти в два раза меньше, чем дополнительная тяга, требуемая системой с  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятором;
- аналогичные замечания можно сделать в отношении максимальных значений отклонений угла наклона траектории, угловой скорости тангажа и угла тангажа;
- наименьшее максимальное значение дополнительной тяги двигателя требуется замкнутой системе с  $\mathcal{H}_2$ -оптимальным регулятором;
- наибольшие значения сигналов управления анизотропийного и  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторов близки, но сигнал управления, генерируемый анизотропийным регулятором выглядит более реалистичным.

Очевидно, что анизотропный  $\gamma$ -оптимальный регулятор в рассматриваемой задаче подавления возмущений является более эффективным, чем  $\mathcal{H}_2$ -регулятор, и менее консервативным, чем  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятор.

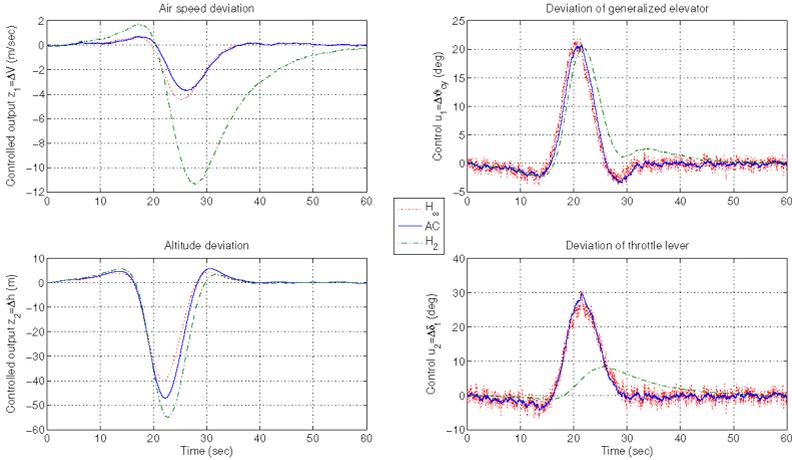


Рис. 2. Посадка самолета Ту-154. Воздушная скорость  $\Delta V$ , высота  $\Delta h$  (диаграммы слева) и сигналы управления  $\Delta \delta_{cy}$ ,  $\Delta \delta_t$  (диаграммы справа)

### 3.1.2. УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ АТАКИ РАКЕТЫ «ВОЗДУХ–ВОЗДУХ»

Рассмотрим задачу синтеза регулятора для управления углом атаки ракеты «воздух–воздух». Математическая модель объекта управления первоначально была представлена в [14], где эта задача решается в робастной постановке и требуется, чтобы автопилот управлял отклонением аэродинамического руля  $\delta$  для обеспечения угла атаки  $\alpha$ , соответствующего маневру, определяемому законом наведения [14]. Более точно, управление направлено на отслеживание ступенчатых входных команд, задающих требуемый угол атаки  $\alpha_c$ , с установившейся ошибкой не более 1%, вре-

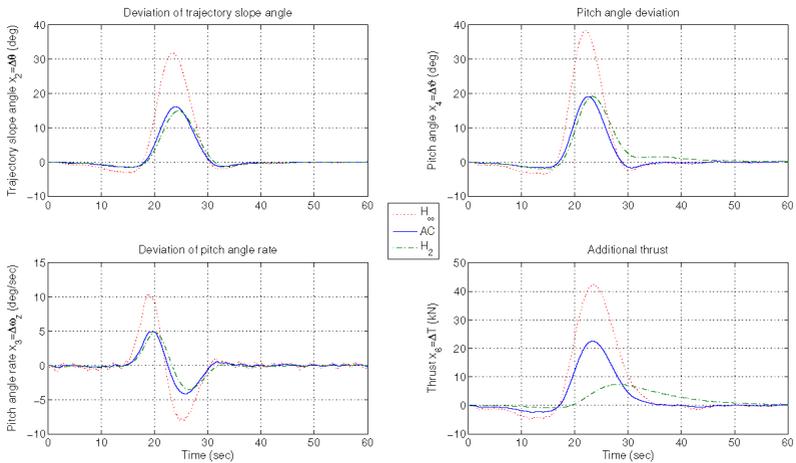


Рис. 3. Посадка самолета Ту-154. Угол наклона траектории  $\Delta\theta$ , угловая скорость тангажа  $\Delta\omega_z$  (диаграммы слева), угол тангажа  $\Delta\vartheta$ , тяга двигателя  $\Delta T$  (диаграммы справа)

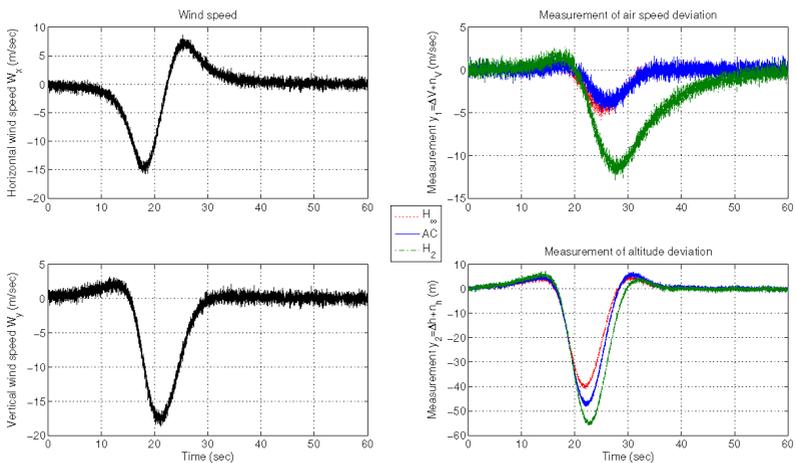


Рис. 4. Посадка самолета Ту-154. Профиль ветра (диаграммы слева) и измерения с шумами (диаграммы справа)

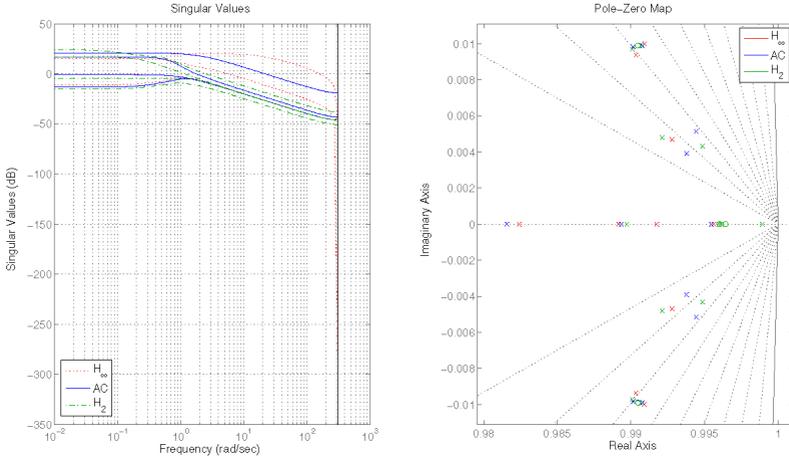


Рис. 5. Посадка самолета Ту-154. Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

менем нарастания не более 0,2 с и ограниченным перерегулированием 2% в широком диапазоне углов атаки  $\pm 20$  град и изменений числа Маха от 2,5 до 3,5 [14]. Соответствующая модель ракеты «воздух–воздух» из коллекции *COMPl<sub>e</sub>ib* [24] (AC4) не учитывает изменений числа Маха в [14] и поэтому не содержит переменных и неопределенных параметров. Стандартная линеаризованная дискретная стационарная модель объекта управления (1) была получена для значения шага дискретизации  $\Delta t = 0,0005$  с, имеет порядок  $n = 4$ ,

$$\begin{aligned} x_k &= [\alpha_k \quad q_k \quad \delta_k \quad x_{\omega,k}]^T, \\ w_k &= [n_{q,k} \quad \alpha_{c,k}]^T, \\ u_k &= \delta_{e,k}, \\ z_k &= [z_e \quad z_\delta]^T, \\ y_k &= [\alpha_{c,k} - \alpha_k \quad n_{q,k} - q_k]^T, \end{aligned}$$

где  $\alpha_k$  — угол атаки;  $q_k$  — угловая скорость;  $\delta_k$  — угол поворота аэродинамического руля;  $n_{q,k}$  — шум измерения угловой скорости;  $\alpha_{c,k}$  — требуемый угол атаки (команда головки самонаведе-

ния);  $\delta_{e,k}$  — сигнал управления (команда поворота аэродинамического руля);  $z_{e,k}$ , — управляемая переменная, соответствует выходу взвешенной функции чувствительности и служит для минимизации ошибки слежения;  $z_{\delta,k}$  — управляемая переменная, служит для ограничения угловой скорости привода аэродинамического руля. Матрицы реализации в пространстве состояний дискретной модели имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0,99956 & 4,9989 \cdot 10^{-4} & -7,4166 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0,0044549 & 1 & -0,062984 & 0 \\ 0 & 0 & 0,92774 & 0 \\ -0,00049988 & -1,2498 \cdot 10^{-7} & 1,7413 \cdot 10^{-8} & 0,99998 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4,9999 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} -2,6119 \cdot 10^{-6} \\ -0,0023914 \\ 0,072257 \\ 4,211 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} -0,25 & 0 & 0 & 3,487 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С целью сравнения анизотропийного  $\gamma$ -оптимального регулятора, найденного из решения задачи выпуклой оптимизации (44), с анизотропийным оптимальным регулятором [35], полученным из решения системы перекрестно-связанных нелинейных матричных алгебраических уравнений методом гомотопии [11], при решении задачи синтеза в реализации регулятора (22) и в формулах (34)–(40) теоремы 2 матрица  $D_c$  параметров регулятора была положена нулевой:  $D_c = 0$ .

Реализации в пространстве состояний анизотропийного  $\gamma$ -оптимального регулятора  $K_a$  и оптимального регулятора  $K_a^{\text{opt}}$  [35], синтезированных для уровня средней анизотропии  $a = 0.015$ , представлены ниже вместе с реализациями  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -

регуляторов  $K_2$  и  $K_\infty$ :

$$K_2 = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0,9929 & 0,00318 & 7,027 \cdot 10^{-5} & 0,0001953 & 1,399 & -5,483 \\ -0,01051 & 1,001 & 0,0001157 & 0,005679 & 1,456 & 3,911 \\ -0,02391 & 0,0008612 & 0,9977 & 0,003235 & 22,13 & -19 \\ 0,1283 & -0,03046 & 0,006925 & 0,9813 & 158,2 & 123,9 \\ \hline 1,002 \cdot 10^{-5} & -4,208 \cdot 10^{-5} & -4,842 \cdot 10^{-6} & -2,637 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$K_a = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0,9971 & -0,000628 & -0,0002935 & 0,0001 & -0,02275 & 0,005662 \\ -0,01009 & 0,9968 & -0,003374 & -0,001076 & 2,368 & -0,02642 \\ 0,04287 & 0,006622 & 0,9935 & -0,008994 & -2,682 & 0,3372 \\ 0,3668 & 0,05229 & 0,005948 & 0,9837 & 28,65 & 8,158 \\ \hline 0,002608 & 0,00101 & 0,0005219 & -0,0001099 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$K_a^{\text{opt}} = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0,9996 & -0,000247 & -7,575 \cdot 10^{-5} & 1,34 \cdot 10^{-5} & -8,7 \cdot 10^{-8} & -0,001 \\ 0,002587 & 0,9973 & -0,06449 & 0,01059 & -3,01 \cdot 10^{-7} & -0,0026 \\ 0,0564 & 0,004483 & 0,9734 & -0,3197 & 0 & 0 \\ 1,1 \cdot 10^{-7} & 5,81 \cdot 10^{-8} & 1,766 \cdot 10^{-8} & 1 & 0,0005 & 1,83 \cdot 10^{-7} \\ \hline 0,7806 & 0,06204 & 0,6312 & -4,425 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$K_\infty = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0,9733 & 0,001717 & 8,548 \cdot 10^{-5} & 0,000289 & 0,0008433 & -0,5844 \\ 0,2642 & 0,9888 & -0,003766 & 0,02217 & 0,1204 & 6,738 \\ -0,6253 & 0,02455 & 0,9855 & 0,04666 & 0,7891 & -15,5 \\ 4,058 & -0,4717 & 0,161 & 0,02602 & 430,4 & 149,4 \\ \hline 0,00143 & -0,0007134 & -0,0001299 & -0,0003772 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Результаты решения задачи и моделирования замкнутых систем с  $\mathcal{H}_2$ -, анизотропийным и  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторами  $K_2$ ,  $K_a$  и  $K_\infty$  в условиях шумов измерений приводятся в таблице 2 и на рис. 6–11. При моделировании опорные значения  $\alpha_c$  генерировались как ступенчатые сигналы со случайной амплитудой и равной продолжительностью. Переходные характеристики на рис. 9, 10 показывают, что время нарастания в замкнутых системах, отмеченное на этих графиках, не превосходит желаемого значения 0,2 с для всех трех регуляторов. При этом диаграммы на рис. 6 демонстрируют

Таблица 2. Ракета «воздух–воздух» (модель АС4) из коллекции COMPlib [24, 25]. Сравнение замкнутых систем

	Регулятор в цепи обратной связи			
	$K_2$	$K_a$	$K_a^{\text{opt}}$	$K_\infty$
Результаты решения:				
$\min \gamma$	0,50195	0,20079	—	0,56309
$\ T_{zw}\ _2$	0,25195	0,25354	0,25353	0,5512
$\ T_{zw}\ _{0,015}$	0,20638	0,20076	0,20072	0,42198
$\ T_{zw}\ _\infty$	0,81288	0,63601	0,63509	0,56384
Время ЦП, с	2,8704	2,4336	1,4352	1,794
Результаты моделирования:				
$\max  \alpha_c $ , град	20	20	20	20
$\max  \alpha $ , град	20,666	20,301	20,229	20,078
$\max  z_e $ , град	17,063	13,494	13,356	11,85
$\max  z_\delta $ , град	1,5245	3,7428	3,7349	11,241
$\max  \delta $ , град	6,6345	10,465	10,439	12,095

приемлемое качество слежения и меньшую амплитуду сигнала управления  $\delta$  в замкнутой системе с анизотропийным регулятором по сравнению с  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятором.

Следует отметить (см. таблицу 2), что минимальное значение  $\gamma$ , полученное из решения задачи выпуклой оптимизации (44) для анизотропийного  $\gamma$ -оптимального регулятора, и анизотропийная норма замкнутой системы с оптимальным регулятором достаточно близки. Так, относительное отклонение  $\min \gamma$  от анизотропийной нормы замкнутой системы с оптимальным регулятором  $\|T_{zw}^{\text{opt}}\|_{0,015}$  составляет всего 0,03487%, а относительное отклонение анизотропийных норм замкнутых систем с  $\gamma$ -оптимальным и оптимальными регуляторами равно 0,01993%. То же самое можно сказать и в отношении результатов моделирования замкнутых систем с регуляторами  $K_a$ ,  $K_a^{\text{opt}}$  в таблице 2 и на диаграммах рис. 6–8. Таким образом, для рассматриваемой модели объекта управления — ракеты «воздух–воздух» — замкнутые системы с анизотропийными  $\gamma$ -оптимальным и оптимальным регуляторами весьма близки.

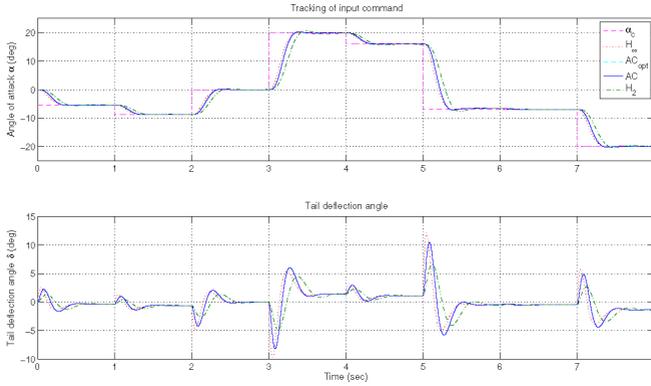


Рис. 6. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25]. Угол атаки  $\alpha$  (верхняя диаграмма) и угол отклонения аэродинамического руля  $\delta$  (нижняя диаграмма)

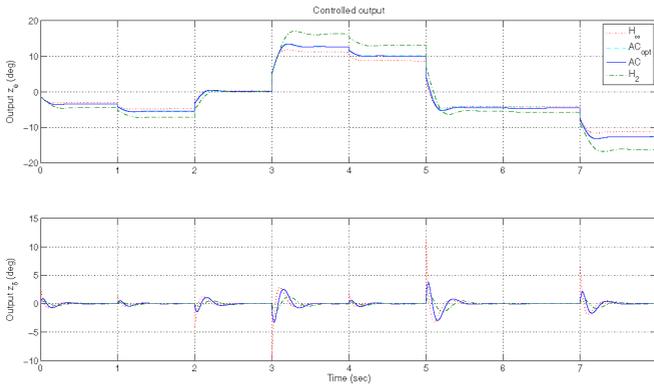


Рис. 7. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25]. Управляемый выход  $z$

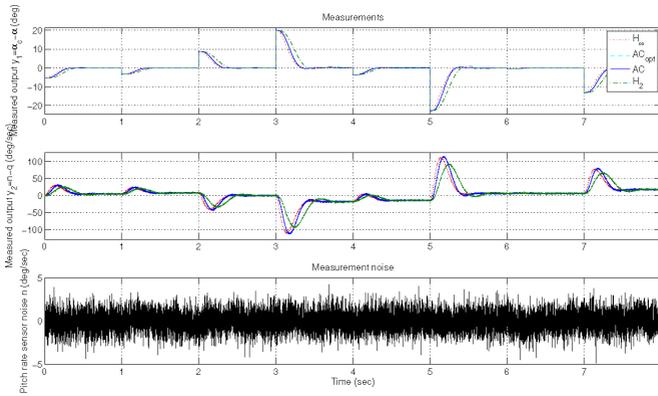


Рис. 8. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25].  
Измерение  $y$  (верхние диаграммы) шум датчика угловой скорости тангажа  $n$  (нижняя диаграмма)

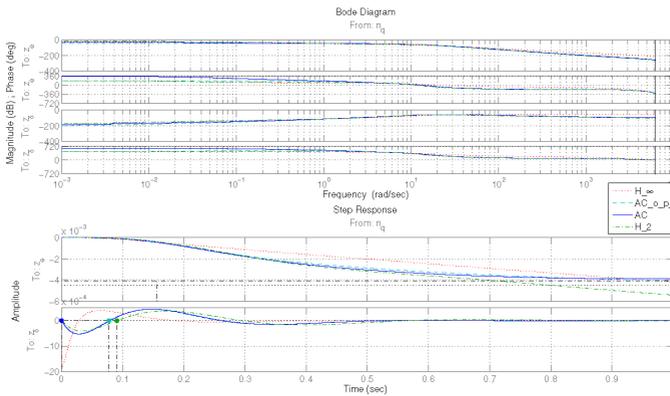


Рис. 9. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25].  
Диаграмма Бode (верхние диаграммы) и переходные характеристики (нижние диаграммы) от входа  $n_q$

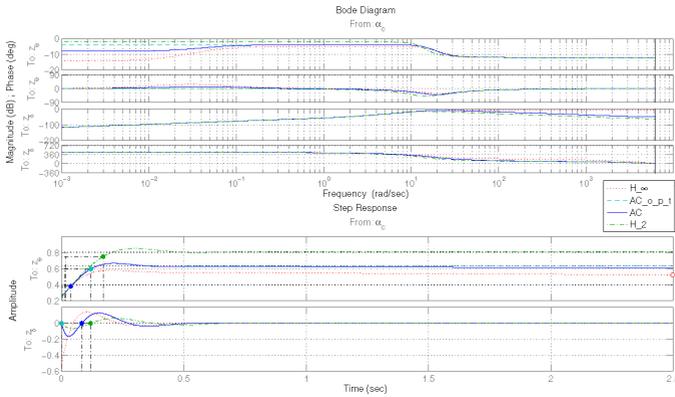


Рис. 10. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25].  
 Диаграмма Бode (верхние диаграммы) и переходные  
 характеристики (нижние диаграммы) от входа  $\alpha_c$

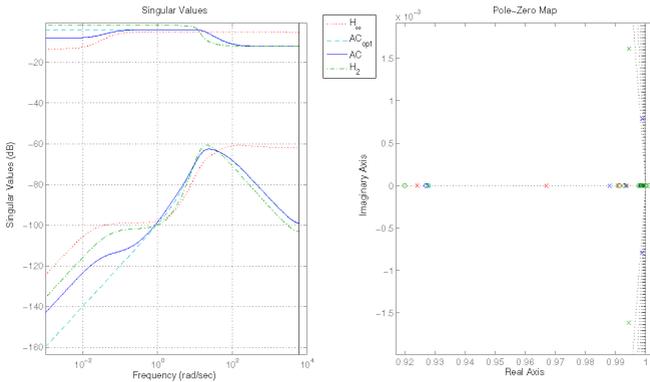


Рис. 11. Ракета «воздух–воздух» (модель AC4) [14, 24, 25].  
 Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и  
 полюсов (диаграмма справа)

### 3.1.3. ПРИМЕРЫ ИЗ БИБЛИОТЕКИ COMPL<sub>E</sub>IB

Анизотропийные  $\gamma$ -оптимальные регуляторы полного порядка были вычислены для ряда моделей из коллекции *COMPL<sub>e</sub>ib* [24, 25], перечисленных в таблице 3. Все эти модели были преобразованы в системы с дискретным временем с шагом  $\Delta t$ . Известно [25], что почти все из перечисленных моделей (за исключением модели ROC5) можно стабилизировать с помощью статической обратной связи по измеряемому выходу, но в рассматриваемом случае соответствующие задачи решались с помощью динамических регуляторов полного порядка по выходу исключительно с целью тестирования. В [7] показано, что выполнение условий частотной теоремы для анизотропийной нормы системы при  $a \rightarrow 0, +\infty$  гарантирует, что  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы той же системы не превышают заданных пороговых значений. Поэтому  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторы для соответствующих задач также были получены как предельные случаи анизотропийного регулятора из решения задачи выпуклой оптимизации (44) согласно теореме 2, но для соответствующих уровней средней анизотропии внешнего возмущения  $a \rightarrow 0$  и  $a \rightarrow +\infty$ .

### 3.2. СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

Анизотропийные  $\gamma$ -оптимальные регуляторы в виде статической обратной связи по выходу были синтезированы для ряда сингулярных задач фильтрации из коллекции *COMPL<sub>e</sub>ib* [24, 25], перечисленных ниже в таблице 4. Все эти модели были преобразованы в системы с дискретным временем с шагом  $\Delta t$ .  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторы для соответствующих задач были получены, как предельные случаи анизотропийного регулятора из решения задачи выпуклой оптимизации (90) согласно теореме 5 и следствию 5, но для соответствующих уровней средней анизотропии возмущения  $a \rightarrow 0$  и  $a \rightarrow +\infty$ .

С целью наглядной иллюстрации далее приводятся результаты решения и моделирования для задачи управления самолетом (модель AC1), первоначально рассмотренной в [16]. Модель AC1,

Таблица 3. Примеры из коллекции  $COMPl_{eib}$  [24, 25].

Регуляторы полного порядка

Модель	$(n_x, m_u, p_y)$	$\Delta t$ (сек)	$\min \gamma_2$	$a$	$\min \gamma_a$	$\min \gamma_\infty$
AC4	(4, 1, 2)	0,0005	0,50195	0,015	0,20079	0,56309
AC7	(9, 1, 2)	0,01	0,0042953	0,05	0,0094512	0,043755
AC8	(9, 1, 5)	0,01	0,049999	0,05	0,20454	1,5429
AC9	(10, 4, 5)	0,01	0,04454	0,9	0,43057	1,0007
AC12	(4, 3, 4)	0,01	0,0012071	0,01	0,0037555	0,31439
HE3	(8, 4, 6)	0,01	0,081028	0,015	0,18837	0,802
HE5	(8, 4, 2)	0,01	0,11888	0,2	0,67939	1,5066
HE6	(20, 4, 6)	0,01	0,65791	0,05	0,78951	2,3755
HE7	(20, 4, 6)	0,01	0,55239	0,05	0,68603	2,4341
JE1	(30, 3, 5)	0,01	0,76355	0,1	1,1173	—
JE3	(24, 3, 6)	0,01	1,107	0,07	1,2814	2,4149
EB1	(10, 1, 1)	0,001	0,044894	3	3,0259	3,1041
EB2	(10, 1, 1)	0,001	0,027729	3	1,7246	1,7677
EB3	(10, 1, 1)	0,001	0,029817	0,3	0,92218	1,7974
EB4	(20, 1, 1)	0,001	0,030079	0,3	0,9219	1,7863
EB5	(40, 1, 1)	0,001	0,029731	0,3	0,92087	1,7906
ROC5	(7, 3, 5)	0,001	0,0029492	0,7	0,0013201	0,0016873
TF1	(7, 2, 4)	0,1	0,043013	0,25	0,18306	0,24883
TF3	(7, 2, 3)	0,1	0,043081	0,25	0,18288	0,24799

Таблица 4. Примеры из коллекции  $COMPl_{eib}$  [24, 25].

Регуляторы в виде статической обратной связи по выходу

Модель	$(n_x, m_u, p_y)$	$\Delta t$ (сек)	$\min \gamma_2$	$a$	$\min \gamma_a$	$\min \gamma_\infty$
AC1	(5, 3, 3)	0,01	0,00045695	0,9	0,0034448	0,0036873
AC2	(5, 3, 3)	0,01	0,021254	0,9	1,3559	1,6199
AC15	(4, 2, 3)	0,0001	0,037899	0,8	0,67708	0,79834
HE1	(4, 2, 1)	0,0001	0,00075643	0,15	0,0063848	0,0099472
HE4	(8, 4, 6)	0,01	2,8727	0,05	8,0104	21,823
NN15	(3, 2, 2)	0,001	0,015202	0,3	0,25514	0,3441
NN16	(8, 4, 4)	0,001	0,0098319	0,5	0,20576	0,41639
BDT1	(11, 3, 3)	1	0,010557	0,007	0,042299	0,32302
PSM	(7, 2, 3)	0,001	0,035481	0,01	0,10554	0,92672
UWV	(8, 2, 2)	0,001	0,016479	0,03	0,011414	0,024207

представленная в коллекции *COMPl<sub>e</sub>ib* [24], была модифицирована для решения задачи подавления внешних возмущений, при этом шумы измерений в модели отсутствуют. Стандартная дискретная модель объекта управления (1) была получена для значения шага дискретизации 0,01 с, имеет порядок  $n = 5$ , матрицы реализации в пространстве состояний дискретной модели приводятся ниже:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1,451 \cdot 10^{-5} & 0,01132 & 4,0487 \cdot 10^{-6} & -0,0099658 \\ 0 & 0,99946 & -0,0017115 & -4,8412 \cdot 10^{-6} & 0,00070241 \\ 0 & 2,4666 \cdot 10^{-6} & 1 & 0,0099572 & -5,0389 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0,00049745 & -4,2228 \cdot 10^{-7} & 0,99143 & -0,010052 \\ 0 & -0,0028957 & 2,4825 \cdot 10^{-6} & 0,010451 & 0,99311 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0,00035923 & -4,2717 \cdot 10^{-6} & 0,00016384 \\ 5,0987 \cdot 10^{-9} & 9,9519 \cdot 10^{-5} & 2,362 \cdot 10^{-7} \\ -2,4386 \cdot 10^{-10} & -0,0007548 & 2,7981 \cdot 10^{-6} \\ -7,3065 \cdot 10^{-8} & 2,45 \cdot 10^{-8} & 0,00055769 \\ 1,445 \cdot 10^{-5} & -1,4404 \cdot 10^{-7} & 0,00067493 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} -7,8517 \cdot 10^{-5} & 4,8395 \cdot 10^{-8} & 3,6293 \cdot 10^{-6} \\ -0,0011942 & 0,0099973 & -2,3052 \cdot 10^{-7} \\ 0,00022005 & 8,1873 \cdot 10^{-9} & -8,3 \cdot 10^{-5} \\ 0,043921 & 2,4666 \cdot 10^{-6} & -0,016575 \\ 0,015929 & -1,4501 \cdot 10^{-5} & -0,00081671 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0,70711 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,70711 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0,70711 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70711 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{yw} = 0, \quad D_{yu} = 0.$$

Матрица коэффициента усиления  $K_a$  анизотропной  $\gamma$ -оптимальной статической обратной связи по выходу, синтезированной для уровня средней анизотропией  $a = 0,9$ , приводится ниже вместе с матрицами коэффициентов усиления  $K_2$  и  $K_\infty$  статических  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторов по выходу:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 7,278 \cdot 10^{-5} & -0,9994 & -0,000203 \\ -0,0002887 & -0,002706 & -0,9966 \\ -0,9871 & -14,34 & 49,35 \end{bmatrix},$$

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,935 \cdot 10^{-6} & -1 & -1,241 \cdot 10^{-5} \\ -1,025 \cdot 10^{-5} & -0,0001273 & -0,9998 \\ -0,5795 & -12,46 & 54,56 \end{bmatrix},$$

$$K_{\infty} = \begin{bmatrix} -4,024 \cdot 10^{-7} & -1 & 1,904 \cdot 10^{-6} \\ -5,207 \cdot 10^{-6} & -6,032 \cdot 10^{-5} & -0,9999 \\ -0,6788 & -13,12 & 53,39 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования замкнутой системы в условиях внешних возмущений вместе с результатами решения задачи приводятся в таблице 5 и на рис. 12–15. При моделировании использовался тот же профиль ветра, что и в примере раздела 3.1.1.

Таблица 5. Модель АС1 (самолет) из коллекции COMPlib [24, 25]. Сравнение замкнутых систем

		Регулятор в цепи обратной связи		
		$K_2$	$K_a$	$K_{\infty}$
Результаты решения:				
$\min \gamma$		0,00045695	0,0034448	0,0036873
$\ T_{zw}\ _2$		$2,6532 \cdot 10^{-5}$	$1,2762 \cdot 10^{-6}$	$6,3218 \cdot 10^{-7}$
$\ T_{zw}\ _{0,9}$		0,00050863	$2,3466 \cdot 10^{-5}$	$1,1795 \cdot 10^{-5}$
$\ T_{zw}\ _{\infty}$		0,00075676	$3,5153 \cdot 10^{-5}$	$1,7708 \cdot 10^{-5}$
Время ЦП,	с	0,81121	3,042	0,546
Результаты моделирования:				
$\max  z_1 ,$	м/с	$9,539 \cdot 10^{-5}$	$4,941 \cdot 10^{-6}$	$1,368 \cdot 10^{-6}$
$\max  z_2 ,$	град	0,0003134	$1,437 \cdot 10^{-5}$	$9,539 \cdot 10^{-5}$
$\max  x_1 ,$	м	3,152	3,412	3,35
$\max  x_2 ,$	м/с	0,1647	0,1108	0,124
$\max  x_3 ,$	град	0,02948	0,0192	0,02172
$\max  x_4 ,$	град/с	0,008596	0,006704	0,006841
$\max  x_5 ,$	м/с	0,406	0,278	0,3097
$\max  u_1 ,$	$10^{-1}$ град	0,1648	0,1108	0,124
$\max  u_2 ,$	м/с <sup>2</sup>	0,0299	0,01922	0,02173
$\max  u_3 ,$	град	0,2117	0,1355	0,154

Из результатов решения задачи в таблице 5 можно заключить, что

- квадратный корень из наименьшего значения целевой функции удовлетворяет цепочке неравенств  $\gamma_2 < \gamma_a < \gamma_{\infty}$ ;
- $a$ -анизотропийная норма замкнутой системы с анизотропийным  $\gamma$ -оптимальным регулятором удовлетворяет условию  $\|T_{zw}\|_{0,7} < \gamma_a$ ; регулятор является субоптимальным;
- $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_{\infty}$ -нормы замкнутых систем с  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_{\infty}$ -регуляторами удовлетворяют  $\|T_{zw}\|_2 < \gamma_2$ ,  $\|T_{zw}\|_{\infty} <$

$\gamma_\infty$  для соответствующих пороговых значений; полученные  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторы также являются субоптимальными.

Анализ результатов моделирования, представленных в таблице 5 и на рис. 12–15, показывает, что

- анизотропийная  $\gamma$ -оптимальная статическая обратная связь по выходу приводит к наименьшим максимальным абсолютным отклонениям горизонтальной составляющей скорости  $x_2$ , угла тангажа  $x_3$ , угловой скорости тангажа  $x_4$  и вертикальной составляющей скорости  $x_5$ , при этом наименьшее максимальное абсолютное отклонение ошибки по высоте  $x_1$  достигается при использовании  $\mathcal{H}_2$ - $\gamma$ -оптимального статического регулятора по выходу;
- наибольшие максимальные абсолютные отклонения переменных управляемого выхода наблюдаются в замкнутой системе с  $\mathcal{H}_2$ - $\gamma$ -оптимальным статическим регулятором;
- в замкнутой системе с анизотропийным  $\gamma$ -оптимальным статическим регулятором наименьшие максимальные абсолютные амплитуды сигналов управления.

#### 4. Заключение

Разработан подход к решению задач синтеза анизотропийных субоптимальных и  $\gamma$ -оптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации. Синтез анизотропийных субоптимальных регуляторов является естественным продолжением оптимальной задачи, решенной в [35]. Вместо минимизации анизотропийной нормы замкнутой системы, субоптимальный регулятор гарантирует, что ее норма не превосходит заданного порогового значения. Общая процедура синтеза регулятора заданного порядка сводится к решению неравенства относительно детерминанта

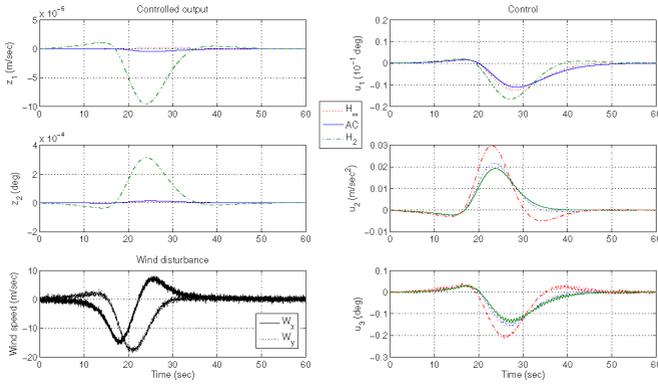


Рис. 12. Модель АС1 (самолет) [16, 24, 25]. Управляемый выход и профиль ветра (диаграммы слева), управление (диаграммы справа)

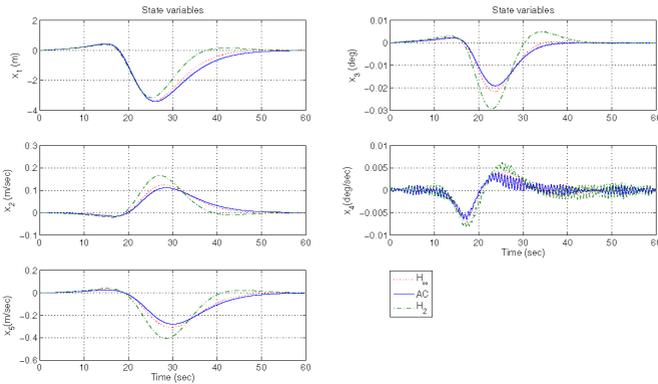


Рис. 13. Модель АС1 (самолет) [16, 24, 25]. Ошибка по высоте  $x_1$ , горизонтальная составляющая скорости  $x_2$ , вертикальная составляющая скорости  $x_3$  (диаграммы слева), угол тангажа  $x_4$ , угловая скорость тангажа  $x_5$  (диаграммы справа)

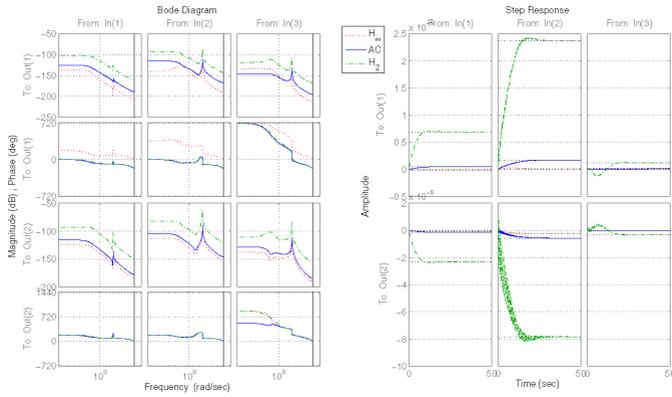


Рис. 14. Модель AC1 (самолет) [16, 24, 25]. Диаграмма Бode (диаграммы слева) и переходные характеристики (диаграммы справа)

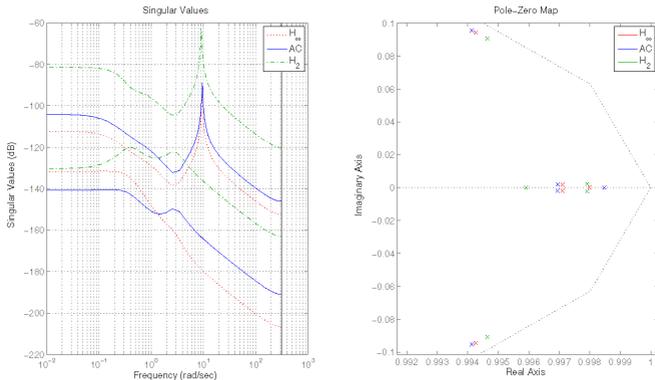


Рис. 15. Модель AC1 (самолет) [16, 24, 25]. Сингулярные числа (диаграмма слева), расположение нулей и полюсов (диаграмма справа)

положительно определенной матрицы и двух ЛМН относительно взаимно обратных матриц, задача оптимизации не является выпуклой [8]. Применением стандартных процедур овыпукления (линеаризующих замен переменных и введения дополнительных переменных) показано, что результирующие задачи оптимизации можно сделать выпуклыми для задач синтеза регуляторов в виде статической обратной связи по состоянию (в случае полной информации о векторе состояния), регуляторов полного порядка по выходу и регуляторов в виде статической обратной связи по выходу для некоторых классов объектов, определяемых их структурными свойствами. Для этих задач можно найти анизотропийные  $\gamma$ -оптимальные регуляторы из решения задач выпуклой оптимизации. В сравнении с решением задачи синтеза анизотропийного оптимального регулятора, полученным в [35], предлагаемый подход на основе выпуклой оптимизации является новым и не требует разработки специальных вычислительных алгоритмов.

### Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД П., КЛОЕДЕН П. *Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 92–111.
2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // ДАН. – 1995. – №3. – С. 583–585.
3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Стохастическая проблема  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации* // ДАН. – 1995. – Т. 343, №5. – С. 607–609.
4. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №3.
5. КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А. *Решение задачи стохастической  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации для линейной систе-*

- мы с неопределенностью // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 112–142.
6. ЛЕТОВ А.М. Аналитическое конструирование регуляторов I–IV // Автоматика и телемеханика. – I: 1960. – №4. – С. 436–441; II: №5. – С. 561–568; III: №6. – С. 661–665; IV: 1961. – №4. – С. 425–435.
  7. ЧАЙКОВСКИЙ М.М., КУРДЮКОВ А.П. Критерий строгой ограниченности анизотропийной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств // ДАН. – 2011. – Т. 441, №3. – С. 318–321.
  8. ЧАЙКОВСКИЙ М.М. Синтез анизотропийных субоптимальных регуляторов заданного порядка на основе полуопределенного программирования и алгоритма поиска взаимно обратных матриц // Управление большими системами. – 2012. – Вып.39. – С. 95–137.
  9. BEN-TAL A., NEMIROVSKII A. *Lectures on Modern Convex Optimization*. – Technion, Haifa, Israel, 2000.
  10. BERNSTEIN D.S., HADDAD W.M. *LQG control with an  $\mathcal{H}_\infty$  performance bound: a Riccati equation approach* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 293–305.
  11. DIAMOND P., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G. *Homotopy methods and anisotropy-based stochastic  $\mathcal{H}_\infty$  optimization of control systems* // Report 97-14 of The University of Queensland, Australia. – 1997. – P. 1–22.
  12. DIAMOND P., VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. of Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 28–42.
  13. DOYLE J.C., GLOVER K., KHARGONEKAR, P.P., FRANCIS, B.A. *State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 831–848.
  14. FARES B., APKARIAN P., NOLL D. *An augmented Lagrangian method for a class of LMI-constrained problems*

- in robust control theory* // Int. J. of Contr. – 2001. – Vol. 74. – P. 348–360.
15. GAHINET P. *Explicit controller formulas for LMI-based  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis* // Automatica. – 1996. – Vol. 32. – P. 1007–1014.
  16. HUNG Y.S., MACFARLANE A.G.J. *Multivariable feedback: A quasi-classical approach* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 40. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
  17. IWASAKI T., SKELTON R.E. *All controllers for the general  $\mathcal{H}_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas* // Automatica. – 1994. – Vol. 30. – P. 1307–1317.
  18. IVAN M. *A ring vortex downburst model for flight simulation* // J. Aircraft. – 1996. – Vol. 23. – P. 232–236.
  19. Kalman R. *Contributions to the theory of optimal control* // Bol. Soc. Mat. Mex. – 1960. – №5. – P. 102–199.
  20. KIMURA H. *Pole assignment by gain output feedback* // IEEE Trans. AC. – 1975. – Vol. AC-20. – P. 509–516.
  21. KUČERA V. *Stability of discrete linear feedback systems* // Proc. IFAC World Congress, Boston, Massachusetts. – 1975. – Paper No. 44–1.
  22. KURDYUKOV A.P., PAVLOV B.V., TIMIN V.N., VLADIMIROV I.G. *Longitudinal anisotropy-based flight control in a wind shear* // Proc. 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia. – 2004.
  23. LEE K.H., LEE J.H., KWON W.H. *Sufficient LMI conditions for  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback stabilization of linear discrete-time systems* // IEEE Trans. AC. – 2006. – Vol. 51. – P. 675–680.
  24. LEIBFRITZ F. *COMPl<sub>e</sub>ib: Constraint matrix-optimization problem library – a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems* // Tech. rep. of the University of Trier, Germany, 2004. – URL: <http://www.complib.de>.
  25. LEIBFRITZ F., LIPINSKI W. *Description of the benchmark*

- examples in COMPl<sub>e</sub>ib 1.0* // Tech. rep. of the University of Trier, Germany, 2003. – URL: <http://www.complib.de>.
26. LÖFBERG J. *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB* // Proc. of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan. – 2004. – URL: <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
  27. POZNYAK A.S. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers. Volumes 1,2: Deterministic Techniques, Stochastic Techniques*. – Elsevier, 2008, 2009.
  28. SCHERER C.W. *An efficient solution to multi-objective control problems with LMI objectives* // Syst. & Contr. Lett. – 2000. – Vol. 40. – P. 43–57.
  29. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. *Stochastic approach to  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization* // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Florida, USA. – 1994. – P. 2249–2250.
  30. SCHERER C.W., GAHINET P., CHILALI M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. AC. – 1997. – Vol. 42. – P. 896–911.
  31. STURM J.F. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones* // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11. – P. 625–653.
  32. TCHAIKOVSKY M.M., KURDYUKOV A.P., TIMIN V.N. *Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy. – 2011. – P. 2332–2337.
  33. TCHAIKOVSKY M.M., KURDYUKOV A.P., TIMIN V.N. *A convex formulation of strict anisotropic norm bounded real lemma* // Preprint. – 2011. – URL: <http://arxiv.org/abs/1108.5140>.
  34. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems* // Proc. 13th IFAC World Congress, San-Francisco, USA. – 1996. – P. 179–184.
  35. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic  $\mathcal{H}_\infty$ -*

- optimization problem* // Proc. 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA. – 1996. – P. 427–432.
36. YOULA D.C., JABR H.A., BONGIORNO J.J. *Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: the Multivariable case* // IEEE Trans. AC. – 1976. – Vol. 21. – P. 319–338.
37. ZHOU K., GLOVER K., BODENHEIMER B.A., DOYLE, J.C. *Mixed  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  performance objectives I: Robust performance analysis, II: Optimal control* // IEEE Trans. AC. – 1994. – Vol. 39. – P. 1564-1574, 1575–1587.

## **SYNTHESIS OF ANISOTROPIC CONTROLLERS VIA CONVEX OPTIMIZATION AND SEMIDEFINITE PROGRAMMING**

**Michael Tchaikovsky**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (mmtchaikovsky@hotmail.com).

*Abstract: This paper presents several statements and solutions of the anisotropic suboptimal and  $\gamma$ -optimal controller synthesis problems for suppression of impact of random disturbances with unknown distributions on a control system performance. The problems of anisotropic controllers synthesis in form of static state feedback, of full-order dynamic output feedback, as well as of static output feedback are considered. Application of standard linearizing changes of variables and known convexification procedures to the synthesis problems for the considered special cases of the plant and the controller structure allow the problem solution to be expressed via a system of convex constraints representable by a system of linear matrix inequalities. The anisotropic suboptimal controller stabilizes the closed-loop system and keeps its anisotropic norm below a prescribed threshold value. The developed optimization-based approach to anisotropic controllers synthesis is novel and more convenient for practical computations.*

**Keywords:** discrete linear time invariant systems, random disturbances, statistical uncertainty, norm, anisotropy, convex optimization, linear matrix inequalities.

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым*