

УДК 519.715 + 681.514  
ББК 22.1

## СИНТЕЗ АНИЗОТРОПИЙНОГО РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА ПРИ СТРУКТУРИРОВАННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

Юрченков А. В.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Получено решение задачи синтеза анизотропийного регулятора при структурированной неопределенности в модели объекта управления. Показано, что исходная задача сводится к задаче  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации для системы с одним дополнительным входом. Разработан численный алгоритм на основе метода гомотопий, который вычисляет матрицы анизотропийного внутренне стабилизирующего регулятора на базе  $\mathcal{H}_2$ -регулятора. Исследованы отличия полученного регулятора и регулятора, построенного для объекта с неструктурированной неопределенностью. Показано, что синтезированный регулятор обеспечивает лучшее качество замкнутой системы управления.*

Ключевые слова: анизотропийная теория робастного стохастического управления, структурированная неопределенность, метод гомотопий.

### **Введение**

Последние двадцать лет в теории управления развивается направление, названное авторами анизотропийной теорией робастного управления [11, 25, 28]. Особенностью этой теории является выбор таких способов описания внешнего возмущения и

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-07-00267.

<sup>2</sup> Александр Викторович Юрченков, аспирант (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-60 внутр. тел. 1645).

коэффициента усиления от входа к управляемому выходу системы, которые обобщают постановки известных задач  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -управления. При определении коэффициента усиления, который называется анизотропийной нормой, вводится характеристика отличия одной случайной последовательности от другой — эталонной. В задачах анизотропийной теории робастного стохастического управления используется свойство входной последовательности отличаться от «белого шума».

Мера отличия расширенного вектора случайной последовательности от гауссовского «белого шума» связана с хорошо известным в теории информации уклонением Кульбака–Лейблера или относительной энтропией.

Широко известные подходы  $\mathcal{H}_2$ - или  $\mathcal{H}_\infty$ -теорий управления предполагают выполнение ряда предположений о входных возмущениях. Для задачи  $\mathcal{H}_2$ -управления существенное требование состоит в том, что внешнее возмущение является гауссовским «белым шумом», в противном случае синтезированный закон управления будет крайне неэффективным. Основы этого подхода были заложены в работах Р.Е. Калмана и А.М. Летова в середине XX века. Позже задача  $\mathcal{H}_2$ -оптимизации рассматривалась авторами J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar и B.A. Francis в работе [12]. В свою очередь  $\mathcal{H}_\infty$ -регуляторы проявляют излишнюю консервативность, поскольку строятся для наихудшего случая входной последовательности из  $l_2$ . Иными словами, если входной сигнал близок по своим стохастическим характеристикам к «белому шуму», то затраты энергии на построение управления будут весьма значительными. Примеры задач  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации могут быть найдены в работах G. Zames [29], J. Doyle [13], B.A. Francis [19], K. Glover [12], D. Gu [19], N. Berman, U. Shaked [9, 17], C. Scherer [26, 27], T. Iwasaki, R.E. Skelton [21, 25], P. Gahinet [15, 16], P. Apkarian [7, 8] и др.

При рассмотрении задач робастного управления для систем с параметрической неопределенностью или отсутствием оценок вероятностных характеристик задающего сигнала, можно использовать методы синтеза оптимальных анизотропийных регу-

ляторов. Можно легко показать, что параметрическая неопределенность может быть сведена к структурированной, хотя обратное утверждение не всегда верно. Следовательно, все результаты, полученные для параметрической неопределенности, остаются в силе и для структурированной, как наиболее общей. То есть имеет смысл формулировать задачи робастного управления именно в терминах неопределенности, имеющей специальную структуру. Дискретная линейная математическая модель объекта, содержащего этот вид неопределенности, представлена ниже:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + B_0w_k + B_1u_k, \\y_k &= C_1x_k + D_{11}w_k, \\z_k &= C_2x_k + D_{22}u_k, \\w_k &= \Delta z_k,\end{aligned}$$

где  $\Delta$  принадлежит множеству

$$\Delta = \{ \text{block diag} (\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_s I_{k_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f) : \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_i \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i} \}.$$

При решении задачи обеспечения робастного качества для линейной дискретной системы вводится  $a$ -анизотропийная норма системы  $\|F\|_a$ , которая является частным случаем стохастической нормы. Это направление развивается в ряде работ А.В. Семенова, И.Г. Владимирова, А.П. Курдюкова [25, 28], М. Karny [22], I.R. Petersen, M.R. James, P. Diamond [11, 24]. Поскольку значение  $a$ -анизотропийной нормы принадлежит интервалу, левым концом которого является масштабированная  $\mathcal{H}_2$ -норма системы  $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2$ , а правым —  $\mathcal{H}_\infty$ -норма  $\|F\|_\infty$ , то при предельных значениях уровня средней анизотропии входного сигнала  $a$ , равным нулю или бесконечности, величина  $a$ -анизотропийной нормы  $\|F\|_a$  будет совпадать с одним из значений  $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2$  или  $\|F\|_\infty$  соответственно.

К известным результатам анизотропийной теории относятся задача стохастической  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации систем с параметрической неопределенностью, многокритериальные задачи оптимизации, построение анизотропийных субоптимальных регуляторов для дескрипторных систем, синтез субоптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации.

В работе [2] приведено решение стохастической задачи  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации для системы с параметрической неопределенностью. Авторами продемонстрировано, как можно изменить математическую модель системы путем введения дополнительного входа, что позволяет погрузить задачу в более общую, которая решается методами анизотропийной теории.

Обеспечение робастного качества для системы со структурированной неопределенностью с критерием в виде  $a$ -анизотропийной нормы передаточной функции от задающего возмущения к управляемому выходу имеет ряд преимуществ перед критерием качества, взятым в виде  $\mathcal{H}_2$ - или  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы. В данной работе формулируется и решается анизотропийная задача стохастической  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации для линейных дискретных систем со структурированной неопределенностью. Постановка заключается в том, что нужно найти такой регулятор  $K$ , который внутренне стабилизирует замкнутую систему и минимизирует максимальное значение  $a$ -анизотропийной нормы замкнутой системы, где  $a \geq 0$  — уровень средней анизотропии входного сигнала, а максимум берется по всем неопределенностям из заданного класса  $\Delta$ .

В первом разделе статьи приводится постановка задачи. Во втором разделе показано как свести исходную задачу со структурированной неопределенностью к более общей задаче, модель объекта управления которой не содержит неопределенность, хотя имеет один дополнительный вход. В третьем разделе продемонстрировано, что новая задача эквивалентна смешанной задаче  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации, а ее функционал качества является мажорирующим для функционала исходной задачи. В четвертом и пятом разделах строятся «наихудшие» последовательности вход-

ных воздействий для системы. В шестом разделе описывается построение оптимального регулятора в виде наблюдателя. Седьмой раздел содержит описание алгоритма построения регулятора. Заключительный, восьмой, раздел иллюстрирует преимущества синтезированного регулятора на численном примере.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему  $F$ , описываемую уравнениями

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_0q_k + B_1w_k + B_2u_k, \\ z_k &= C_1x_k + D_{12}u_k, \\ p_k &= C_2x_k + D_{22}u_k, \\ y_k &= C_3x_k + D_{33}w_k, \\ q_k &= \Delta p_k, \end{aligned}$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — состояние системы;  $z_k \in \mathbb{R}^{r_1}$  — управляемый выход;  $p_k \in \mathbb{R}^{m_0}$  — выход неопределенности;  $y_k \in \mathbb{R}^{r_2}$  — наблюдаемый выход;  $q_k \in \mathbb{R}^{m_0}$  — вход неопределенности;  $u_k \in \mathbb{R}^{m_2}$  — управление;  $w_k \in \mathbb{R}^{m_1}$  — возмущение. Матрицы системы (1) будем считать известными, за исключением матрицы оператора неопределенности  $\Delta$ , которая принадлежит множеству

$$(2) \quad \Delta = \left\{ \Delta = \text{block diag} (\Delta_1, \Delta_2) : \Delta_i \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}, \|\Delta_i\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Последнее равенство в системе (1) представляет собой связь между входом  $p$  и выходом  $q$  с точки зрения сохранения вход-выходных соотношений посредством матрицы оператора неопределенности  $\Delta$ .

Структурная схема рассматриваемого объекта представлена на рис. 1.

Задача анизотропной оптимизации состоит в следующем:  
**Задача 1.** Для системы вида (1) и верхней границы уровня средней анизотропии возмущения  $a \geq 0$  найти стабилизирующий регулятор  $K \in \mathcal{K}$ , который минимизирует максимальное значение  $a$ -анизотропной нормы системы  $F_l(F_u(M, \Delta), K)$  по всем допустимым значениям неопределенности  $\Delta \in \Delta$ , т.е. доставляет

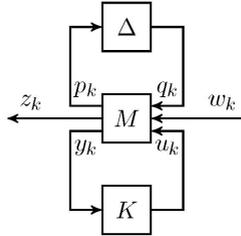


Рис. 1. Система с неопределенностью и регулятором в контуре обратной связи

минимум функционалу

$$(3) \quad J_0(K) = \sup_{\Delta \in \Delta} \|F_l(F_u(M, \Delta), K)\|_a.$$

Здесь стоит описать множество допустимых регуляторов  $\mathcal{K}$ . Регулятор  $K$  будем называть допустимым (из множества  $\mathcal{K}$ ), если он является стабилизирующим и причинным, т.е. управление на каждом шаге  $u_k$  зависит только от предыстории измерений  $\{y_j\}_{j < k}$  и не зависит от текущего измерения состояния  $y_k$ .

Первым шагом на пути решения задачи анизотропийной оптимизации для системы, содержащей структурированную неопределенность, будет погружение исходной задачи в более общую, модель объекта управления которой не содержит в себе неопределенность, но в которой присутствует дополнительный входной сигнал. Такой метод позволит свести задачу анизотропийной оптимизации для системы со структурированной неопределенностью к задаче анизотропийной оптимизации для полностью определенной системы.

В рамках рассматриваемой системы потребуем выполнение основных предположений:

$$(A) \quad \begin{aligned} D_{12}^\top C_1 &= 0, \\ D_{12}^\top D_{12} &= I; \end{aligned}$$

(B) номинальная система (при  $\Delta \equiv 0$ ) наблюдаема и управляема;

(C)  $r_1 < m_1$ ;

(D) матрица  $D_{33}$  в (1) имеет полный строчный ранг:

$$\text{rank}D_{33} = r_2 \leq m_1;$$

(E) матрица  $D_{12}$  в (1) имеет полный столбцовый ранг:

$$\text{rank}D_{12} = m_2 \leq r_1;$$

Предположение (A) не ограничивает общности, так как если оно не выполнено, то к системе следует применить преобразование, указанное в [18], которое приводит ее к указанному виду. Предположения (B) являются стандартными для задач управления. Предположение (C) гарантирует, что для любого регулятора  $K$  система  $F_l(F_u(M, \Delta), K)$  удовлетворяет неравенству  $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F_l(*)\|_2 < \|F_l(*)\|_\infty$ . Предположение (D) гарантирует невырожденность уравнения Риккати для оптимального оценщика из раздела 7.1, а (E) — невырожденность уравнения Риккати для оптимального  $\mathcal{H}_2$ -регулятора, полученного в 8.2.

## 2. Погружение в более общую задачу стохастической $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации

На основе модели (1) введем вспомогательную систему:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k + B_3 \eta_k, \\ \tilde{z}_k &= \begin{bmatrix} C_1 x_k + D_{12} u_k \\ \gamma_1 C_{12} x_k \\ \gamma_2 C_{22} x_k \\ \gamma_1 D_{1,22} u_k \\ \gamma_2 D_{2,22} u_k \end{bmatrix}, \\ y_k &= C_3 x_k + D_{33} w_k, \end{aligned}$$

где  $\gamma_i, i = \overline{1, 2}$  — некоторые положительные параметры, матрица неопределенности имеет диагональный вид  $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$ ,  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$ ,  $s_1 + s_2 = m_0$ , а матрица  $B_3$  имеет блочный вид  $B_3 = [B_{01}, B_{02}, B_{01}, B_{02}]^\top$ , где отдельные блоки получены из матрицы  $B_0$  следующим образом  $B_0 = [B_{01}, B_{02}]$ ,  $B_{0i} \in \mathbb{R}^{n \times s_i}$ , новый векторный вход системы будет иметь размерность  $\mathbb{R}^{2m_0}$ , остальные матрицы совпадают с матрицами в (1), матрицы  $C_2$

и  $D_{22}$  также разбивается на блоки  $[C_{12}, C_{22}]^\top, C_{i2} \in \mathbb{R}^{s_i \times n}$  и  $D_{22} = [D_{1,22}, D_{2,22}]^\top, D_{i,22} \in \mathbb{R}^{s_i \times m_2}$ . Единственная априорная информация о входном воздействии  $\eta_k$  заключается в том, что оно берется из множества сигналов в ограниченной мощностной нормой, т.е.  $\|\eta_k\|_{\mathcal{P}} < \infty$ . Тогда схема замкнутой системы примет вид, изображенный на рис. 2.

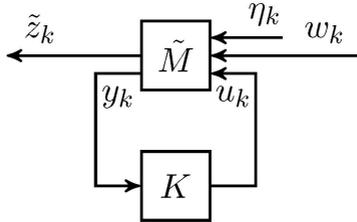


Рис. 2. Замкнутая система с дополнительным входом

Исходная система (1) будет являться вложенной по отношению к системе (4), если принять  $\eta_k = (\Delta_1 C_{12} x_k, \Delta_2 C_{22} x_k, \Delta_1 D_{1,22} u_k, \Delta_2 D_{2,22} u_k)^\top$ . Теперь можно сформулировать задачу стохастической  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации для системы (4):

**Задача 2.** Для системы вида (4) и верхней границы уровня анизотропии входного сигнала  $a \geq 0$  найти допустимый регулятор  $K \in \mathcal{K}$ , который минимизирует максимальное значение  $a$ -анизотропийной нормы передаточной функции системы  $F_l(\tilde{M}, K)$  для любых входных воздействий, т.е. доставляет минимум функционалу

$$(5) \quad J(K, \gamma) = \sup_{\eta_k \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}} \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \left( \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\Gamma \eta\|_{\mathcal{P}}^2 \right).$$

### 3. Связь между задачей 2 и смешанной задачей оптимизации

Следующая теорема поясняет, почему решение задачи 2 эквивалентно решению смешанной задачи оптимизации.

**Теорема 1.** Решение задачи 2 является также решением

следующей смешанной задачи оптимизации: для фиксированных параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  найти допустимый регулятор  $K \in \mathcal{K}$ , такой что

$$(6) \quad \|T_{\tilde{z}w}\|_a \rightarrow \min_K,$$

$$(7) \quad \|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, 4}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим анизотропийную норму передаточной функции системы на рис. 2 от входа  $w$  к выходу  $\tilde{z}$ , т.е.  $\|T_{\tilde{z}w}\|_a$ . По определению,

$$(8) \quad \|T_{\tilde{z}w}\|_a \stackrel{def}{=} \sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} = \sup_{W \in \mathcal{WB}_a} \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}.$$

Заметим, что указанная норма (8) будет принимать минимальное значение при том же значении аргумента  $W$ , что и функционал (5) при  $\eta \equiv 0$

$$J(K, \gamma) = \sup_{W \in \mathcal{WB}_a} \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 = \|T_{\tilde{z}w}\|_a^2.$$

Первое утверждение (6) теоремы доказано. Докажем неравенства (7). Поскольку требуется найти максимальное значение  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы изображенной на рис. 2 от входа  $\eta_1$  к выходу  $\tilde{z}$ , будем полагать, что  $W \equiv 0$  и  $\eta_i \equiv 0, i = \overline{2, 4}$ . Функционал (5) примет вид

$$J(K, \gamma) = \sup_{\eta_1 \in l_{\mathcal{P}}^{s_1}} \left( \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \gamma_1^2 \|\eta_1\|_{\mathcal{P}}^2 \right).$$

Сперва покажем, что  $\mathcal{H}_\infty$ -норма является подчиненной по отношению к мощностной полунорме  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ .

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \|T_{\tilde{z}\eta_1}\eta_1\|_{\mathcal{P}} &= \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} \mathbf{E} |T_{\tilde{z}\eta_k}\eta_{1k}|^2 \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} \mathbf{E} |T_{\max}\eta_{1k}|^2 \right)^{1/2} = \\
 &= |T_{\max}| \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} \mathbf{E} |\eta_{1k}|^2 \right)^{1/2} = \|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty} \|\eta_1\|_{\mathcal{P}}.
 \end{aligned}$$

Фактически, мы доказали неравенство:

$$(10) \quad \|T_{\tilde{z}\eta_1}\eta_1\|_{\mathcal{P}} \leq \|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty} \|\eta_1\|_{\mathcal{P}},$$

где равенство достигается для некоторого  $\eta_1^* = \arg \max \in l_{\mathcal{P}}^{s_1}$ . Поскольку поставленная задача разрешима, то функционал  $\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \gamma_1^2 \|\eta\|_{\mathcal{P}}^2$  достигает максимального значения, а значит, может быть ограничен сверху, в том числе и для  $\eta_1^*$ . Не ограничивая общности, можно заявить, что точная верхняя граница (5) существует и равна  $\alpha$ . Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}} - \gamma_1^2 \|\eta_1\|_{\mathcal{P}}^2 = \|T_{\tilde{z}\eta_1}\eta_1\|_{\mathcal{P}}^2 - \gamma_1^2 \|\eta_1\|_{\mathcal{P}}^2 \leq \alpha.$$

Принимая во внимание доказанное утверждение о подчиненной мощностной полунорме (10), получаем

$$\|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty}^2 \|\eta_1^*\|_{\mathcal{P}}^2 - \gamma_1^2 \|\eta_1^*\|_{\mathcal{P}}^2 \leq \alpha.$$

Разделив обе части последнего неравенства на положительную величину  $\|\eta_1^*\|_{\mathcal{P}}$  и выражая  $\mathcal{H}_\infty$ -норму передаточной функции от входа  $\eta_1$  к выходу  $\tilde{z}$ , получаем

$$(11) \quad \|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty} \leq \gamma_1 \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\gamma_1^2 \|\eta_1^*\|_{\mathcal{P}}^2}}.$$

Неравенство (11) должно выполняться для любых значений  $\alpha > 0$ . Минимальное значение правой части (11) будет равно  $\gamma_1$ , что означает условие  $\|T_{\tilde{z}\eta_1}\|_{\infty} \leq \gamma_1$ . Аналогично доказывается, что

$\|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty \leq \gamma_i$ ,  $i = \overline{2,4}$ . Согласно (4), при постановке задачи используются только два положительных параметра  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , т.е. для задачи 2 условие (7) применимо при  $\gamma_3 = \gamma_1$  и  $\gamma_4 = \gamma_2$ .

**Теорема 2.** Для любых входных воздействий  $W \in \mathcal{BW}_a$  и  $\eta_k \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}^{2m_0}$  выполняется неравенство

$$(12) \quad J_0(K) \leq J(K, \gamma).$$

**Доказательство.** Для доказательства утверждения теоремы нам понадобится одно равенство

$$(13) \quad \|\tilde{z}_k\|_{\mathcal{P}}^2 = \|z_k\|_{\mathcal{P}}^2 + \gamma_1^2 \|C_{12}x_k\|_{\mathcal{P}}^2 + \gamma_2^2 \|C_{22}x_k\|_{\mathcal{P}}^2 + \gamma_1^2 \|D_{1,22}u_k\|_{\mathcal{P}}^2 + \gamma_2^2 \|D_{2,22}u_k\|_{\mathcal{P}}^2.$$

Функционал

$$(14) \quad \mathcal{L}(K, W, \eta) = \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\Gamma\eta\|_{\mathcal{P}}^2$$

является функцией Лагранжа для задачи условной стохастической оптимизации с критерием качества

$$(15) \quad \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2,$$

при ограничениях

$$(16) \quad \eta \in \mathcal{D}_\eta = \left\{ \eta \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}^{2m_0} : \|\eta_i\|_{\mathcal{P}} \leq \|C_{i2}X\|_{\mathcal{P}}, \right. \\ \left. \|\eta_{i+2}\|_{\mathcal{P}} \leq \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}, i = \overline{1,2} \right\}.$$

Преобразуем функционал (14), используя (13):

$$\mathcal{L}(K, W, \eta) = \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 + \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \left( \|C_{i2}X\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\eta_i\|_{\mathcal{P}}^2 + \right. \\ \left. + \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\eta_{i+2}\|_{\mathcal{P}}^2 \right).$$

Оценка сверху для функции Лагранжа (14) имеет вид:

$$(17) \quad \sup_{W \in \mathcal{BW}_a} \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \mathcal{L}(K, W, \eta) = \sup_{W \in \mathcal{BW}_a} \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \left\{ \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \left( \|C_{i2}X\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\eta_i\|_{\mathcal{P}}^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \gamma_i^2 \left( \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\eta_{i+2}\|_{\mathcal{P}}^2 \right) \right\}.$$

Заметим, что для наилучшего входного воздействия  $\tilde{W}$  и соответствующего ему сигнала  $\eta$  последние два слагаемых в правой части (17) стремятся к нулю, т.е.

$$\sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \mathcal{L}(K, W, \eta) \geq \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}_\eta} \mathcal{L}(K, W, \eta),$$

где

$$(18) \quad \tilde{\mathcal{D}}_\eta = \left\{ \eta \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0} : \|\eta_i\|_{\mathcal{P}} \leq \|C_{i2}X(\eta, \tilde{W})\|_{\mathcal{P}}, \right. \\ \left. \|\eta_{i+2}\|_{\mathcal{P}} \leq \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}, i = \overline{1, 2} \right\}.$$

Очевидно, что множество  $\tilde{\mathcal{D}}_\eta$  (18) является вложенным в множество  $\mathcal{D}_\eta$  (16). При рассмотрении системы (4) мы полагали, что новое входное воздействие  $\eta$  связано с исходной неопределенностью  $\Delta$  специальным образом, а именно  $\eta_k = (\Delta C_{12}x_k, \Delta C_{22}x_k, \Delta D_{1,22}u_k, \Delta D_{2,22}u_k)^T$ . Данное предположение позволяет привести неравенства, которые завершают доказательство теоремы:

$$(19) \quad J(K, \gamma) \geq \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\eta \in \mathcal{D}_\eta} \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 \geq \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}_\eta} \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 = \\ = \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \sup_{\Delta \in \mathbf{\Delta}} \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 = J_0(K).$$

Так как постоянные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются множителями Лагранжа в задаче условной оптимизации и не равны нулю, то следующие условия можно считать достаточными условиями экстремума: если найдется такой параметр  $\gamma_0$ , что

$$(20) \quad \|\tilde{\eta}_i\|_{\mathcal{P}} = \|C_{i2}X\|_{\mathcal{P}}, \|\tilde{\eta}_{i+2}\|_{\mathcal{P}} = \|D_{i,22}U\|_{\mathcal{P}}, i = \overline{1, 2},$$

где  $\tilde{\eta} = \text{Arg max}_{\eta} J(K, \gamma)$ , то  $\inf_{\gamma} J(K, \gamma) = J(K, \gamma_0)$  для любого  $K \in \mathcal{K}$ , а пара  $((\tilde{w}(K), \tilde{\eta}(K)), \gamma_0)$  является седловой точкой функции Лагранжа  $\mathcal{L}(K, w, \eta, \gamma_0)$ . Теоремы 1 и 2 означают, что исходную задачу с критерием качества (3) можно свести к задаче 2. Критерий качества (5) будет мажорирующим критерием для (3), причем разность  $J(K, \gamma) - J(K)$  будет минимальна, если найдется  $\gamma_0$ , удовлетворяющее условиям теоремы 2.

Рассматривая систему (4) с критерием качества (5), будем говорить о смешанной задаче  $\mathcal{A}\mathcal{B}_a/\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации, поскольку

на вход поступают два сигнала:  $w_k$  имеет заданный уровень средней анизотропии, а  $\eta_k$  принадлежит множеству ограниченных по  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ -норме сигналов. Решением ее будет тройка  $(K^*, G_0^*, G_1^*)$ , которая является седловой точкой функционала качества (5), причем

$$(21) \quad \mathcal{L}(K^*, G_0, G_1) \leq \mathcal{L}(K^*, G_0^*, G_1^*) \leq \mathcal{L}(K, G_0^*, G_1^*),$$

где  $K^*$  — оптимальный регулятор,  $G_0^*$  — наихудший формирующий фильтр для входа  $w_k$ , а  $G_1^*$  — наихудший формирующий фильтр для входа  $\eta_k$ . Другими словами, строгое математическое описание множеств, содержащих вышеперечисленные элементы  $K^*$ ,  $G_0^*$  и  $G_1^*$  выглядит так

$$(22) \quad \mathcal{K}^*(G_0, G_1) = \text{Arg} \min_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{L} \subseteq \mathcal{K},$$

$$(23) \quad \mathcal{G}_0^*(K, G_1) = \text{Arg} \max_{G \in \mathcal{G}_a, \|G_0\|_2=1} \mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}_a,$$

$$(24) \quad \mathcal{G}_1^*(K, G_0) = \text{Arg} \max_{G_1 \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}} \mathcal{L} \subseteq \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}.$$

Элементы множества (22) является решением смешанной задачи  $AB_a/\mathcal{H}_{\infty}$ -оптимизации, при условии, что вход  $W$  замкнутой системы генерируется известным формирующим фильтром  $G_0 \in \mathcal{G}_a$ , т.е.  $W = G_0 * V$ . Вход  $\eta$  генерируется с помощью известного формирующего фильтра  $G_1 \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}$ ,  $\eta = G_1 * W$ . Множество (23) образовано формирующими фильтрами, генерирующими «наихудшие» входные сигналы с ограниченным уровнем средней анизотропии при фиксированном регуляторе  $K \in \mathcal{K}$  и фильтре  $G_1 \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}$ . Последнее множество (24) представляет собой множество фильтров  $G_1 \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(2m_0) \times m_1}$ , генерирующих входные последовательности при фиксированном регуляторе  $K \in \mathcal{K}$  и фильтре  $G_0 \in \mathcal{G}_a$ .

#### 4. «Наихудший» вход с ограниченной энергией для системы, замкнутой произвольным регулятором

Решение задачи 2 начнем с поиска наихудшего входного воздействия  $\eta$  с ограниченной энергией. Поскольку входная после-

довательность  $\eta$  полностью определяется формирующим фильтром  $G_1$ , то будем искать такую реализацию фильтра  $G_1$  в пространстве состояний, которая доставляет максимум функционалу (5) при фиксированном фильтре  $G_0$  и регуляторе  $K$ . Регулятор  $K$  будем искать в виде

$$(25) \quad \begin{aligned} \xi_{k+1} &= \hat{A}\xi_k + \hat{B}y_k, \\ u_k &= \hat{C}\xi_k, \end{aligned}$$

где  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  — неизвестные матрицы. Наихудший вход  $\eta$  формируется следующим образом:

$$(26) \quad \tilde{\eta}_k = L\zeta_k + \Sigma^{1/2}w_k = L_1x_k + L_2\xi_k + \Sigma^{1/2}w_k,$$

где матрицы  $L$  и  $\Sigma^{1/2}$  подлежат определению. Замкнутая система  $F_l(\tilde{M}, K)$  представлена на рис. 2, ее реализация в пространстве состояний представлена ниже:

$$(27) \quad F_l(\tilde{M}, K) = \left[ \begin{array}{cc|cc} A & B_2\hat{C} & B_1 & B_3 \\ \hat{B}C_3 & \hat{A} & \hat{B}D_{33} & 0 \\ \hline C_1 & D_{12}\hat{C} & 0 & 0 \\ \gamma_1 C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 D_{1,22}\hat{C} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 D_{2,22}\hat{C} & 0 & 0 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{c|cc} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{F} \\ \hline \tilde{C} & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Обозначим вектор состояния замкнутой системы  $F_l(\tilde{M}, K)$  как объединенный вектор состояния объекта управления  $x_k$  и регулятора  $\xi_k$ , т.е.  $\zeta_k \equiv (x_k, \xi_k)^\top$  и введем следующую матрицу:

$$(28) \quad Q \equiv \begin{bmatrix} C_1^\top C_1 + \gamma_1^2 C_{12}^\top C_{12} + \gamma_2^2 C_{22}^\top C_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \hat{C}^\top (D_{12}^\top D_{12} + \gamma_1^2 D_{1,22}^\top D_{1,22} + \gamma_2^2 D_{2,22}^\top D_{2,22}) \hat{C} & \dots \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим дискретное алгебраическое уравнение Риккати относительно матрицы  $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ :

$$(29) \quad \tilde{Y} = \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} + L^\top \Sigma^{-1} L + Q,$$

$$(30) \quad L = [L_1, L_2] = \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{A},$$

$$(31) \quad \Sigma = (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1},$$

где матрица  $L \in \mathbb{R}^{l \times 2n}$  разделена на два блока  $L_1$  и  $L_2$ . Решение  $\tilde{Y}$  уравнения (29)–(31) называется стабилизирующим, если матрица  $\tilde{Y}$  симметрическая, матрица  $\Sigma$  положительно определена и матрица  $\tilde{A} + \tilde{F}L$  асимптотически устойчива. Заметим, что для любых фиксированных  $\gamma_i > \|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty$ ,  $i = \overline{1,4}$ , уравнение (29)–(31) имеет единственное решение.

**Теорема 3.** Пусть  $\|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty < \gamma_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Тогда

$$(32) \quad \sup_{\eta \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}} \left\{ \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\Gamma\eta\|_{\mathcal{P}}^2 \right\} = \\ = \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{ww}(0) + \right. \\ \left. + 2(\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\zeta}(0) \right\},$$

где  $\tilde{Y}$ ,  $L$  и  $\Sigma$  удовлетворяют уравнению (29)–(31), а наилучший вход формируется согласно (26).

**Доказательство.** Сначала преобразуем функционал (5) согласно введенному обозначению (28):

$$(33) \quad J(K, \gamma) = \sup_{\eta_k \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}} \sup_{W \in \mathcal{B}W_a} \mathcal{L},$$

где  $\mathcal{L}$  представим в виде

$$\mathcal{L} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \mathbf{E} \sum_{k=-N}^{k=N} (\zeta_k^\top Q \zeta_k - \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k).$$

Распишем разность  $\zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k$  следующим образом:

$$\zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k = \\ = (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k + \tilde{F} \eta_k)^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k + \tilde{F} \eta_k) - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k = \\ = -\zeta_k^\top Q \zeta_k + \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k + \zeta_k^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} - \tilde{Y} + Q) \zeta_k + w_k^\top \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k + \\ + \eta_k^\top (\tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F} - \Gamma^2) \eta_k + 2(\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k)^\top \tilde{Y} \tilde{F} \eta_k + \\ + 2w_k^\top \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k + 2\zeta_k^\top \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k,$$

теперь сгруппируем слагаемые так, чтобы получить в качестве аддитивной добавки мощностную полунорму:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k &= -\zeta_k^\top Q \zeta_k + \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k + \zeta^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} - \tilde{Y} + Q) \zeta_k + \\
 &\quad + w_k^\top \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k + \eta_k^\top (\tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F} - \Gamma^2) \eta_k \\
 &\quad + 2(\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k)^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F} - \Gamma^2)^{-1/2} (\tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F} - \Gamma^2)^{1/2} \eta_k + \\
 &\quad + ((\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F}) \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k))^\top (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1/2} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) - \\
 &\quad - ((\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F}) \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k))^\top (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1/2} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) + \\
 &\quad + 2\zeta_k^\top \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k = -\zeta_k^\top Q \zeta_k + \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k + \\
 &\quad + \zeta^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} - \tilde{Y} + Q) \zeta_k + w_k^\top \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k - \\
 &\quad - \left\| (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{1/2} \eta_k - (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1/2} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) \right\|_{\mathcal{P}}^2 + \\
 &\quad + (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k)^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) + 2\zeta_k^\top \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} w_k,
 \end{aligned}$$

упрощая последнее выражение, получим:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k &= -\zeta_k^\top Q \zeta_k + \\
 &\quad + \eta_k^\top \Gamma^2 \eta_k + \zeta^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{A} - \tilde{Y} + Q + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{A}) \zeta_k + \\
 &\quad + w_k^\top (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) + \\
 &\quad + 2\zeta_k^\top (\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) w_k - \\
 &\quad - \left\| (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{1/2} \eta_k - (\Gamma^2 - \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{F})^{-1/2} \tilde{F}^\top \tilde{Y} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) \right\|_{\mathcal{P}}^2.
 \end{aligned}$$

Суммируя от  $-N$  до  $N$ , беря среднее, учитывая (29), (31) и переходя к пределу при  $N \rightarrow +\infty$ , имеем следующее:

$$\begin{aligned}
 (34) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \mathbf{E} \sum_{k=-N}^{k=N} (\zeta_{k+1}^\top \tilde{Y} \zeta_{k+1} - \zeta_k^\top \tilde{Y} \zeta_k) &= \\
 &= \mathcal{L} - \left\| \Sigma^{-1/2} \eta_k - \Sigma^{1/2} (\tilde{A} \zeta_k + \tilde{B} w_k) \right\|_{\mathcal{P}} + \\
 &\quad + \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\tilde{w}}(0) + \right. \\
 &\quad \left. + 2(\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\zeta}(0) \right\}.
 \end{aligned}$$

Левая часть последнего неравенства равна нулю вследствие предположений о внешних входных сигналах, поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\|\Sigma^{-1/2}\eta_k - \Sigma^{1/2}(\tilde{A}\zeta_k + \tilde{B}w_k)\|_{\mathcal{P}} + \\ & + \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{ww}(0) + \right. \\ & \left. + 2(\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\zeta}(0) \right\}. \end{aligned}$$

Последнее равенство завершает доказательство теоремы после обнуления первого слагаемого в силу (26).

Наихудший вход  $\tilde{\eta}$  может быть сгенерирован из входного сигнала  $W$  посредством формирующего фильтра  $G_1 \in \mathcal{RH}_\infty^{(2m_0) \times m_1}$ , внутреннее состояние которого является копией состояния  $\zeta_k$  системы  $F_l(\tilde{M}, K)$ . Реализация такого фильтра имеет вид

$$(35) \quad \tilde{G}_1 = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{A} + \tilde{F}L & \tilde{B} + \tilde{F}\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array} \right].$$

### **5. «Наихудший» вход с ограниченным спектром для системы, замкнутой допустимым регулятором при «наихудшем» дополнительном входе с ограниченной энергией**

Рассмотрим систему (4), на вход которой подается (26). На языке передаточных функций вход–выходное соотношение имеет вид  $Z = F_w W$ , где  $F_w$  имеет следующую структуру:

$$(36) \quad F_w = F_l(\tilde{M}, K) \left[ \begin{array}{c} I \\ \tilde{G}_1 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & 0 \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} A + B_3 L_1 & B_2 \hat{C} + B_3 L_2 & B_1 + B_3 \Sigma^{1/2} \\ \hline \hat{B} C_3 & \hat{A} & \hat{B} D_{33} \\ \hline C_1 & D_{12} \hat{C} & 0 \\ \gamma_1 C_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_2 C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 D_{1,22} \hat{C} & 0 \\ 0 & \gamma_2 D_{2,22} \hat{C} & 0 \end{array} \right],$$

где матрицы  $L = [L_1, L_2]$  и  $\Sigma^{1/2}$  определяются из (29)–(31). Структурная схема системы представлена на рис. 3.

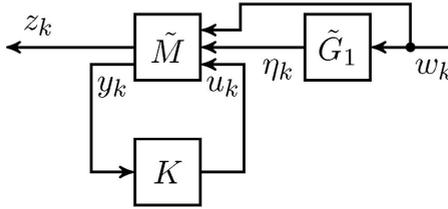


Рис. 3. Замкнутая система с дополнительным входом

На данном этапе необходимо обеспечить на вход системы наилучшую входную последовательность  $\tilde{W} \in \mathcal{W}_a$ , доставляющую максимум функционалу  $\|F_w\|_2^2$ . Под поиском наилучшей входной последовательности  $\tilde{W}$  подразумевается синтез фильтра  $\tilde{G}_0$  из (23), который сводится к следующей задаче оптимизации:

$$(37) \quad \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_a} \|F_w G_0\|_2^2 = \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_a} \left\| F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} G_0 \right\|_2^2.$$

Задача (37) может быть решена с помощью анизотропийной теории.

Частотное описание наилучшего фильтра  $\tilde{G}_0$  можно получить согласно утверждению.

**Теорема 4.** Пусть система  $F_w \in \mathcal{RH}^{(r_1+2m_0) \times m_1}$  удовлетворяет условию  $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F_w\|_2 < \|F_w\|_\infty$ . Если спектральная плотность фильтра  $G_0 \in \mathcal{RH}^{m_1 \times m_1}$  имеет вид

$$(38) \quad \hat{G}_0(\omega) \hat{G}_0^*(\omega) = \left( I_{m_1} - q \hat{F}_w^* \hat{F}_w \right)^{-1}, \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

для  $q = \bar{A}^{-1}(G_0)$ , то  $G_0$  принадлежит множеству наилучших формирующих фильтров (23).

Чтобы описать наилучший формирующий фильтр  $\tilde{G}_0$  в пространстве состояний, будем искать входной сигнал  $\tilde{w}_k$  в виде

$$(39) \quad \tilde{w}_k = L_w \zeta_k + \Sigma_w^{1/2} v_k,$$

где  $L_w \in \mathbb{R}^{m_1 \times 2n}$  такая, что  $A_w + B_w L_w$  асимптотически устойчива, а  $\Sigma_w \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$  — положительно определенная симметрическая матрица. Соответствующий формирующий фильтр  $G_0$  со

входом  $V \in \mathcal{W}_0$  и выходом  $W \in \mathcal{W}_a$  имеет следующую реализацию в пространстве состояний:

$$(40) \quad \tilde{G}_0 = \left[ \begin{array}{c|c} A_w + B_w L_w & B_w \Sigma_w^{1/2} \\ \hline L_w & \Sigma_w^{1/2} \end{array} \right].$$

Рассмотрим следующее уравнение Риккати относительно матрицы  $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ :

$$(41) \quad R = A_w^\top R A_w + q C_w^\top C_w + L_w^\top \Sigma_w^{-1} L_w,$$

$$(42) \quad L_w = \Sigma_w (B_w^\top R A_w + q D_w^\top C_w),$$

$$(43) \quad \Sigma_w = (I_{m_1} - B_w^\top R B_w)^{-1}.$$

Решение уравнения (41)–(43) называется стабилизирующим, если матрица  $R$  симметрическая, матрица  $\Sigma_w$  положительно определена, а матрица  $A_w + B_w L_w$  асимптотически устойчива. Заметим, что для любого  $q \in [0, \|F_w\|_\infty^{-2})$  уравнение Риккати имеет единственное стабилизирующее решение, которое положительно полуопределено. Следующая теорема дает явные выражения для матриц  $L_w$  и  $\Sigma_w$ , т.е. реализацию фильтра (40).

**Теорема 5.** Пусть система (36) асимптотически устойчива,  $q \in [0, \|F_w\|_\infty^{-2})$  и матрицы  $L_w$  и  $\Sigma_w$  соответствуют стабилизирующему решению  $R$  уравнения Риккати (41)–(43). Тогда

- 1) формирующий фильтр (40) удовлетворяет (38);
- 2)  $a$ -анизотропийная норма системы  $F_w$  задается выражением

$$\|F_w\|_a = \frac{1}{q} \left( 1 - \frac{m_1}{\text{Trace}(L_w P L_w^\top + \Sigma_w)} \right),$$

где  $P$  – это решение уравнения Ляпунова

$$(44) \quad P = (A_w + B_w L_w) P (A_w + B_w L_w)^\top + B_w \Sigma_w B_w^\top$$

и параметр  $q \in [0, \|F_w\|_\infty^{-2})$  удовлетворяет уравнению

$$(45) \quad a = -\frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{m_1 \Sigma_w}{\text{Trace}(L_w P L_w^\top + \Sigma_w)} \right).$$

Из теоремы 5 следует, что

$$J(K, \gamma) = \frac{1}{q} \left( 1 - \frac{m_1}{\text{Trace}(L_w P L_w^\top + \Sigma_w)} \right)^{1/2}.$$

Представление входного сигнала  $\tilde{w}_k$  в виде (39) позволяет преобразовать выражение (32) для функционала  $J(K, \gamma)$ , явно выражая ковариации  $R_{ww}(0)$  и  $R_{w\zeta}(0)$ :

$$\begin{aligned} R_{ww}(0) &= L_w P L_w^\top + \Sigma_w, \\ R_{w\zeta}(0) &= L_w P, \end{aligned}$$

где  $P$  — это решение уравнения Ляпунова (44).

**Лемма 1.** Для заданной системы (4) с входными сигналами  $\eta_k$  и  $w_k$ , формирующимися согласно (26) и (39), значение критерия качества (5) будет равно

$$(46) \quad J(K, \gamma) = \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \tilde{\Sigma} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) (L_w P L_w^\top + \Sigma_w) + 2(\tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{F} \tilde{\Sigma} \tilde{F}^\top \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^\top \tilde{Y} \tilde{B}) L_w P \right\},$$

где матрицы входящие в правую часть вычисляются согласно выражению (27), решениям уравнений Риккати (29)–(31) и (41)–(43).

**Доказательство.** Лемма может быть прямым следствием теоремы 3, если справедливы следующие равенства  $R_{ww}(0) = L_w P L_w^\top + \Sigma_w$  и  $R_{w\zeta}(0) = L_w P$ . Докажем сначала первое:

$$\begin{aligned} R_{ww}(0) &= \mathbf{E} \left[ w_0 w_0^\top \right] = \mathbf{E} \left[ \left( L_w \zeta_0 + \Sigma_w^{1/2} v_0 \right) \left( L_w \zeta_0 + \Sigma_w^{1/2} v_0 \right)^\top \right] = \\ &= L_w \mathbf{E} \left[ \zeta_0 \zeta_0^\top \right] L_w^\top + \Sigma_w, \end{aligned}$$

здесь последний знак равенства обусловлен независимостью векторов  $\zeta_0$  и  $v_0$ . Аналогично доказывается и второе равенство:

$$R_{w\zeta}(0) = \mathbf{E} \left[ w_0 \zeta_0^\top \right] = \mathbf{E} \left[ \left( L_w \zeta_0 + \Sigma_w^{1/2} v_0 \right) \zeta_0^\top \right] = L_w \mathbf{E} \left[ \zeta_0 \zeta_0^\top \right].$$

Поскольку  $\mathbf{E} [\zeta_0 \zeta_0^\top]$  — это решение уравнения Ляпунова вида (44), критерий качества (5) может вычисляться согласно (46). После синтеза обоих формирующих фильтров  $G_0$  и  $G_1$  замкнутая система имеет вид, представленный рис. 4.

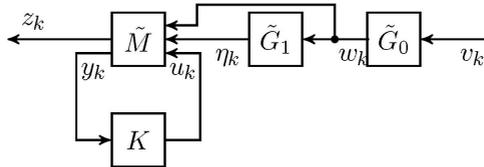


Рис. 4. Замкнутая система с «наихудшими» формирующими фильтрами

## 6. $\mathcal{H}_2$ -регулятор в форме наблюдателя

Рассмотрим систему

$$(47) \quad \mathcal{F} = F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} \tilde{G}_0 = F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} \tilde{G}_0 \\ \tilde{G}_1 \tilde{G}_0 \end{bmatrix},$$

представленную на рис. 4, где фильтры построены в соответствии с процедурами, описанными в предыдущем разделе, для некоторого регулятора  $K$ . Замкнутая система имеет реализацию в пространстве состояний

$$\mathcal{F} = \left[ \begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B} \\ * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{D} \end{array} \right],$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= A + B_3 L_1 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w1}, \\ \tilde{A}_{12} &= B_2 \hat{C} + B_3 L_2 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w2}, \\ \tilde{B} &= (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) \Sigma_w^{1/2}, \\ \tilde{C}_{21} &= C_3 + D_{33} L_{w1}, \\ \tilde{C}_{22} &= D_{33} L_{w2}, \\ \tilde{D} &= D_{33} \Sigma_w^{1/2}, \end{aligned}$$

а матрицы  $L, \Sigma, L_w$  и  $\Sigma_w$  такие, как в (30)–(31) и (42)–(43). Задача 2 эквивалента задаче оптимизации

$$\inf_{K \in \mathcal{K}} J(K, \gamma) = \inf_{K \in \mathcal{K}} \|\mathcal{F}\|_2^2 = \inf_{K \in \mathcal{K}} \left\| F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I \\ \tilde{G}_1(K) \end{bmatrix} \tilde{G}_0(K) \right\|_2^2.$$

Это задача  $\mathcal{H}_2$ -оптимизации в условиях неполной информации о векторе состояния для системы (47), на вход которой поступает «белый шум» с единичной ковариационной матрицей. Решение такой задачи хорошо известно [12]. В соответствии с принципом разделения, решение указанной задачи разбивается на два этапа. На первом этапе строится оцениватель состояния (оценивающий фильтр Калмана). На втором этапе строится статический регулятор, обеспечивающий заданное качество, а именно минимум  $\mathcal{H}_2$ -нормы передаточной функции замкнутой системы. Полученный таким образом регулятор является оценивающим, т.е. его состояние является оптимальной в среднеквадратичном смысле оценкой состояния системы по выходу.

### 6.1. ОЦЕНИВАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ

Опишем процедуру построения регулятора, оценивающего состояние системы. Рассмотрим уравнение Риккати относительно матрицы  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$(48) \quad S = \tilde{A}_{11} S \tilde{A}_{11}^\top + \tilde{B} \tilde{B}^\top - \Lambda \Theta \Lambda^\top,$$

$$(49) \quad \Theta = \tilde{C}_{21} S \tilde{C}_{21}^\top + \tilde{D} \tilde{D}^\top,$$

$$(50) \quad \Lambda = (\tilde{A}_{11} S \tilde{C}_{21}^\top + \tilde{B} \tilde{D}^\top) \Theta^{-1}.$$

Решение  $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  уравнения (48)–(50) называется стабилизирующим, если матрица  $S$  является положительно полуопределенной и матрица  $\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{21}$  асимптотически устойчива. Заметим, что в силу предположения (D) уравнение (48)–(50) имеет не более одного стабилизирующего решения.

**Теорема 6.** Пусть система (4) удовлетворяет предположениям (A), (B) и (D) и пусть матрицы реализации в пространстве

состояний допустимого регулятора (25) удовлетворяют соотношениям

$$(51) \quad \begin{aligned} \hat{A} &= \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} - \Lambda(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22}), \\ \hat{B} &= \Lambda, \end{aligned}$$

где матрица  $\Lambda$  выражается через стабилизирующее уравнение Риккати (48)–(50). Тогда регулятор (25) является оценивающим.

Поскольку доказательство теоремы 6 принципиально не отличается от доказательства теоремы 2, приведенной в [28], оно здесь пропущено. Пожалуй стоит отметить, что доказательство теоремы — суть хорошо известная процедура построения фильтра Калмана для замкнутой системы (47), на вход которой поступает «белый шум». Подробности такого синтеза могут быть найдены в [18, 26]. Поскольку размерность системы (47) равна  $2n$ , указанная процедура приводит к получению оценивателя состояния такой же размерности. Однако учитывая тот факт, что состояние замкнутой системы (47) имеет вид  $(x_k, \xi_k)^\top$ , где  $\xi_k$  — состояние искомого оценивающего регулятора, то возможно понизить размерность вектора пространства состояний регулятора до  $n$ .

## 6.2. ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР

Заключительный этап в решении задачи 2 заключается в построении статического регулятора для разомкнутой системы

$$T = \left[ \begin{array}{cc|cc} A & B_3L + (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_w & (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})\Sigma_w^{1/2} & B_2 \\ 0 & A_w + B_wL & B_w\Sigma^{1/2} & 0 \\ \hline C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ C_3 & D_{33}L_w & D_{33}\Sigma_w^{1/2} & 0 \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} A & B_3L_1 + (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_{w_1} & & \\ 0 & A + (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_{w_1} + B_3L_1 & & \\ * & * & \dots & \\ \hline C_1 & 0 & & \\ C_3 & D_{33}L_{w_1} & & \end{array} \right]$$

$$\dots \left[ \begin{array}{cc|cc} B_3 L_2 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w_2} & * & B_2 & \\ (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w_2} + B_3 L_2 + B_2 \hat{C} & * & 0 & \\ \dots & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & D_{12} & \\ D_{33} L_{w_2} & D_{33} \Sigma_w^{1/2} & 0 & \end{array} \right],$$

где матрицы  $L, \Sigma^{1/2}, L_w, \Sigma_w^{1/2}$  такие же, как и в теоремах 3 и 5. Система  $\mathcal{T}$  изображена на рис. 5.

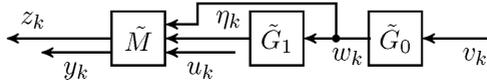


Рис. 5. Разомкнутая система

Рассмотрим уравнение Риккати относительно матрицы  $T \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ :

$$(52) \quad T = A_u^\top T A_u + C_u^\top C_u - N^\top \Upsilon N,$$

$$(53) \quad \Upsilon = B_u^\top T B_u + D_{12}^\top D_{12},$$

$$(54) \quad N = [N_1, N_2] = -\Upsilon^{-1} (B_u^\top T A_u + D_{12}^\top C_u),$$

где  $A_u \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ ,  $B_u \in \mathbf{R}^{2n \times m_2}$  и  $C_u \in \mathbf{R}^{p_1 \times 2n}$  определяются следующим образом:

$$A_u = \begin{bmatrix} A & (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_w + B_3 L \\ 0 & A + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_w + B_3 L + B_2 \hat{C} \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_u = [C_1 \ 0].$$

Решение  $T = T^\top \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  уравнения (52)–(54) будем называть стабилизирующим, если матрица  $T$  положительно определена, а матрица  $A_u + B_u N$  асимптотически устойчива. Из-за предположения, что матрица  $D_{12}$  в (1) имеет полный столбцовый ранг, уравнение (52)–(54) имеет не более одного решения.

**Теорема 7.** Пусть система (1) удовлетворяет предположениям (A), (B), (E) и пусть матрицы реализации в пространстве

состояний оценивающего регулятора (25) вычисляются согласно соотношениям (51) и уравнению

$$(55) \quad \hat{C} = N_1 + N_2,$$

где матрицы  $N_1$  и  $N_2$  выражаются через стабилизирующее решение уравнения Риккати (52)–(54). Тогда регулятор (25) является решением задачи 2.

Доказательство теоремы представляет собой синтез оптимального  $LQG$ -регулятора с критерием минимизации  $\mathcal{H}_2$ -нормы передаточной матрицы замкнутой системы. Подробное изложение которого можно найти в [18].

## 7. Окончательный алгоритм синтеза регулятора

В данном разделе опишем окончательный алгоритм решения задачи 1. Поскольку исходная задача заменяется вспомогательной смешанной задачей  $AB_a/\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации, опишем основные этапы решения последней:

- 1) фиксируем величины  $\gamma_1 \neq 0$  и  $\gamma_2 \neq 0$ , при этом эти величины должны быть достаточно большими, чтобы уравнение (29)–(31) имело решение;
- 2) решаем систему из четырех уравнений Риккати (29)–(31), (41)–(43), (48)–(50), (52)–(54), уравнения Ляпунова (44) и нелинейного уравнения специального вида (45). Эту систему можно решить с помощью метода гомотопий [10, 23]. Решение этих уравнений дает  $(A, B, C, D)$ -представление регулятора  $K_\gamma$ , который является решением задачи 2.

Для того, чтобы получить оптимальное решение  $K_{\gamma_0} = \arg \min_{\gamma} J(K_\gamma, \gamma)$ , соответствующее наилучшему приближению к исходной задаче 1, необходимо найти  $\gamma_0 = \arg \min_K J(K_\gamma, \gamma)$ .

Построение итерационной процедуры выбора параметров  $\gamma_i$ , при котором субоптимальное решение сходится к оптимальному, должно основываться на теореме 2.

Минимальное значение функционала качества (5) равно

$$(56) \quad J(K_{\gamma_0}, \gamma_0) = \frac{1}{q} \left( 1 - \frac{m_1}{\text{Trace}(L_w P L_w^\top + \Sigma_w)} \right)^{1/2},$$

где матрицы  $L_w, P, \Sigma_w$  и параметр  $q$  — суть решение описанной системы уравнений при  $\gamma = \gamma_0$ . Число (56) является мажорантой для исходного функционала качества (3).

Отметим частные случаи решения задачи. В случае  $a = 0$  (в случае «белого шума» на входе системы)

$$\|T_{\dot{z}w}\|_a = \frac{1}{\sqrt{m}} \|T_{\dot{z}w}\|_2,$$

откуда в силу теоремы 1 построенный регулятор является решением задачи смешанной  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации [13]. В случае  $a \rightarrow +\infty$  имеем

$$(57) \quad \|T_{\dot{z}w}\|_a \rightarrow \|T_{\dot{z}w}\|_\infty,$$

т.е. регулятор, полученный при достаточно больших значениях  $a$  средней анизотропии входного сигнала, является аппроксимацией центрального регулятора в задаче  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации [11]. Характер поведения анизотропийной нормы в окрестности несобственной точки  $a = +\infty$  и, соответственно, скорость сходимости (57) могут быть найдены в [28].

## 8. Численный пример

В данном разделе приводятся результаты численного расчета анизотропийного регулятора для дискретной линейной системы со структурированной неопределенностью. В качестве объекта управления была выбрана модель движения самолета при заходе на посадку [4, 5]. Результаты моделирования, такие как значения переменных управляемого выхода и управления, сравниваются с результатами, полученными при моделировании системы с неструктурированной неопределенностью.

Математическая модель объекта управления приведена ниже:

$$(58) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_0q_k + B_1w_k + B_2u_k, \\ z_k &= C_1x_k + D_{12}u_k, \\ y_k &= C_2x_k + D_{22}w_k, \\ q_k &= \Delta z_k, \end{aligned}$$

где  $x_k$  — вектор состояния объекта;  $u_k$  — управляющий сигнал;  $w_k$  — внешнее возмущение;  $y_k$  — наблюдаемый выход;  $z_k$  — управляемый выход;  $\Delta$  — структурированная неопределенность.

Если рассматривать систему  $M$ , замкнутую регулятором  $K$ , с передаточной матрицей  $T_{zw} = \mathcal{F}_l(M, K)$  от входа внешних возмущений к управляемому выходу

$$M \sim \left[ \begin{array}{cc|c} A & B_2 & B_1 \\ \hline C_1 & D_{12} & 0 \\ C_2 & 0 & D_{22} \end{array} \right], \quad K \sim \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array} \right],$$

то задача анизотропного робастного управления заключается в поиске  $a$ -анизотропного оптимального регулятора, минимизирующего влияние внешних возмущений и наличия структурированной неопределенности.

Матрицы модели объекта управления (58) имеют вид

$$A = \left[ \begin{array}{cccccc} 0,9994 & -0,0008 & 0,0000 & -0,0009 & 0,0000 & 0,0009 \\ 0,0022 & 0,9938 & 0,0011 & 0,0072 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0052 & 0,9842 & -0,0154 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0099 & 0,9999 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0005 & 0,0124 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9960 \end{array} \right],$$

$$B_0 = \left[ \begin{array}{ccccc} 0,0000 & -0,0100 & 0,0005 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0004 & -0,0080 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0100 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{array} \right],$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0012 & 0,0000 \\ 0,0117 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0040 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При заданном уровне  $a \leq 0,8$  средней анизотропии внешних возмущений  $w_k$  и параметров  $\gamma = [0,131 \cdot 10^{-3}, 0,131 \cdot 10^{-3}]$  методом гомотопий с ньютоновскими итерациями был построен анизотропийный регулятор со следующей  $(A, B, C, D)$ -реализацией:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0,9886 & 0,0000 & 0,0002 & -0,0007 & -0,0018 & 0,0016 \\ 0,0014 & 0,9971 & 0,0023 & 0,0090 & -0,0051 & 0,0003 \\ -0,0161 & -0,0216 & 0,9745 & -0,0304 & -0,0151 & -0,0022 \\ -0,0010 & -0,0002 & 0,0098 & 0,9998 & -0,0041 & -0,0000 \\ -0,0023 & 0,0129 & 0,0001 & 0,0002 & 0,9828 & 0,0001 \\ -0,0134 & -0,0029 & -0,0006 & -0,0006 & -0,0025 & 0,9931 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0,0139 & 0,0023 \\ 0,0029 & 0,0069 \\ 0,0010 & 0,0017 \\ 0,0009 & 0,0040 \\ 0,0023 & 0,0176 \\ 0,0007 & 0,0004 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -1,2698 & -2,4460 & -0,8849 & -1,3832 & -1,2309 & -0,1716 \\ -3,3119 & -0,7485 & -0,1432 & -0,1570 & -0,5452 & -0,7420 \end{bmatrix}.$$

Ниже представлены результаты моделирования при наличии структурированной неопределенности в модели объекта следующего вида

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{bmatrix},$$

где каждая квадратная матрица  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $i = 1, 2$ . Для случая неструктурированной неопределенности  $\Delta \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ .

На рис. 6,7 представлены графики управляющего воздействия и управляемого выхода.

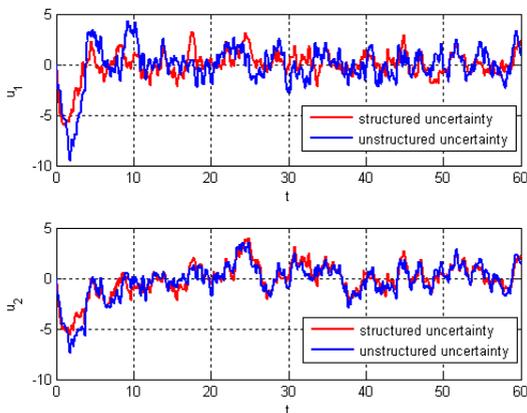


Рис. 6. Управляющие сигналы

Значение критерия качества  $J(K, \gamma)$  для случая структурированной неопределенности оказывается равным  $J(K, \gamma) = 1,1154$ , что ниже аналогичного критерия при неструктурированной неопределенности на 0,0210.

## 9. Заключение

В данной работе получен и описан алгоритм построения оптимального управления на основе минимизации анизотропийной нормы замкнутой системы. Задача ставится для дискретной ли-

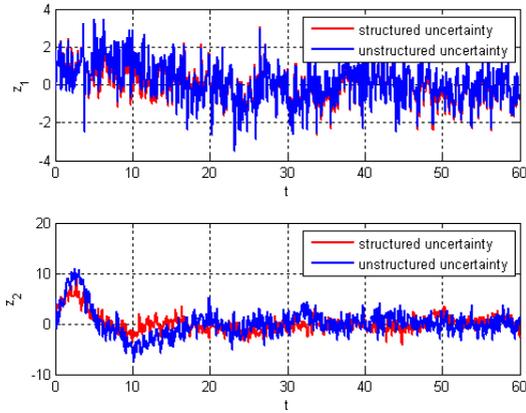


Рис. 7. Управляемый выход

нейной системы со структурированной неопределенностью и заданным уровнем средней анизотропии входного сигнала. Показано, что решение задачи построения анизотропийного регулятора может быть сведено к решению задачи  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации для системы с одним дополнительным входом. Которая, в свою очередь, сводится к решению системы из четырех связанных уравнений Риккати, уравнения Ляпунова и уравнения специального вида. Численный алгоритм, разработанный на основе метода гомотопий, вычисляет матрицы искомого внутренне стабилизирующего анизотропийного регулятора на базе  $\mathcal{H}_2$ -регулятора. Сравнительный анализ регуляторов для случая структурированной и неструктурированной неопределенности показывает, что регулятор, учитывающий структуру неопределенности, входящей в систему, дает лучшую оценку критерия качества и более низкие пиковые значения для переменных состояния объекта моделирования и закона управления. При рассмотрении номинальной системы (1) при  $\Delta \equiv 0$  можно отметить, что построенный регулятор в точности совпадет с построенным в [28].

## Литература

1. КИЦУЛ П.И., ЛИПЦЕР Р.Ш. *Рекуррентное оценивание случайных последовательностей*. – М.: Изд-во Ин-та пробл. упр, 1976. – 68 с.
2. КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А. *Решение стохастической задачи  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации для линейных дискретных систем с параметрической неопределенностью* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №8. – С. 112–142.
3. КУСТОВ А.Ю., КУРДЮКОВ А.П., НАЧИНКИНА Г.Н. *Стохастическая теория анизотропийного робастного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2012. – 128 с.
4. *Разработка принципов автоматизации полета и исследование новых алгоритмов управления на этапах захода на посадку и приземления* // Отчет о научно-исследовательской работе по теме №053-93/01. – М.: Институт проблем управления РАН, 1993.
5. *Разработка основ теории нетрадиционных подходов и исследование алгоритмов управления полетом в сложных условиях* // Отчет о научно-исследовательской работе по теме №074–95/01. – М.: Институт проблем управления РАН, 1995.
6. APKARIAN P., GAHINET P., BECKER G. *Self-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  control of linear parameter-varying systems: a design example* // Automatica. – 1995. – Vol. 31, №9. – P. 1251–1261.
7. APKARIAN P., NOLL D. *Nonsmooth  $\mathcal{H}_\infty$ -synthesis* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, №1. – P. 71–86.
8. APKARIAN P., RAVANBOD-HOSSEINI L., NOLL D. *Time domain constrained  $\mathcal{H}_\infty$ -synthesis* // Int. J. Robust Nonlinear Contr. – 2011. – Vol. 21, №2. – P. 197–217.
9. BERMAN N., SHAKED U.  *$\mathcal{H}_\infty$  Control for Discrete-Time Nonlinear Stochastic Systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, №6. – P. 1041–1046.
10. DIAMOND P., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. ET

- AL. *Homotopy methods and anisotropy-based stochastic  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization of control systems* // Report 97-14, The University of Queensland, Australia. – 1997. – P. 1–22.
11. DIAMOND P., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. ET AL. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. Control. – 2001. – Vol. 74, №1. – P. 28–42.
  12. DOYLE J.C., GLOVER K., KHARGONEKAR P.P. ET AL. *State-space solution to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems* // IEEE Trans. AC. – 1989. – Vol. 34. – P. 831–846.
  13. DOYLE J., ZHOU K., GLOVER K. ET AL. *Mixed  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  performance objectives II: Optimal control* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1994. – Vol. 39. – P. 1575–1587.
  14. FRANCIS B.A. *A Course of  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Berlin, Heidelberg: Springer. – 1987. – Vol. 88. – 141 p.
  15. GAHINET P. *Explicit controller formulas for LMI-based  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis* // Automatica. – 1996. – Vol. 32, №7. – P. 1007–1014.
  16. GAHINET P., APKARIAN P. *A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control* // Int. J. of Robust Nonlinear Contr. – 1994. – Vol. 4, №4. – P. 421–448.
  17. GERSON E., SHAKED U., YAESH I.  *$\mathcal{H}_\infty$  control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise* // Automatica. – 2001. – Vol. 37. – P. 409–417.
  18. GREEN M., LIMEBEER D.J.N. *Linear robust control*. – N.J.: Prentice Hall, 1995. – 538 p.
  19. GU D.-W., TSAI M.C., O'YOUNG S.D. AND OTHER *State-space formulae for discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  optimization* // Int. J. of Contr. – 1989. – Vol. 49. – P. 1683–1723.
  20. IWASAKI T., SKELTON R.E. *All controllers for the general  $\mathcal{H}_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas* // Automatica. – 1994. – Vol. 30, №8. – P. 1307–1317.
  21. IWASAKI T., SKELTON R.E., GRIGORIADIS K.M. *A*

- United Algebraic Approach to Linear Control Design.* – Taylor & Francis series in Systems and Control, London, 1997. – 300 p.
22. KARNY M. *Towards fully probabilistic control design* // Automatica. – 1996. – Vol. 32. – P. 1719–1722.
  23. MARITON M., BERTRAND R. *A homotopy algorithm for solving coupled Riccati equations* // Optimal. Contr. Appl. Meth. – 1985. – Vol. 6. – P. 351–357.
  24. PETERSEN I.R., JAMES M.R., DUPUIS P. *Minimax optimal control of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2000. – Vol. 45. – P. 398–412.
  25. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. *Stochastic approach to  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization* // Proc. 33rd Conference on Decision and Control, Florida, USA. – 1994. – Vol. 3. – P. 2249–2250.
  26. SCHERER C. *Theory of Robust Control.* – Mechanical Engineering Systems and Control Group, Delft University of Technology, The Netherlands, April 2001. – 160 p.
  27. SCHERER C., GAHINET P., CHILALI M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1997. – Vol. 42, №7. – P. 896–911.
  28. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization problem* // Proc. 13 IFAC World Congr., USA, 1996. – P. 427–432.
  29. ZAMES G. *Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – Vol. 26, №2. – P. 301–320.

## **ANISOTROPIC ROBUST REGULATOR SYNTHESIS FOR STRUCTURED UNCERTAINTY CONTROL MODEL**

**Alexander Yurchenkov**, Institute of Control Sciences of RAS,  
Moscow.

*Abstract: A problem of anisotropic control synthesis is considered and solved for the model of a control plant containing structured uncertainty. Adding a fictive input reduces the problem to the one of  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization. The suggested numerical algorithm uses the homotopy method to calculate matrices of an anisotropic regulator basing on an  $\mathcal{H}_2$ -regulator. The designed regulator and the standard regulator for an unstructured uncertainty model are compared. Computer simulation shows advantages of the proposed regulator.*

**Keywords:** robust stochastic control anisotropic theory, structured uncertainty, homotopy method.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В. А. Уткиным*

*Поступила в редакцию 10.04.2014.*

*Опубликована 31.07.2014.*