

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 53
Январь 2015

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2015

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 53

Москва – 2015

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Дорофеев А.А., Кузнецов О.П., Кульба В.В., Кротов В.Ф., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Отв. секретарь:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И. **Техн. редактор:** канд. техн. наук Куливец С.Г.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), д-р экон. наук, проф. Архипова М.Ю. (ИПИ РАН), д-ра техн. наук: проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИППИ РАН), д-р экон. наук, проф. Голиченко О.Г. (ЦЭМИ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Добровидов А.В. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Заложнев А.Ю. (ИПУ РАН), проф. Ириков В.А. (МФТИ), проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Касаткин С.И. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), проф. Курдюков А.П. (ИПУ РАН), проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), к-т техн. наук, доцент Лебедев В.Н. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Ловчиновский Э.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Новосельцев В.Н. (ИПУ РАН), проф. Орлов А.И. (МВТУ), д-р физ.-мат. наук, проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Секерин В.Д. (ИПУ РАН), д-ра техн. наук: проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Сухарев О.С. (Ин-т экономики РАН), д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МВТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.О. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербakov П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Волгоград – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов Л.А., проф. Погодаев А.К. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), проф. Фрадков А.Л. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ); **Тверь** – д-ра техн. наук: проф. Кузнецов В.Н., проф. Палюх Б.В. (ТГТУ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в Интернет: ubs.mtas.ru.

Номер гос. регистрации электронного научного издания (ЭНИ): 0421200023.

© ИПУ РАН, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Управление в социально-экономических системах

Беляева А. В.

Учет пространственных факторов в массовой оценке объектов недвижимости: сравнение эффективности различных методов 6

Иванов Н. Н.

Аналитико–имитационное моделирование обобщенных стохастических сетевых графиков..... 27

Соловьев А. И.

Декомпозиция задачи оптимального потребления на дискретном рынке..... 45

Управление техническими системами и технологическими процессами

Мишкuroв П. Н.

Повышение точности динамической оптимизации вагонопотоков на основе использования расчётных периодов переменной длительности 58

Управление подвижными объектами и навигация

Белов Р. В., Казанин Д. К., Огородников К. О.

Методы коррекции инерциальных оценок координат при управлении группой подвижных объектов..... 76

УДК 519.237.5

ББК 22.172

УЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ В МАССОВОЙ ОЦЕНКЕ ОБЪЕКТОВ НЕДВИЖИМОСТИ: СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

Беляева А. В.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Исследуется эффективность методов компьютерной массовой оценки (КМО) объектов недвижимости, использующих информацию о местоположении объекта. Это исследование является актуальным в силу того, что до построения модели не всегда может быть определена однозначно структура модели (тип пространственной автокорреляции, число ближайших соседей). Предложена методика оценки эффективности различных методов КМО, реализованная посредством имитационной модели. Приведены результаты исследования: 1) области эффективного применения методов в зависимости от типа пространственной зависимости в исходных данных; 2) результаты сравнения робастности методов. Методы различаются способами учета информации о пространственном расположении объекта.

Ключевые слова: компьютерная массовая оценка объектов недвижимости, пространственные авторегрессионные модели, центр влияния, имитационная модель, чувствительность методов.

¹ Анна Валерьевна Беляева, аспирант, (belyaevaav@gmail.com).

1. Введение

Массовая оценка объектов недвижимости – это оценка стоимости объектов недвижимости, которая проводится систематически на определенную дату, и при этом используются стандартные процедуры статистического анализа. Главное отличие массовой оценки от экспертной – работа не с отдельными объектами, а со статистическими данными, описывающими совокупность объектов.

Направление исследования зависимости стоимости объекта от его пространственных характеристик развивалось в последние три десятилетия в работах зарубежных ученых. Многочисленные эксперименты [1–9] показали, что рынок недвижимости наиболее качественно описывается с помощью моделей, учитывающих местоположения объекта недвижимости.

Методы построения пространственных моделей, учитывающие зависимость цены объекта от его расположения, можно разделить на три группы:

- методы, учитывающие при формировании цены объекта расстояние от него до центров влияния (объектов, которые не являются объектами выборки, но оказывают позитивное или негативное влияние на стоимость объектов недвижимости) [7];
- методы, учитывающие наличие пространственной автокорреляции между характеристиками недвижимости [3, 5];
- методы, основанные на разделении области оценивания на однородные зоны и анализе поведения цен в каждой из зон [2].

В работе [1] был предложен метод компьютерной массовой оценки, который одновременно учитывает влияние двух пространственных факторов на цену недвижимости: расстояние до центров влияния и пространственную автокорреляцию.

В настоящей статье средствами математического моделирования проведен сравнительный анализ эффективности методов КМО, учитывающих влияние пространственного фактора различными способами, включая метод оценивания, не учитывающий пространственный фактор. Для этого формируются обучающая и контрольная выборки объектов недвижимости (с ценами и характеристиками), построенные для различных форм про-

странственной зависимости в данных (с помощью имитационной модели), а затем применяется следующий алгоритм:

- по обучающей выборке для каждого из наборов смоделированных ситуаций методами М1–М4, о которых сказано ниже, вычисляются параметры модели оценивания;
- сравнивается качество моделей оценивания, построенных разными методами (для оценивания и сравнения прогнозных характеристик моделей используется контрольная выборка) и проверяется чувствительность моделей оценивания к параметрам, определяющим структуру модели.

2. Методика оценки эффективности КМО

Процедура оценки эффективности методов построения КМО, используемая в настоящей статье, включает следующие основные этапы.

Этап 1. Выбор методов для сравнения их эффективности. Для сравнения были выбраны:

- метод М1 линейной регрессии, модель оценивания:

$$(1) \quad Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n,$$

где $(X_1, \dots, X_n)$ – непространственные характеристики объекта недвижимости, β_i – численные коэффициенты при непространственных характеристиках объекта, показывающие вклад соответствующих характеристик в стоимость;

- метод М2, учитывающий расстояние до центров влияния; модель оценивания совпадает с моделью (1), в которую добавляется дополнительное число регрессоров, равное числу центров влияния, оказывающих воздействие на цену объекта; значения регрессоров являются функциями от расстояний до центров влияния;

- метод М3 пространственных моделей. Рассматриваются
 - а) модели с пространственной корреляцией в лагах:

$$(2) \quad Y = \rho WY + X\beta + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n),$$

где y – $(n \times 1)$ -вектор зависимых переменных; X – $(n \times k)$ -матрица непространственных характеристик объекта недвижимости; ρ – коэффициент пространственной зависимости; β – $(k \times 1)$ -вектор коэффициентов при непростран-

ственных характеристиках объекта; ζ – случайная составляющая; W – $(n \times n)$ -матрица учета пространственных взаимодействий, элементы w_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, которой формируются по правилу:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{объекты } i \text{ и } j \text{ смежны в нектором смысле,} \\ 0, \text{объекты } i \text{ и } j \text{ не смежны в этом же смысле;} \end{cases}$$

б) модели с пространственной корреляцией в ошибках:

$$(3) \quad Y = X\beta + u, u = \lambda Wu + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n),$$

где u – $(n \times 1)$ -вектор возмущений, λ – коэффициент пространственной корреляции в ошибках модели. Остальные обозначения и параметры совпадают с обозначениями и параметрами модели (2).

Смежность во всех экспериментах определяется по правилу p (в смысле евклидовой метрики) ближайших соседей, где p задается на основе анализа характера пространственной зависимости, но практически определяется экспериментальным путем – сравнением вариантов с разными значениями p .

– метод М4, предложенный в [1], модели оценивания которого совпадают с моделями (2) и (3), в которые добавляется дополнительное число регрессоров X , равное числу центров влияния, оказывающих воздействие на цену объекта.

Выбранные методы различаются только способом учета пространственного фактора: не учитывают (М1), учитывают только один из них (М2, М3), учитывают оба (М4). Для их реализации могут быть использованы стандартные программы, реализованные в большинстве статистических пакетов.

Этап 2. Построение моделей цен объектов, определяемых непространственными и пространственными факторами. На формирование цен, помимо таких факторов как число комнат, этаж, тип стен, общая площадь, площадь кухни и пр., оказывают влияние пространственные факторы: центры влияния и пространственная корреляция между характеристиками объектов. Модели цен различаются по числу и направленности центров влияния, по типу пространственной корреляции (в лагах или в ошибках), по силе воздействия пространственного фактора

(сильное, слабое, отсутствует), по виду матриц пространственных взаимодействий.

Этап 3. Для каждой модели формирования цен методами М1–М4, выбранными на шаге 1, вычисляется набор критериев, оценивающих качество модели, построенной по обучающей выборке и качество прогнозирования.

В случае пространственных моделей вопрос выбора критериев оценки качества моделей не является тривиальным – в силу структуры пространственных моделей и используемых методов оценивания остатки могут не иметь нулевого математического ожидания и, следовательно, разложения дисперсии на объясняемую дисперсию и дисперсию остатков не существует, поэтому критерий R^2 теряет смысл. Применяются следующие критерии:

- критерий Акаике (K_1)

$$AIC = \frac{2k}{n} - 2\ln(L),$$

где k – число параметров модели, L – максимизированное значение функции правдоподобия модели, n – объем выборки, по которой строилась модель;

- квадрат коэффициента корреляции между наблюдаемыми и предсказанными по модели значениями (K_2)

$$corr = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y}_i)(Y_i^m - \bar{Y}_m)}{\sum (Y_i - \bar{Y}_i)^2 (Y_i^m - \bar{Y}_m)^2},$$

где

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \bar{Y}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^m$$

средние значения, Y_i – цены объектов выборки, Y_i^m – модельные значения цен объектов выборки;

- оценка величины смещения среднего остатков относительно нуля (K_3)

$$meanres = \frac{\sum_{i=1}^n res_i}{n},$$

где res_i – остатки модели;

- среднеквадратичное отклонение остатков (K_4)

$$sumolsar = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (res_i - \overline{res})^2},$$

– сумма квадратов ошибок прогноза цен контрольной выборки, построенного в результате анализа обучающей выборки (качество прогнозирования) (K_5)

$$forecast = \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^m)^2},$$

где Y_i – цены объектов контрольной выборки, Y_i^m – значения цен объектов контрольной выборки, вычисленные по моделям, построенным по обучающей выборке.

Одним из важнейших критериев качества построенной модели является точность прогнозирования цен объектов. Необходимость в прогнозировании возникает тогда, когда нам необходимо оценить объекты, информация по сделкам о которых в нашей базе данных отсутствует на исследуемую дату. Для построения прогноза предлагается следующий алгоритм:

1. По критериям K_1 – K_4 строится модель (2) или (3) по обучающей выборке.
2. Для каждого из r объектов контрольной выборки вычисляется регрессор:

$$dci_i = \frac{\alpha}{d_i},$$

где коэффициент α определяется по экспериментальным данным минимизацией функции

$$I = \sum_{i=1}^n \left[res_i - \frac{\alpha}{d_i} \right],$$

res_i – остатки регрессии, d_i – расстояние от i -го объекта до центра влияния, $i = 1, 2, \dots, n$ и определяется в результате решения уравнения:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[res_i - \frac{\alpha}{d_i} \right] / d_i = 0.$$

3. Для каждого из r объектов контрольной выборки выбирается p ближайших соседей из обучающей выборки размера n , где p соответствует числу ближайших соседей построенной модели и строится $r \times n$ матрица W_{pc} пространственных взаимодействий объектов контрольной выборки согласно алгоритму, описанному в [1].

4. Прогнозное значение цены $\hat{Y}_k$, $k = 1, 2, \dots, r$, вычисляется по формулам:

$$\hat{Y}_k = \rho W_{pc} Y_l + X_k \beta \quad \text{для модели (2),}$$

$$\hat{Y}_k = X_k \beta + \lambda W_{pc} (Y_l - X_l \beta) \quad \text{для модели (3),}$$

где X_k – значения регрессоров контрольной выборки, $Y_l = (y_1, \dots, y_n)$ и X_l – значения цен и регрессоров обучающей выборки, коэффициенты β , λ , ρ оценены по обучающей выборке.

По результатам анализа значений критериев для каждой модели формирования цен определяется метод, являющийся наиболее эффективным для данной модели.

Этап 4. В результате анализа поведения критериев для различных моделей формирования цен формируются группы моделей (множества смоделированных наборов цен ниже называются Ситуациями) таким образом, чтобы в них попали модели формирования цен, для которых проверяемые методы имеют одинаковое ранжирование по эффективности. В результате для каждой Ситуации определяется наиболее эффективный метод.

3. Построение имитационной модели

Для проведения сравнительного анализа эффективности методов учета пространственных факторов была построена имитационная модель, включающая различные варианты воздействий пространственного фактора на формирование цен (возможные варианты взаимодействия получены на основании многочисленных экспериментов на данных реального рынка недвижимости [1, 4–9]).

Построение модели включает следующие шаги:

1. Генерация объектов. На плоскости $[0, 100] \times [0, 100]$ генерируются координаты 150 объектов (из них 100 – объекты обу-

чающей выборки, 50 – объекты контрольной выборки). Выборка объектов разбивается на обучающую и контрольную выборки следующим образом: из 150 сгенерированных объектов объект, номер которого кратен трем, попадает в контрольную выборку, остальные объекты – в обучающую.

2. Генерация регрессоров. Для каждого из 150 объектов генерируется вектор независимых переменных $\{x_1, x_2\}$, первая компонента – из равномерного распределения на отрезке $[0, 5]$, вторая – из равномерного распределения на отрезке $[10, 13]$. Как и в п.1, выборка регрессоров разбивается на контрольную и обучающую выборки.

3. Определение координат центров влияния и расчет регрессоров, учитывающих расстояния от объектов до центра влияния. В рамках проводимых экспериментов рассматривалось два варианта по наличию центров влияния. Один центр положительного влияния, в качестве центра была выбрана точка с координатами (35,15; 60,86); и три центра влияния различной направленности: два положительной с координатами (35,15; 60,86) и (43,62; 20,30) и один отрицательной с координатами (74,94; 29,55).

В случае одного центра влияния для каждой пары координат объекта $x_i, y_i, i = 1, \dots, 150$, вычисляется переменная d_i – евклидово расстояние от объекта до центра влияния; для учета воздействия центра влияния на цену выбирается функция вида

$$(4) \quad f(d_i) = \exp(-\alpha d_i),$$

где параметр α определяет радиус действия центра влияния, и вычисляются значения регрессора $X_3 = \{x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3150}\}$, где $x_{3i} = f(d_i) = \exp(-\alpha d_i)$.

В случае нескольких центров влияния для каждого из них рассчитываются расстояния d_i^1, d_i^2, d_i^3 , где d_i^k – расстояние от i -го объекта до k -го центра влияния и по формуле (4) вычисляются значения регрессоров X_3, X_4, X_5 . Регрессионная матрица имеет вид $\{I, X_1, X_2, X_3\}$ в случае одного центра влияния, $\{I, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ – в случае трех центров влияния.

4. Формирование матриц пространственных взаимодействий для методов МЗ и М4. Построение пространственных матриц i ближайших соседей W_i размера 100×100 для объектов обучаю-

щей выборки, где $i = 2, 4, 8, 12$. Для объектов контрольной выборки строятся матрицы W_{ic} размера 50×100 , в которых для каждого объекта контрольной выборки выбирается i , $i = 2, 4, 8, 12$, ближайших соседей, из обучающей выборки.

Данные пунктов 1–4 одинаковы для всех проводимых экспериментов.

5. Формирование моделей цен. Строятся две модели цен: цены с пространственной зависимостью в лагах и цены с пространственной зависимостью в остатках.

Для генерации цен с пространственной зависимостью в лагах используется модель (2), цен с пространственной корреляцией в ошибках – модель (3).

Матрицы пространственных взаимодействий строятся по алгоритму нахождения p ближайших соседей. Формируются модели цен с $p = 2, 4, 8, 12$.

Параметры модели:

$\beta = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ для экспериментов с одним центром влияния, где: $\beta_0 = 0,3, \beta_1 = \beta_2 = 20, \beta_3 = 50$;

$\beta = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$ для случая трех центров влияния: $\beta_0 = 0,3, \beta_1 = \beta_2 = 20, \beta_3 = \beta_4 = 50, \beta_5 = -20$.

Параметры p и λ в зависимости от эксперимента, могут принимать значения 0,8 (сильная зависимость) или 0,2 (слабая зависимость).

При расчете регрессоров X_3 и X_3, X_4, X_5 по формуле (4) параметр α выбирается равным $\alpha = 0,04$, дисперсия случайной составляющей $\sigma = 1$.

Таким образом, было сформировано 32 набора данных, различающихся:

- числом и расположением центров влияния;
- формой пространственной корреляции в данных (в лагах и в ошибках);
- числом ближайших соседей пространственной матрицы;
- силой воздействия пространственного фактора (сильное и слабое воздействие).

4. Структура эксперимента и проведение анализа эффективности методов

Множество смоделированных наборов цен было разделено на 4 группы, которые дальше мы будем называть Ситуациями. Было выделено четыре Ситуации:

Ситуация 1. Сильная пространственная автокорреляция между ценами;

Ситуация 2. Слабая пространственная автокорреляция между ценами;

Ситуация 3. Сильная пространственная автокорреляция между факторами, неучтенными регрессионной моделью;

Ситуация 4. Слабая пространственная автокорреляция между факторами, неучтенными регрессионной моделью.

В Ситуациях 1 и 2 цены формируются с использованием модели (2).

В Ситуациях 3 и 4 цены формируются с использованием модели (3).

В каждой Ситуации построены модели цен с одним (положительным) центром влияния и модели с тремя центрами влияния различной направленности (два положительной направленности, один – отрицательной).

Для каждого из двух вариантов состава центров влияния сформированы 4 модели цен, различающихся числом p ближайших соседей.

Эксперимент включает: построение модели формирования цен, построение модели КМО по методам М1, М2, М3, М4, вычисление значений критериев K_1 – K_5 для каждой из построенных моделей.

Каждый эксперимент повторяется 500 раз с различными значениями случайной составляющей модели цен. После окончания эксперимента рассчитываются средние значения критериев, которые используются для анализа сравнительной эффективности методов в Ситуациях 1–4.

В качестве примера на рис. 1 и рис. 2 представлены графики среднеквадратичной ошибки прогноза для различных Ситуаций: сплошной линией для случая одного центра влияния, пунктирной линией – для случая трех центров влияния. По оси ординат

указано значение среднеквадратичной ошибки прогноза, по оси абсцисс отложены названия методов, для которых оно было получено в экспериментах рассматриваемой Ситуации. Названия методов повторяются для каждого из четырех экспериментов (с двумя, четырьмя, восьмью и двенадцатью ближайшими соседями).

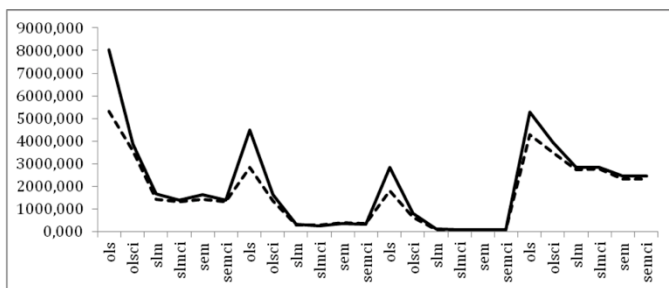


Рис. 1. Среднеквадратичная ошибка прогноза для Ситуации 1

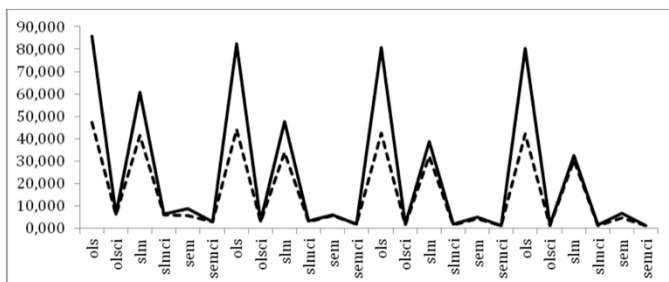


Рис. 2. Среднеквадратичная ошибка прогноза для Ситуации 3

Используются обозначения:

- ols – линейная регрессия;
- olsci – линейная регрессия с центром влияния;
- slm – модель с пространственной корреляцией в лагах;
- slmci – модель с пространственной корреляцией в лагах с учетом центра влияния;
- sem – модель с пространственной корреляцией в остатках;
- semci – модель с пространственной корреляцией в остатках с учетом центра влияния.

Из графиков видно, что в рамках одной ситуации поведение значения критерия K_5 для одного и трех центров влияния идентично, но отличается для разных ситуаций.

Это подтверждается соответствующими расчетами.

В Ситуации 1:

- метод М4 во всех экспериментах имеет наименьшую ошибку прогноза и является более эффективным, чем метод М3: применение метода М4 уменьшает ошибку прогноза на 14–25 % по сравнению с методом М3;

- метод М1 во всех экспериментах дает ошибку прогноза в 2–28 раз больше, чем метод М3, метод М2 во всех экспериментах дает ошибку прогноза в 2–8 раз больше, чем метод М3. Поэтому использование методов М1 и М2 не эффективно в рассматриваемой Ситуации.

В Ситуации 3:

- метод М4 с SEM моделью во всех экспериментах имеет наименьшую ошибку прогноза и является более эффективным, чем метод М2: уменьшает ошибку прогноза метода М2 на 11–52 %;

- метод М1 во всех экспериментах дает ошибку прогноза в 2–4 раза больше, чем метод М3 с SLM моделью для одного центра влияния и на 25% больше для трех центров влияния. Метод М3 с SEM моделью более эффективен, однако во всех экспериментах он дает ошибку прогноза в 2–13 раз большую, чем метод М2. Поэтому использование этих методов М1 и М3 не эффективно в рассматриваемой ситуации.

В таблице 1 подведены итоги анализа эффективности применения методов. На пересечении строки, соответствующей Ситуации, и столбца, соответствующего критерию, указаны методы, наиболее эффективные по этому критерию. В крайнем правом столбце указана лучшая модель для ситуации в целом.

Значение критерия K_3 отлично от нуля только для случаев, где модель данных строится по большому числу соседей – а именно, 12 соседей, поэтому в таблицу он не включен.

В результате проведенного анализа для каждой ситуации были определены методы, использование которых предпочтительнее в данной Ситуации. Результаты анализа показали, что:

- учет пространственных факторов повышает эффективность оценок прогноза в несколько раз, по сравнению с линейной регрессионной моделью М1;

- метод М4 значительно эффективнее методов М1–М3 в Ситуациях 1–3, а в Ситуации 4 сравним по эффективности с методом линейной регрессии с учетом расстояний до центров влияния М2, но последний предпочтительнее (по критерию Акаике), так как является более простым в реализации.

- в Ситуации 1 метод М4 эффективнее метода М3 в среднем на 15–25 % (в зависимости от используемой модели цен), а метод М2 хуже М4 в несколько раз; в Ситуациях 2 и 3 метод М4 эффективнее методов М2 и М3, в Ситуации 4 метод М4 незначительно уступает по эффективности методу М2, а применение метода М3 ухудшает значения критериев в несколько раз.

Таблица 1. Свод по применению методов

Ситуация	Качество прогноза (K ₅)	Диагностика модели			ИТОГ
		Критерий Акаике (K ₁)	Корреляция модельных и реальных цен (K ₂)	Среднеквадратичное отклонение остатков (K ₄)	
Ситуация 1	1) М4 с SLM моделью дает минимальные ошибки прогноза, уменьшает ошибку прогноза М3 на 14–25 % . 2) М1 – ошибка прогноза в 2–28 раза больше, чем по М3, М2 ошибка прогноза в 2–8 раз больше, чем по М3.	1) М4 во всех экспериментах дает минимальное значение K ₁ . 2) М3 по этому критерию значительно эффективнее М1 и М2.	1) М3 и М4 имеют K ₂ выше, чем М1 и М2. 2) М4 и М3 по значению K ₂ не различаются.	1) М3 и М4 имеют K ₄ остатков меньше, чем М1 и М2. 2) М4 имеет значение K ₄ остатков на 3–24 % ниже, чем М3.	Эффективный метод – М4 с SLM–моделью
Ситуация 2	1) М2 и М4 – ошибка прогноза меньше, чем по М1 и М3, соответственно. 2) М4 – наименьшая ошибка прогноза. 3) М3 с SLM моделью – ошибка прогноза в 2–6 раз больше, чем по М2.	1) Методы с учетом центров влияния М2 и М4 во всех экспериментах позволяют построить модель лучшего качества, чем М1 и М3. Так, М2 уменьшает значение K ₁ М1 на 28–55%, М3 – на 5–35%. 2) В свою очередь, М4	1) М2 и М4 имеют K ₂ выше, чем М1 и М3. 2) М4 и М2 по значению K ₂ не различаются.	1) М2 уменьшает значение K ₄ М1 на 49–73%, М3 – для усредненного по двум методам slm и sem на 12–44%. Но в экспериментах 5, 6, 21, 22, 23 модель sem обладает качеством, лучшим, чем М2 на	Эффективный метод – М4 с SEM моделью для числа соседей больше двух, М4 с SLM моделью – для числа соседей, равных двум

Ситуация	Качество прогноза (K_5)	Диагностика модели			ИТОГ
		Критерий Акаике (K_1)	Корреляция модельных и реальных цен (K_2)	Среднеквадратичное отклонение остатков (K_4)	
	4) М4 с SEM моделью-ошибка прогноза меньше, чем по М2 на 13–43%.	уменьшает значение K_1 на 24–45% по сравнению с М2.		3–15%. 2) М4 уменьшает значение K_4 М2 на 30–49%. При этом для большого числа соседей (12 соседей, эксперименты 8 и 24) наилучшей с точки зрения этого критерия является модель semci.	
Ситуация 3	1) М4 с SEM моделью-минимальная ошибка прогноза. 2) М1 – ошибка прогноза в 2–4 раза больше, чем по М3. 3) М3 – ошибка прогноза в 2–13 раз больше, чем по М2. 4) М4 – ошибка прогноза на 11–52% меньше, чем по М2.	1) Методы М2 и М4 во всех экспериментах являются более эффективными, чем М1 и М3. Они позволяют уменьшить значение K_1 на 38–90% по сравнению с М1 и М3. 2) Причем для такого варианта пространственной зависимости лучшим является метод semci. М4 позволяет уменьшить	1) М2 и М4 имеют K_2 выше, чем М1 и М3: на 2–7%. 2) М4 и М2 по значению K_2 не различаются.	1) М2 и М4 имеют K_4 остатков на 68–88% меньше, чем М1 и М3. 2) М4 уменьшает значение K_4 остатков М2 на 8–37%.	М4 с SEM моделью эффективнее М2 и значительно эффективнее М3

Ситуация	Качество прогноза (K_5)	Диагностика модели			ИТОГ
		Критерий Акаике (K_1)	Корреляция модельных и реальных цен (K_2)	Среднеквадратичное отклонение остатков (K_4)	
		значение K_1 М2 на 28–60%.			
Ситуация 4	1) М2 и М4 –ошибка прогноза меньше, чем по М1 и М3. 2) М4 и М2 по критерию «ошибка прогноза» одинаково эффективны. 3) М3 – ошибка прогноза увеличивается в 16–29 раз по сравнению с ошибкой прогноза по М2.	1) Методы с учетом центров влияния М2 и М4 во всех экспериментах являются более эффективными, чем М1 и М3: значение K_1 уменьшается на 92– 97% 2) М2 в случае слабой пространственной зависимости в остатках модели дает более низкие значения K_1 по сравнению с М4 5–20%.	1) М2 и М4 имеют K_2 выше, чем М1 и М3: на 2–7%. 2) М4 и М2 по значению K_2 не различаются.	1) М2 и М4 уменьшают K_4 остатков М1 и М3 на 80–89%. 2) М4 и М2 по значению K_4 не различаются.	Эффективный метод – М2

5. Анализ чувствительности методов

С использованием построенной имитационной модели было проведено исследование чувствительности методов, использующих пространственные модели. При построении пространственных моделей выбор типа модели (SLM, SEM) и числа ближайших соседей обычно определяется пользователем, так как тесты множителей Лагранжа зачастую не дают однозначного ответа о типе пространственной корреляции и не существует эффективных методов определения числа ближайших соседей на основе анализа выборки. В связи с этим возникает вопрос о чувствительности методов М3 и М4 относительно выбора типа модели. Метод, обладающий меньшей чувствительностью к выбору типа модели и заданию числа ближайших соседей, является более робастным.

Чувствительность относительно выбора типа пространственной модели измеряется величиной относительного изменения значения критерия при построении модели, тип которой совпадает с типом модели цен, до значения критерия, где тип модели цен и оцениваемой модели не совпадают. Пусть x_1 – значение какого-либо критерия K_i при построении SLM модели по данным цен генерируемым моделью SLM, x_2 – значение критерия K_i при построении SEM модели по тем же данным. Относительное изменение значения критерия при замене типа модели рассчитывается по формуле:

$$(5) \quad \alpha = \frac{x_1 - x_2}{x_1} \cdot 100\% .$$

Рассмотрим критерий K_5 . Положительное значение α указывает на то, что ошибка прогноза модели SLM выше, чем модели SEM для анализируемых данных, и в данном эксперименте предпочтительнее SEM модель.

Сравним чувствительность методов М3 и М4 в Ситуации 1. На рис. 3 представлены значения α для метода М4 – сплошная линия, результаты метода М3 – пунктир. По оси ординат отложены значения α , по оси абсцисс – номера экспериментов.

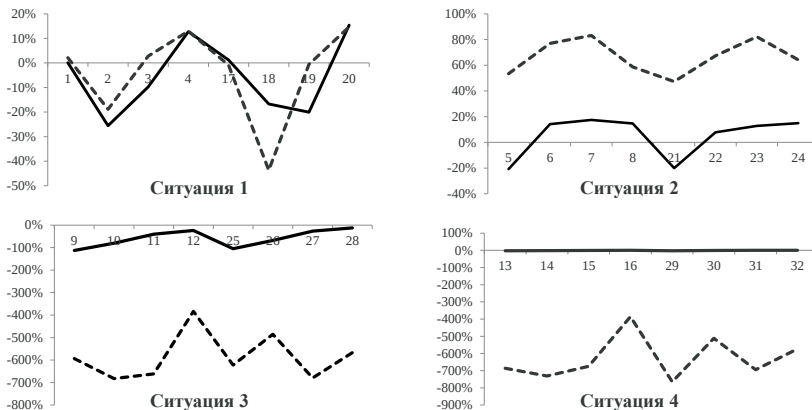


Рис. 3. Чувствительность методов

По критерию Стьюдента для парных выборок значения α для алгоритмов М4 и М3 значимо не различаются, таким образом, в Ситуации 1 методы М3 и М4 имеют одинаковую чувствительность.

В Ситуации 2 чувствительность метода М3 к выбору модели в несколько раз превосходит чувствительность метода М4.

В Ситуациях 3 и 4 для методов М4 и М3 использование SLM модели увеличивает ошибку прогноза в несколько раз в методе М3 и на 70–100 % при малом числе соседей при использовании метода М4. В остальных случаях метод М4 не является чувствительным к выбору типа модели.

Как видно из графиков, М4 в Ситуациях 2–4 обладает меньшей чувствительностью к выбору типа модели и заданию числа ближайших соседей, чем метод М3.

Выбор числа ближайших соседей может значительно изменить качество пространственной модели. Сравним чувствительность методов М4 и М3 в различных Ситуациях. Для вычисления чувствительности в каждом эксперименте вычислим относительное изменение ошибки прогноза по формуле (5). Вычислим среднюю величину ошибки прогноза по всем экспериментам рассматриваемой Ситуации для методов М3 и М4. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результат анализа чувствительности методов

Метод	Ситуация 1	Ситуация 2	Ситуация 3	Ситуация 4
Метод 3	48%	11%	10%	3%
Метод 4	46%	8%	19%	0%

Методы М3 и М4 имеют одинаковую чувствительность к точности задания числа ближайших соседей.

6. Заключение

Сравнительный анализ эффективности рассмотренных методов при различных вариантах влияния пространственного фактора на цену (Ситуациях) показал, что метод М4, учитывающий оба пространственных фактора, является наиболее эффективным в трех рассматриваемых Ситуациях и сравним по эффективности с методом линейной регрессии с учетом расстояний до центров влияния в четвертой Ситуации. Метод М4 является менее чувствительным к заданию типа пространственной модели, чем метод М3.

Литература

1. БЕЛЯЕВА А.В. , ГРЕБЕНЮК Е.А. , *Построение моделей массовой оценки объектов недвижимости с учетом пространственной зависимости* // Проблемы управления. – 2014. – №1. – С. 45–52.
2. СТЕРНИК Г.М. *Математические основы методологии построения дискретных пространственно-параметрических моделей рынка жилья*. – Рынок недвижимости России, 2002. [Электронный ресурс]. – URL: <http://realtymarket.ru/metodi-eskie-materiali/Sternik-G.M.-MATEMATI-ESKIE-OSNOVI-METODOLOGII-POSTROENIYA-DISKRETNIIH-PROSTRANSTVENNO-PARAMETRI-ESKIH-MODELEI-RINKA-JILYA.html> (дата обращения 02.01.2015)
3. ANSELIN L. *Spatial Econometrics: Methods and Models* – Dordrecht: Kluwer Academic, 1988. – 284 p.

4. BIDANSET P., LOMBARD J. *Evaluating Spatial Model Accuracy in Mass Real Estate Appraisal: a Comparison of Geographically Weighted Regression and the Spatial Lag Model* // Cityscape: A Journal of Policy Development and Research. – 2014. – No 3. – P. 169–182.
5. CLIFF A., ORD J.K. *Spatial Processes: Model, and Application*. – London: Pion, 1981. – 327 p.
6. CONWAY D., LI C. Q., WOLCH J. AND ETC. *A spatial autocorrelation approach for examining the effects of urban green space on residential property values* // The Journal of Real Estate Finance and Economics. – 2010. – No. 41(2). – P. 150–169.
7. ECKERT J.K., O'CONNOR P.M., CHAMBERLAIN C. *Computer-Assisted Real Estate Appraisal. A California Savings and Loan Case Study* // The Appraisal Journal. – 1993. – October. – P. 524–532.
8. FINGLETON B. *A generalized method of moments estimator for a spatial model with moving average errors, with application to real estate prices* // Empirical Economics. – 2008. – No. 34. – P. 35–57.
9. MÖLLER J. *Regional variations in the price of building land: a spatial econometrics approach for West Germany* // The Annals of Regional Science – 2009. – No. 43(1). – P. 113–132.

LOCATION FACTORS IN REAL ESTATE MASS APPRAISAL: COMPARING APPROACHES

Anna Belyaeva, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (belyaevaav@gmail.com).

Abstract: In practice, the structure of a location-based model for real estate appraisal (type of the spatial autocorrelation, neighbor count) is unobvious. We develop the simulation-based methodology to compare accuracy of computer-assisted mass appraisal (CAMA) routines. Then we compare routines differing in the form of location information accounting and build the best routine selection rule basing on spatial autocorrelation type in source data. We also provide routine robustness comparison.

Keywords: computer-assisted real estate mass appraisal, spatial autoregressive model, center of influence, simulation model, robustness.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии С.А. Баркаловым*

*Поступила в редакцию 22.11.2014.
Опубликована 31.01.2015.*

УДК 519.179.2

ББК 22.176 + 65.23

АНАЛИТИКО-ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ

Иванов Н. Н.¹

(ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва)

Для обобщенного стохастического сетевого графика с заданной многомерной плотностью распределения времен прохождения дуг предложена методика аналитико-имитационного моделирования, имеющего целью вычисление вероятностей реализации всех критических путей, функции распределения и первых двух моментов времени выполнения графика. Методика основана на построении систем неравенств, описывающих соотношения между временами прохождения дуг.

Ключевые слова: стохастический сетевой график, критический путь, моменты распределения времени прохождения путей, метод Монте-Карло.

1. Введение

Сетевые графики (графы), существующие уже более полувека (PERT, [6]), служат для моделирования сложных взаимосвязанных временных процессов, таких как выполнение проектной документации, строительство зданий, сборочных процессов, процессов выполнения в реальном времени управляющих программ в вычислительных системах и т.п. Созданные первоначально в предположении о том, что времена прохождения отдельных дуг (activity), входящих в сетевой график, являются

¹ Николай Николаевич Иванов, доктор технических наук, доцент (ivanov.nni@yandex.ru).

детерминированными величинами, в настоящее время они рассматриваются в более общих предположениях, связанных со случайными временами прохождения дуг с известными распределениями [2]. Такие графы получили название стохастических сетевых графиков (Stochastic Networks).

В отличие от классического понятия стохастического сетевого графика, в работе рассматривается его обобщенный вариант, названный обобщенным стохастическим сетевым графиком (ОССГ) и имеющий своим отличием допущение в качестве дисциплины возникновения события (возбуждения некоторой вершины), помимо стандартной, при которой событие наступает после прохождения всех дуг, входящих в соответствующую данному событию вершину (дисциплина «И»), альтернативной дисциплины «ИЛИ», которой соответствует возбуждение вершины в результате прихода первой (по времени) из входящих в нее дуг.

В литературе сетевые графики, подобные рассматриваемым в статье, носят название альтернативных сетевых моделей (АСМ). Подробное описание их классификации в зависимости от дисциплин возникновения в них событий содержится, например, в [2], в соответствии с которой рассматриваемые в работе сетевые графики содержат вершины типов $\tilde{X}$ и $\tilde{\beta}$.

Вторым отличием ОССГ от классического сетевого графика является допущение о том, что случайные времена прохождения дуг могут быть взаимозависимыми и описываться, соответственно, многомерными распределениями.

Для разработчиков параллельных вычислительных систем (ВС), управляющих объектами в реальном времени по программам, структурированным в виде ОССГ, методика может служить инструментом анализа временной надежности при условии, что в ВС имеется достаточное число параллельных каналов, необходимое для выполнения управляющих программ без образования очередей. При этом по совокупности критических путей в ОССГ, вероятностей и функций распределения времени их прохождения может быть решен вопрос о минимальном времени выполнения программы с вероятностью еди-

ница, о максимальном времени выполнения программы с заданной вероятностью, а также найдены числовые вероятностные характеристики времени выполнения программ.

Для ОССГ время его выполнения является случайной величиной, закон распределения и числовые вероятностные характеристики которой могут быть оценены с помощью имитационных методов в совокупности со статистическими методами обработки результатов имитации. В работе в продолжение подхода, изложенного в [4] по отношению к стохастическим сетевым графикам, в которых на входе в вершины наличествует только дисциплина «И», предлагается аналитико-имитационный метод нахождения функции распределения времени выполнения и числовых вероятностных характеристик ОССГ, основанный на достаточном для этих целей уровне его детализации в виде совокупности всех его путей. При этом не требуется построение глобальной имитационной модели ОССГ, функционирующей в непрерывном модельном времени.

2. Основы анализа модели

На графе ОССГ выделим вершины, в которые входит более одной дуги. Такие вершины назовем *узлами* ОССГ. Путь на графе ОССГ – это последовательность дуг, начинающаяся в (единственной) начальной вершине и заканчивающаяся в (единственной) заключительной, при этом каждая дуга пути, кроме дуги, исходящей из начальной вершины, является последованием предыдущей. Любой путь на графе ОССГ проходит по крайней мере через один узел.

Критическим называется путь **П**, который реализуется без временных задержек, т.е. инициализация очередной дуги происходит немедленно по окончании прохождения предшествующей, при этом время прохождения этого пути определяет время выполнения всего ОССГ (его завершение означает, что в ОССГ произошло заключительное событие, на рис. 1 этому событию соответствует вершина, помеченная номером 5).

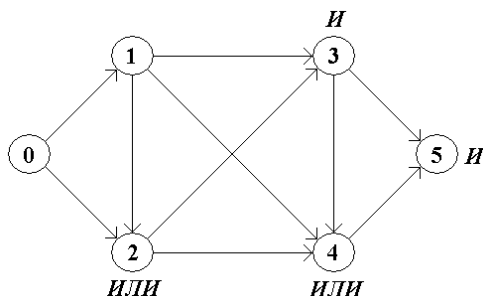


Рис. 1. Пример ОССГ

В ОССГ, в отличие от детерминированных сетевых графиков, возможно существование нескольких критических путей, реализуемых с определенной вероятностью, но во время одной реализации возможен только *единственный* критический путь (исключение можно сделать лишь для графиков с дискретными распределениями). При этом все остальные дуги, не входящие в критический путь Π , проходятся параллельно («на фоне») дугам из Π так, что завершение прохождения дуг-предшественников любого узла, через который проходит путь Π , произойдет либо раньше для узлов типа «И», либо позже для узлов типа «ИЛИ», чем будет пройдена дуга-предшественник этого узла, принадлежащая Π .

Критический путь определяет время окончания выполнения всего ОССГ, поэтому, зная вероятности p_i , с которыми реализуются все критические пути, и условные (при условии, что выбранные пути являются критическими) математические ожидания μ_i и вторые моменты a_{2i} времени их выполнения, можно вычислить все интересующие пользователей числовые характеристики ОССГ:

$$\mu = \sum_i p_i \mu_i, \quad a_2 = \sum_i p_i a_{2i}, \quad d = a_2 - \mu^2.$$

Для ОССГ, приведенного на рис. 1, множество всех путей $\tilde{\Pi}$ образуется следующими цепочками дуг, проходящих через вершины, обозначенные их номерами:

- 1) 0, 1, 2, 3, 4, 5;

- 2) 0, 1, 2, 3, 5;
- 3) 0, 1, 2, 4, 5;
- 4) 0, 1, 3, 4, 5;
- 5) 0, 1, 3, 5;
- 6) **0, 1, 4, 5;**
- 7) 0, 2, 3, 4, 5;
- 8) **0, 2, 3, 5;**
- 9) 0, 2, 4, 5.

В этом списке выделены пути 6 и 8, которые ниже будут служить примером применения предлагаемой методики анализа ОССГ.

Определение. Для всякого пути $\Pi \in \tilde{\Pi}$ будем называть его замыкающей любую последовательность непосредственно связанных друг с другом дуг, не принадлежащих пути Π , которая начинается от какой-либо вершины пути Π и заканчивается дугой, ведущей в узел, через которую проходит путь Π .

Заметим, что замыкающими в соответствии с введенным определением могут стать целые пути, у которых с Π нет общих дуг и узлов, кроме конечного.

Для пути 8 замыкающими будут пути: (01, 12), (01, 14, 45), (24, 45), (34, 45) и (01, 13) (здесь дуги обозначены номерами вершин, соединяемых ими).

Суть предлагаемой методики состоит в том, что для каждого пути может быть составлена система неравенств, выполнение которой при заданном наборе значений времен прохождения дуг является необходимым и достаточным условием realizуемости данного пути в качестве критического. Для рассматриваемого пути 8 эти неравенства сведутся к следующей системе, в которой совокупность неравенств, охваченных слева квадратной скобкой, соответствует всем возможным вариантам замыкающих, проходящих через вершину 4 типа «ИЛИ»:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{02} < x_{01} + x_{12}, \\ \left[\begin{array}{l} x_{23} + x_{35} > x_{24} + x_{45}, \\ x_{02} + x_{23} + x_{35} > x_{01} + x_{14} + x_{45}, \\ x_{35} > x_{34} + x_{45}, \\ x_{02} + x_{23} > x_{01} + x_{13}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Здесь x_{ij} обозначает время прохождения дуги, исходящей из вершины с номером i и входящей в вершину с номером j . Слева в неравенствах фигурируют суммы времен прохождения дуг замыкаемого участка рассматриваемого пути, а справа – суммы времен прохождения дуг его замыкающей. Знак неравенства при этом соответствует типу замыкаемого узла.

Свод правил, по которым составляются неравенства для всего ОССГ, состоит из следующих пунктов:

1) Все системы и совокупности составляются для каждого пути.

2) Для каждого пути выявляются узлы, через которые он проходит.

3) Для каждого узла находятся все замыкающие, в него входящие.

4) Определяются группы замыкающих, не содержащих узлов, а также группы замыкающих, проходящих через каждый узел, ближайший к узлу, на котором происходит замыкание.

5) Для каждой такой группы составляются системы или совокупности неравенств, регламентирующих временные соотношения между замыкающими и замыкаемыми участками пути, по следующим правилам:

– неравенства, которые определяются замыкающими, не содержащими узлов, объединяются в систему;

– если типы замыкаемого узла и узла, ближайшего для данной группы совпадают, то неравенства, определяемые замыкающими из этой группы, объединяются в систему, в противном случае неравенства объединяются в совокупность.

6) Для замыкающих некоторой группы находятся узлы, ближайшие к уже рассмотренному узлу, и для них повторяются действия в соответствии с п.п. 4–5 в предположении, что пред-

шествующий узел проходится немедленно в результате прихода в него дуги, являющейся продолжением последовательностей дуг, которые входят в группу. В результате внутри системы или совокупности могут образоваться подсистемы или подсовокупности.

7) Данные действия проводятся до тех пор, пока новых узлов у замыкающих не окажется.

8) Все структуры неравенств для каждого узла, на котором происходит замыкание, и для всего пути объединяются в общую систему с учетом правил: система систем есть система, совокупность совокупностей есть совокупность. Для всего ОССГ построенные таким образом для отдельных путей системы или совокупности объединяются в совокупность.

Пункты 4–7 этих правил можно считать корректными на основе следующих рассуждений. Ниже под длиной участка некоторого пути подразумевается время его прохождения без задержек в промежуточных вершинах.

Пусть некоторая замыкающая L пути Π , входящая в узел замыкания Y_1 , содержит в себе узел Y_2 . Тогда замыкающими пути Π будут также все последовательности дуг, исходящие из вершин пути Π , входящие в Y_2 и имеющие общее продолжение с L . Обозначим это множество замыкающих через M .

Утверждение. 1) Если узлы Y_1 и Y_2 – разноименные, то неравенства, определяемые всеми замыкающими, входящими в M , образуют совокупность.

2) Если узлы Y_1 и Y_2 – одноименные, то неравенства, определяемые всеми замыкающими, входящими в M , образуют систему.

Доказательство см. в приложении.

Проиллюстрируем введенные правила на ряде примеров.

Так, выше для пути 8 в приведенной системе первое неравенство соответствует узлу 2, совокупность соответствует узлу 5 и нижнее неравенство – узлу 3.

Рассмотрим структуру неравенств, составленную для узла 4 типа «ИЛИ», входящего в путь 6 (01, 14, 45). В данный узел входят пять замыкающих: (02, 24), (12, 24), (02, 23, 34), (12, 23, 34) и (13, 34). Первых две замыкающих в этом ряду

проходят только через узел 2 типа «ИЛИ» и по этой причине в соответствии с утверждением, приведенным выше, образуют систему

$$\begin{cases} x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{24}, \\ x_{14} < x_{12} + x_{24}. \end{cases}$$

Следующие три замыкающих проходят через узел 3 типа «И» (ближайший к рассматриваемому узлу 4 типа «ИЛИ») и, следовательно, определяют неравенства, входящие в совокупность

$$\begin{cases} x_{14} < x_{13} + x_{34}, \\ x_{14} < x_{12} + x_{23} + x_{34}, \\ x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{23} + x_{34}. \end{cases}$$

Но при этом две последних замыкающих (12, 23, 34) и (13, 34) проходят также через узел 2 типа «ИЛИ», находящийся ниже узла 3, что заставляет внутри совокупности образовать подсистему, поскольку типы узлов 2 и 4 совпадают:

$$\begin{cases} x_{14} < x_{13} + x_{34}, \\ \begin{cases} x_{14} < x_{12} + x_{23} + x_{34}, \\ x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{23} + x_{34}. \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, для узла 4 пути 6 структура неравенств будет таковой:

$$\begin{cases} x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{24}, \\ x_{14} < x_{12} + x_{24}, \\ \begin{cases} x_{14} < x_{13} + x_{34}, \\ \begin{cases} x_{14} < x_{12} + x_{23} + x_{34}, \\ x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{23} + x_{34}. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Теперь составленные для всех улов структуры неравенств объединяются в систему, выполнение которой является необходимым и достаточным условием реализации выбранного пути 6 в качестве критического:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{24}, \\ x_{14} < x_{12} + x_{24}, \\ \left[\begin{array}{l} x_{14} < x_{13} + x_{34}, \\ \left\{ \begin{array}{l} x_{14} < x_{12} + x_{23} + x_{34}, \\ x_{01} + x_{14} < x_{02} + x_{23} + x_{34}, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_{01} + x_{14} + x_{45} > x_{02} + x_{23} + x_{35}, \\ x_{14} + x_{45} > x_{12} + x_{23} + x_{35}, \\ x_{14} + x_{45} > x_{13} + x_{35}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Следует отметить, что в частном случае существования в ОССГ только узлов типа «И» или «ИЛИ» структура неравенств существенно упростится, поскольку для каждого пути неравенства будут образовывать систему без совокупностей, как это имело место в [4].

3. Аналитико-имитационное моделирование ОССГ

Построенная в соответствии с введенными правилами совокупность систем неравенств может служить основой для различных вычислительных и имитационных процедур с целью нахождения параметров ОССГ, интересующих пользователя. К числу таковых может быть, в частности, отнесено: а) вычисление функции распределения времени выполнения ОССГ при заданных законах распределения времен прохождения как отдельных дуг в случае независимости этих времен, так и в случае задания многомерных распределений для времен прохождения некоторых множеств дуг вплоть до многомерной функции времен распределения всего набора дуг, б) вычисление числовых вероятностных характеристик – вероятности реализации критических путей, математического ожидания и среднеквадратического отклонения, как времени прохождения отдельных критических путей, так и всего ОССГ в целом.

В этом разделе рассматривается методика вычисления соответствующих вероятностных характеристик применительно к случаю зависимости времен прохождения всех дуг, входящих в

сетевой график. Это означает, что задана соответствующая многомерная функция распределения времени прохождения дуг $F(\bar{u}) = F(u_1, \dots, u_m)$ (или плотность $f(\bar{u})$), где m – общее число дуг сетевого графика. Более простые случаи зависимости времен прохождения дуг могут рассматриваться аналогичным образом.

Используя алгоритм построения множества $\tilde{\Pi}$ всех путей орграфа, упорядочим их в произвольном порядке.

Выбирая некоторый (i -й) путь $\Pi \in \tilde{\Pi}$, рассмотрим сумму случайных времен прохождения всех его дуг:

$$\zeta = \sum_j \zeta_j.$$

Пусть $D \subset R_+^l = \{(x_1, x_2, \dots, x_l) : x_k \in R, x_k \geq 0\}$ – область, в которой отличны от нуля маргинальные плотности распределений времен прохождения дуг, входящих во все замыкающие пути Π (нумерация работ произвольная).

Отсюда, если $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)$ представляет собой случайный вектор в области D , составленный из случайных времен прохождения дуг, входящих во все замыкающие пути Π , то фиксируя его значение $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l) \in D$, следует считать, что вероятность p_i реализации пути Π зависит от $\bar{x}$: $p_i = p_i(\bar{x})$. Тогда

$$p_i F_i(z | \bar{\xi} = \bar{x}) = p_i(\bar{x}) F_{\zeta}(z | \bar{\xi} = \bar{x}).$$

Взвешенная условная функция распределения $p_i(\bar{x}) F_{\zeta}(z | \bar{\xi} = \bar{x})$ суммы $\zeta = \sum_j \zeta_j$ случайных величин $\zeta_1, \dots, \zeta_s$

может быть вычислена в соответствии с равенством

$$(*) \quad p_i(\bar{x}) F_{\zeta}(z | \bar{\xi} = \bar{x}) = \int_B f(\bar{y}, \bar{x}) d\bar{y},$$

где область B определяется следующими условиями.

Во-первых, область B должна содержаться в области

$$A = \{\bar{y} : \sum_j y_j < z, y_j \geq 0\} \subset R_+^s,$$

по которой определяется распределение суммы

$$\zeta = \sum_j \zeta_j .$$

Во-вторых, на область B накладываются ограничения, определяемые замыкающими в виде соответствующей данному пути структуры неравенств.

Используя теперь интегральную формулу полной вероятности, из равенства (*) получаем:

$$(1) \quad p_i F_i(z) = \iint_{D B} f(\bar{y}, \bar{x}) d\bar{y} d\bar{x} .$$

Вычисление получившихся интегралов в конечном виде возможно только в некоторых простейших случаях. В общем случае вычисления интегралов целесообразно проводить с привлечением метода Монте-Карло. Один из возможных вариантов применения этого метода при вычислении интегралов, подобных (1), описан в [4]. Здесь отметим лишь особенность этой методики, заключающуюся в том, что для ее реализации не требуется использование генераторов случайных векторов в соответствии с заданной многомерной плотностью распределения.

Из соотношения (1) может быть получено значение вероятности p_i реализации каждого пути в ОССГ: достаточно выбрать по возможности минимальное значение $z = T$, для которого вычисление $p_i F_i(z)$ в соответствии с (1) приводит к равенству $p_i F_i(T) = p_i$. Такое значение $z = T$ существует, если времена прохождения дуг заданы на конечных промежутках. Например, можно положить T равным сумме всех правых концов промежутков, на которых определены маргинальные плотности распределений времен прохождения всех дуг рассматриваемого пути.

Вычисление моментов распределения $F(z)$ может проводиться несколькими способами: во-первых, численным интегрированием по значениям функции $F(z)$, если она вычислена в достаточном числе точек, например, с помощью формулы Симпсона в соответствии с равенствами

$$\mu = \int_0^T [1 - F(z)] dz = T - \int_0^T F(z) dz ,$$

$$a_2 = 2 \int_0^T z [1 - F(z)] dz = T^2 - 2 \int_0^T z F(z) dz .$$

Во-вторых, имитационным методом с использованием генераторов случайных векторов по заданным плотностям распределения. В случае независимых времен прохождения дуг создание такого генератора не вызывает трудностей. Для многомерных плотностей в общем случае можно использовать метод исключения [3], что потребует нахождения верхней грани (лучше точной, что не всегда просто) многомерной плотности. Однако при большом числе переменных координат случайного вектора эффективность этого метода не слишком велика и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, где n – размерность вектора.

Для нормальных плотностей, заданных значениями математических ожиданий компонент и положительно определенными корреляционными матрицами, достаточно воспользоваться методом, основанным на построении изотропного вектора. Эффективность метода также стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому целесообразно генерацию вектора проводить, разбивая множество координат вектора на группы. Рекомендовано разбивать это множество на пары [3, 5]. Отметим также, что эффективность генерации несколько снижается при необходимости отсеечения «крыльев» гауссовых кривых с целью недопущения генерации отрицательных координат нормальных векторов, а также при введении некоторого уровня значимости с целью ограничения промежутков, на которых задаются координаты этих векторов. Однако следует отметить, что подобный метод генерации случайных векторов не может быть использован при произвольных многомерных распределениях.

Координаты каждого случайного вектора, полученного в результате генерации одним из описанных методов, подставляются в структуры неравенств, составленных для каждого пути в ОССГ. Если подстановка происходит в соответствии с некоторым установленным порядком для путей, то после того как выясняется, что для некоторого пути неравенства выполняются, дальнейшие подстановки для других путей становятся излишними. Это обусловлено тем, что выполнение неравенств является

ся необходимым и достаточным условием реализуемости этого пути в качестве критического, и в силу единственности критического пути в каждой реализации ОССГ. По этой причине целесообразно устанавливать такой порядок рассмотрения путей, при котором на первых позициях стоят пути с наибольшей вероятностью. Можно, например, установить этот порядок, проведя предварительные вычисления с помощью соотношения (1) вероятностей критических путей при небольшом числе статистических «прогонов».

4. Пример

В качестве примера применения предложенного метода рассмотрим моделирование ОССГ, представленного на рис. 1. Моделирование производилось для многомерных нормальных распределений, заданных наборами средних значений и корреляционными матрицами при уровнях значимости, определяемых «правилом трех сигм» (m_{ij} представляют собой в условных единицах математические ожидания времен прохождения дуг, соединяющих вершины с номерами i и j):

$$m_{01} = m_{12} = m_{23} = m_{34} = m_{35} = m_{45} = 3,$$

$$m_{02} = m_{14} = m_{24} = 4,243,$$

$$m_{13} = 6,$$

$$K_{01,02,23} = K_{34,24,45} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 2 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K_{12,13,14,35} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0,5 & 0,5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -0,5 & -2 & 2 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для всех десяти векторов использовалось моделирование с генерацией пяти двумерных изотропных векторов. Эти векторы позволили моделировать один четырехмерный и два трехмерных нормально распределенных вектора с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$ с независимыми компонентами, из которых затем с помо-

щью линейных преобразований вида $X = AY + m$ [3], определяемых с помощью корреляционных матриц, строились соответствующие векторы из случайных времен прохождения дуг ОССГ. Треугольные матрицы преобразований имели вид:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5\sqrt{7} & 0 \\ -0,5 & -0,5/\sqrt{7} & 0,5\sqrt{3-1/7} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,5\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0,5 & -\sqrt{3}/6 & 0,5 & 0,5\sqrt{5/3} \end{bmatrix}.$$

Применение альтернативного метода исключения сопровождалось предварительным построением многомерных нормальных плотностей по соответствующим векторам математических ожиданий и корреляционным матрицам, которое можно осуществлять, например, с использованием алгоритма, приведенного в [1]. Для таких многомерных плотностей легко определяются их точные верхние грани.

Результаты моделирования, полученные в среде Delphi 7 на ПК, оборудованном процессором Intel Core i3 2100, 3,1 ГГц, ОЗУ 4 ГБ представлены в таблице 1. Время счета при числе прогонов $N = 5 \cdot 10^6$ составило величины 5 с при генерации нормальных векторов с помощью изотропных векторов (второй столбец таблицы) и 80 с при использовании метода исключения (третий столбец). Значения числовых параметров ОССГ оказались в обоих случаях равными и составили величины $m = 12,515$ и $\sigma = 1,934$ условных единиц времени.

Таблица 1. Значения вероятностей критических путей

Путь	p_i	p_i
1	0,6817	0,6816
2	0,0024	0,0025
3	0,0922	0,0921
4	0,0440	0,0440
5	0,0185	0,0184
6	0,0029	0,0029
7	0,0984	0,0984
8	0,0584	0,0586
9	0,0015	0,0015

Как видно из таблицы 1, результаты моделирования практически совпадают, однако генерация случайных векторов первым способом показала себя более эффективной, что и отразилось на затрачиваемом времени счета.

Отметим также, что непосредственное имитационное моделирование рассматриваемого ОССГ, проводившееся с целью получения только оценок величин m и σ без вычисления оценок вероятностей критических путей, математических ожиданий и вторых моментов времени их прохождения, требовало практически одно и то же время счета (при одинаковых методах генерации случайных векторов), что и при использовании метода моделирования, предложенного в статье. Это указывает на то, что основное время счета в обоих случаях тратилось на моделирование случайных векторов.

5. Заключение

На основе предлагаемой в работе детализации ОССГ в виде множества всех его путей и процедуры построения систем и совокупностей неравенств, регламентирующих соотношения времен прохождения дуг ОССГ в рамках каждого пути, показано, как может производиться аналитическое и имитационное исследование ОССГ с целью получения интересующих пользо-

вателя его вероятностных параметров. Изложенная методика анализа ОССГ построена на регулярной основе, позволяющей широко использовать машинные средства для поиска критических путей, составления для каждого пути множества замыкающих и соответствующих им структур неравенств, а также проводить численный анализ получаемого при этом функционального описания исследуемого ОССГ.

Автор выражает благодарность О.П. Кузнецову и его сотрудникам за ценные замечания, сделанные ими при обсуждении работы.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. 1) Пусть узел Y_1 типа «И», а узел Y_2 типа «ИЛИ». Событие, связанное с узлом Y_2 , происходит, когда в него входит первой по времени некоторая замыкающая $\tilde{L}$ из множества M . Длина l участка пути Π , отсчитываемая от начальной вершины до узла Y_1 , будет удовлетворять условию $l \geq l'$, где l' – длина $\tilde{L}$, также отсчитываемая от начальной вершины. Но для других замыкающих из множества M аналогичные неравенства выполняться не обязаны, поскольку их длины, отсчитываемые от начальной вершины, больше l' . Таким образом, из всех неравенств, определяемых замыкающими из множества M , во внимание должно приниматься только одно, определяемое замыкающей $\tilde{L}$. Это означает, что все неравенства, определяемые замыкающими из множества M , должны рассматриваться под знаком совокупности.

Пусть теперь узел Y_1 типа «ИЛИ», а узел Y_2 типа «И» и $\tilde{L}$ – замыкающая, приходящая последней по времени в узел Y_2 . Длина l участка пути Π , отсчитываемая от начальной вершины до узла Y_1 , будет удовлетворять условию $l \leq l'$, где l' – длина $\tilde{L}$, также отсчитываемая от начальной вершины. Но для других замыкающих из множества M аналогичные неравенства выполняться не обязаны, поскольку их длины, отсчитываемые от начальной вершины, меньше l' . Таким образом, из всех неравенств, определяемых замыкающими из множества M , во вни-

мание должно приниматься только одно, определяемое замыкающей $\tilde{L}$. Это означает, что все неравенства, определяемые замыкающими из множества M , должны рассматриваться под знаком совокупности.

2) Пусть оба узла Y_1 и Y_2 типа «ИЛИ». Событие, связанное с узлом Y_2 , происходит, когда в него входит первой по времени некоторая замыкающая $\tilde{L}$ из множества M . Длина l участка пути Π , отсчитываемая от начальной вершины до узла Y_1 , будет удовлетворять условию $l \leq l'$, где l' – длина $\tilde{L}$, также отсчитываемая от начальной вершины. Но длины l'' аналогичных участков всех остальных замыкающих из множества M могут быть только больше l' , и, следовательно, всегда $l \leq l''$. Это означает, что должны выполняться все неравенства, определяемые замыкающими из множества M , и, следовательно, они должны рассматриваться под знаком системы.

Пусть теперь оба узла Y_1 и Y_2 типа «И». Событие, связанное с узлом Y_2 , происходит, когда в него входит последней некоторая замыкающая $\tilde{L}$ из множества M . Длина l участка пути Π , отсчитываемая от начальной вершины до узла Y_1 , будет удовлетворять условию $l \geq l'$, где l' – длина $\tilde{L}$, также отсчитываемая от начальной вершины. Но длины l'' аналогичных участков всех замыкающих из множества M могут быть только меньше l' , и, следовательно, всегда $l \geq l''$. Это означает, что должны выполняться все неравенства, определяемые замыкающими из множества M , и они должны рассматриваться под знаком системы. Утверждение доказано.

Литература

1. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Теория вероятности и ее инженерные приложения*. – М.: Наука, 1988. – 480 с.
2. ГОЛЕНКО-ГИНЗБУРГ Д.И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками*. – Воронеж: Научная мысль, 2010. – 283 с.

3. ЕРМАКОВ С.М., МИХАЙЛОВ Г.А. *Статистическое моделирование*. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
4. ИВАНОВ Н.Н., ШАСТУН В.В. *Определение точных верхних оценок времени выполнения сложных наборов задач в управляющих параллельных вычислительных системах* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №9. – С. 174–184.
5. МАРТЫШЕНКО С.Н., МАРТЫШЕНКО Н.С., КУСТОВ Д.А. *Моделирование многомерных данных и компьютерный эксперимент* // Техника и технология. – 2007. – №2. – С. 47–52.
6. CLARK C.E. *The PERT model for the distribution of an activity* // Operations Research. – 1962. – Vol. 10(3), – P. 405–406.

ANALYTICAL AND SIMULATION MODELS OF GENERALIZED STOCHASTIC NETWORKS

Nikolay Ivanov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, ivanov.nni@yandex.ru).

Abstract: For a generalized stochastic network schedule with a given multi-dimensional distribution of arcs passage time we propose the analytical- and simulation-based routines to calculate the probability of all critical paths, the distribution function and the first two moments of the project completion time. The routines are based on a specially constructed system of inequalities binding the task completion times.

Keywords: stochastic network, critical path, moments of task completion time distribution, the Monte Carlo method.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым*

*Поступила в редакцию 13.11.2014.
Опубликована 31.01.2015.*

УДК 519.853.3

ББК 22.18

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ДИСКРЕТНОМ РЫНКЕ¹

Соловьев А. И.²

(Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова, Москва)

Рассмотрена многопериодная дискретная модель рынка, описываемого деревом сценариев без самопересечений. Инвестор максимизирует ожидаемую полезность потребления в течение конечного периода времени. Предлагаются декомпозиционные схемы решения задач оптимального потребления со степенной и логарифмической функциями полезности, которые позволяют свести решение основной задачи к решению нескольких однопериодных задач.

Ключевые слова: безарбитражный рынок, неполный рынок, задача оптимального потребления, дерево сценариев, динамическое программирование, выпуклое программирование.

Введение

Задача максимизации функции полезности на дискретных неполных рынках вызывает затруднения по нескольким причинам. Сложность задач выпуклого программирования очень быстро увеличивается с ростом числа переменных и ограничений. В случае задач оптимального потребления это объясняется свободой выбора портфеля ценных бумаг и неопределенностью поведения финансового рынка. Таким образом, решение рассматрива-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-91163а. Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-мс.н., доценту В. В. Морозову за помощь в написании данной работы.

² Алексей Игоревич Соловьев, аспирант, (alex.solo.88@mail.ru).

емых задач в изначальной постановке является неэффективным. Мартингалльный подход позволяет сначала определить оптимальный план потребления и затем соответствующие этому плану портфели, но неполнота рынка усложняет поиск оптимального потребления.

Проблемы оптимального потребления на дискретных рынках рассматривались во многих работах. Плиска [6] разработал критерий допустимости процесса потребления на полных рынках. Он предложил три основных метода решения задач оптимального потребления: динамический и мартингалльный подходы и метод введения фиктивных бумаг. Хэ и Пирсон [3], используя крайние точки множества цен, обеспечивающих отсутствие арбитража, свели основную динамическую задачу к статической. Бушар и Фам [1] рассмотрели дискретные неполные финансовые рынки с пропорциональными транзакционными издержками. Оптимальные процессы потребления и инвестирования найдены, опираясь на теорию двойственности. Эренфрид [2] нашел аналитический вид решения задач для моделей потребления с логарифмической, степенной и экспоненциальной функциями полезности. Он предполагает рынок полным, дисконтирующий фактор определяется состоянием рынка. В работе используются марковские процессы принятия решений.

Дискретная задача оптимального потребления с возможностью инвестирования близка задаче хеджирования платежного обязательства [5]. Модель финансового рынка, описанная в настоящей статье, введена Кингом в работе [4]. Им доказан критерий существования оптимального решения в задачах максимизации полезности.

Раздел 2 данной работы посвящен описанию модели. В разделе 3 формулируется основная задача, и устанавливаются ее эквивалентные формы. Описан метод динамического программирования для нахождения оптимального потребления в задачах со степенной и логарифмической функциями полезности.

1. Описание модели

На рынке обращаются $d + 1$ видов ценных бумаг, имеющих номера $j = 0, 1, \dots, d$. Актив с номером 0 имеет положительную стоимость и считается безрисковым, он выбирается дисконтирующим. Пусть неотрицательный вектор $X_n = (X_n^0, \dots, X_n^d)$ обозначает дисконтированные цены бумаг по отношению к безрисковому активу в состоянии рынка n . Его компонента X_n^0 равна 1 для любого состояния n .

Множество состояний $\mathcal{N}$ разбито на попарно непересекающиеся подмножества состояний $\mathcal{N}_t$, в которые рынок может перейти в моменты времени $t = 0, \dots, T$. Множество $\mathcal{N}_0$ состоит из единственной корневой вершины дерева, обозначаемой 0. Пусть $a(n)$ обозначает единственную вершину из множества $\mathcal{N}_{t-1}$, предшествующую вершине $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \dots, T$. Положим также $a^0(n) = n$, $a^s(n) = a^{s-1}(a(n)) \forall n \in \mathcal{N}_t$, $s = 1, \dots, t$. Множество всех прямых потомков вершины $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T - 1$, обозначим через $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{N}_{t+1}$. Пусть $\mathcal{D}(n)$ – множество всех следующих за n вершин дерева. Рынок моделируется деревом без самопересечений. Это значит, что каждой концевой вершине (листу) дерева соответствует единственный путь, ведущий к ней из корневой вершины. Эти пути образуют вероятностное пространство элементарных событий Ω . Множество $\mathcal{N}_t$ делит пространство Ω на подмножества (события), определяемые вершинами $n \in \mathcal{N}_t$, и состоящие из всех путей, содержащих n . Совокупность этих событий порождает алгебру $\mathcal{F}_t$. При этом $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$.

Вероятностная мера $p = (p_n, n \in \mathcal{N})$ на Ω приписывает листьям дерева вероятности $p_n > 0$, $\sum_{n \in \mathcal{N}_T} p_n = 1$. Вероятности для всех промежуточных вершин определяются рекурсивно: $p_n = \sum_{m \in \mathcal{C}(n)} p_m$, $\forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Заметим, что $p_0 = 1$. Будем считать, что мера p задает истинные (статистические) вероятности событий. Она однозначно определяется по вероятностному распределению $p_T = (p_n, n \in \mathcal{N}_T)$.

Вероятностная мера $q = (q_n, n \in \mathcal{N})$ эквивалентная p

($q_n > 0, \forall n \in \mathcal{N}$) называется мартингальной, если

$$(1) \quad q_m X_m = \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q_n X_n, \quad \forall m \in \mathcal{N}_t, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Пусть Q – множество всех мартингальных мер. Будем рассматривать согласованные с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}$ процессы вида $b = \{b_t\}$, где случайная величина b_t принимает значения $b_n, n \in \mathcal{N}_t$, и, следовательно, $\mathcal{F}_t$ -измерима. Из (1) следует, что процесс приведенной стоимости $\{X_t^j\}$ каждой j -й бумаги является q -мартингалом.

Предположим, в каждом состоянии рынка $n \in \mathcal{N}$ инвестор формирует портфель $\theta_n = (\theta_n^0, \dots, \theta_n^d)$, где θ_n^j – количество бумаг j -го вида, $j = 0, 1, \dots, d$. Приведенная стоимость портфеля θ_n равна $X_n \cdot \theta_n$ – скалярное произведение векторов X_n и θ_n . Пусть $c_n \geq 0$ – объем средств, потребляемых инвестором в состоянии $n \in \mathcal{N}$. Стратегией инвестора назовем пару (c, θ) , где процесс потребления $c = \{c_t\}$ и портфельный процесс $\theta = \{\theta_t\}$ удовлетворяют условию самофинансирования

$$(2) \quad X_n \cdot \theta_{a(n)} = X_n \cdot \theta_n + c_n, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Пусть v – начальный капитал инвестора. Предположим, что его функция полезности $u(x)$ возрастает и строго вогнута. В этом случае инвестору следует тратить весь свой начальный капитал и использовать все конечные сбережения. Поэтому можно ограничиться стратегиями, удовлетворяющими условиям $v = X_0 \cdot \theta_0 + c_0$ и $X_n \cdot \theta_n = 0, \forall n \in \mathcal{N}_T$.

Говорят, что рынок допускает арбитражную возможность, если инвестор, не вкладывая средств в ценные бумаги, может не остаться должником в каждом из возможных состояний рынка и получить прибыль с ненулевой вероятностью. Известно [6], что на безарбитражных рынках существует мартингальная мера, и она единственна на полных рынках. В данной статье рассматриваются безарбитражные неполные рынки.

2. Основная задача

Инвестор выбирает стратегию, максимизирующую суммарную ожидаемую полезность потребления в течение T периодов

торгов. Сформулируем исходную задачу

$$(3) \quad \begin{cases} \max_{(c, \theta)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ X_n \cdot \theta_{a(n)} = X_n \cdot \theta_n + c_n, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 1, \dots, T \\ v = X_0 \cdot \theta_0 + c_0, \\ X_n \cdot \theta_n = 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Следующая теорема доказана в [6] для полных рынков.

Теорема 1. *Ограничения задачи (3) эквивалентны следующим:*

$$(4) \quad \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = v, \quad \forall q \in Q, \quad c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Доказательство. Возьмем произвольную мартингальную меру $q \in Q$ и домножим на q_n левые и правые части условия самофинансирования. Сложим все равенства системы ограничений, в результате имеем $\sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = v, \forall q \in Q$.

Обратно, пусть c удовлетворяет условиям (4). Покажем, что найдется процесс θ , удовлетворяющий ограничениям задачи (3). Система уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} -X_0 \cdot \theta_0 = -v + c_0, \\ X_n \cdot \theta_{a(n)} - X_n \cdot \theta_n = c_n, \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 1, \dots, T \\ X_n \cdot \theta_n = 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_T \end{cases}$$

разрешима относительно θ по альтернативе Фредгольма. Действительно, любая мартингальная мера $q \in Q$ является решением сопряженной к (5) однородной системы

$$(6) \quad \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} X_n q_n = X_m q_m, \quad \forall m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$$

и ортогональна правой части системы (5).

$$(c_0 - v) + \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} q_n c_n = \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n - v = 0.$$

Нетрудно показать, что любое решение (6) принадлежит линейной оболочке множества мартингальных мер и, поэтому, также ортогонально правой части системы (5). ■

Таким образом, задача (3) эквивалентна следующей:

$$(7) \quad \begin{aligned} & \max_c \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = v, & \forall q \in Q \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Введем обозначение для приведенной стоимости портфеля θ_n в состоянии $n \in \mathcal{N}$: $V_n \stackrel{\text{def}}{=} X_n \cdot \theta_n$. По принципу доказательства необходимости из условия самофинансирования (2) можно получить следующие выражения:

$$(8) \quad V_m = \sum_{n \in \mathcal{D}(m)} q(n|m) c_n, \quad \forall q(m) \in Q(m), \quad m \in \mathcal{N},$$

где $Q(m)$ – множество условных мартингальных мер $q(m) = (q(n|m), n \in \mathcal{D}(m))$. Преобразуем задачу (7), используя (8):

$$(9) \quad \begin{aligned} & \max_{(c, V)} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) \\ & \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) (V_n + c_n) = V_m, & \forall q(m) \in Q(m), \quad m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ V_0 + c_0 = v, \\ V_n = 0, & \forall n \in \mathcal{N}_T \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Равенства системы ограничений (7) эквивалентны системе

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} q_n c_n = v, \quad \forall q \in Q^{\text{ext}}.$$

Здесь, Q^{ext} – множество крайних точек замыкания $\overline{Q}$. Учитывая [5, Утверждение 3.1.], приходим к выводу, что первая группа ограничений задачи (9) выполнена для всех $q(m) \in Q^{\text{ext}}(m)$.

Замечание 1. Методы динамического программирования, описанные далее, позволяют установить оптимальное решение задачи (7). Таким образом, для нахождения оптимального портфельного процесса θ^* необходимо решить систему уравнений (5). Причем, определив стоимости портфелей V_n по формуле (8), решения θ_n^* можно найти отдельно для каждого состояния $n \in \mathcal{N}$.

2.1. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

В этом подразделе приведена динамическая схема решения задачи оптимального потребления для следующей функции полезности: $u(x) = x^\alpha / \alpha$, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$.

Целевая функция задачи (9) с учетом записи меры p через условные меры

$$p_n = \prod_{s=0}^{t-1} p(a^s(n) | a^{s+1}(n)), \forall n \in \mathcal{N}_t, t = 1, \dots, T.$$

принимает вид

$$\begin{aligned} Z &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n u(c_n) = u(c_0) + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{m \in \mathcal{N}_t} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p_n u(c_n) \\ &= u(c_0) + \sum_{n_1 \in \mathcal{N}_1} p(n_1 | 0) \left[u(c_{n_1}) + \sum_{n_2 \in \mathcal{C}(n_1)} p(n_2 | n_1) \right. \\ &\quad \times \left. \left[u(c_{n_2}) + \dots + \sum_{n_T \in \mathcal{C}(n_{T-1})} p(n_T | n_{T-1}) u(c_{n_T}) \right] \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$Z_m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p(n|m) u(c_n), & m \in \mathcal{N}_{T-1} \\ \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p(n|m) [u(c_n) + Z_n], & m \in \mathcal{N}_t, t = 0, \dots, T-2, \end{cases}$$

тогда $Z = u(c_0) + Z_0$.

Итак, метод динамического программирования для решения задачи (9) состоит в последовательном решении следующих задач для всех $m \in \mathcal{N}_t$, $t = T-1, \dots, 0$:

Вначале $\forall m \in \mathcal{N}_{T-1}$ и $\forall V_m \geq 0$ необходимо решить задачи

$$(10) \quad \begin{cases} Z_m^*(V_m) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_n, n \in \mathcal{C}(m))} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p(n|m) u(c_n) \\ \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) c_n = V_m, \quad \forall q(m) \in Q^{\text{ext}}(m) \\ c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{C}(m). \end{cases}$$

Далее, $\forall m \in \mathcal{N}_t$, $t = T - 2, \dots, 0$, $V_m \geq 0$:

(11)

$$Z_m^*(V_m) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_n, V_n, n \in \mathcal{C}(m))} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p(n|m) [u(c_n) + Z_n^*(V_n)]$$

$$\begin{cases} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) (V_n + c_n) = V_m, & \forall q(m) \in Q^{\text{ext}}(m) \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{C}(m). \end{cases}$$

Затем остается решить задачу

$$(12) \quad \begin{cases} Z^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(c_0, V_0)} [u(c_0) + Z_0^*(V_0)] \\ V_0 + c_0 = v, \\ c_0 \geq 0. \end{cases}$$

Данную схему можно значительно упростить, если воспользоваться однородностью максимумов $Z_m^*(V_m)$ по V_m для всех $m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$.

Теорема 2. Для степенной функции полезности оптимальное потребление в задаче (7) определяется по формулам

$$c_0^* = v / \left(1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)} \right),$$

$$c_n^* = \bar{c}_n^* c_m^* (\alpha Z_m^*(1))^{1/(1-\alpha)}, \quad \forall n \in \mathcal{C}(m), \quad m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T,$$

где $(\bar{c}_n^*, n \in \mathcal{C}(m))$ и $Z_m^*(1)$ – оптимальное решение и максимум в задачах (10) и (11) при $V_m = 1$. Максимум в задаче (7) равен $Z^* = v^\alpha \left(1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha} / \alpha$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathcal{N}_{T-1}$. Сделаем замену переменных $\bar{c}_n \stackrel{\text{def}}{=} c_n / V_m$, $\forall n \in \mathcal{C}(m)$. Легко видеть, что $u(c_n) = V_m^\alpha u(\bar{c}_n)$, $\forall n \in \mathcal{N}_T$, поэтому

$$(13) \quad Z_m^*(V_m) = V_m^\alpha Z_m^*(1),$$

где $Z_m^*(1)$ обозначает максимум в задаче (10) при $V_m = 1$.

Пусть $m \in \mathcal{N}_{T-k}$, где $k \in \{2, \dots, T\}$. Чтобы упростить решение устраним явную зависимость ограничений от переменных c_n для всех $n \in \mathcal{C}(m)$ с помощью замены $W_n \stackrel{\text{def}}{=} V_n + c_n$, $n \in \mathcal{N}$. С учетом замены и однородности (13) имеем

$$Z_m = \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p(n|m) [u(c_n) + (W_n - c_n)^\alpha Z_n^*(1)].$$

Точка максимума функции Z_m по $c_n \geq 0$ при фиксированных W_n , $n \in \mathcal{C}(m)$

$$c_n = W_n \left(1 + (\alpha Z_n^*(1))^{1/(1-\alpha)} \right)^{-1}.$$

Пусть $s_n \stackrel{\text{def}}{=} 1 + (\alpha Z_n^*(1))^{1/(1-\alpha)}$. Тогда $W_n = s_n c_n$ и $u(c_n) + (W_n - c_n)^\alpha Z_n^*(1) = u(c_n) (1 + (s_n - 1)^\alpha \alpha Z_n^*(1)) = s_n u(c_n)$. Поэтому $\forall m \in \mathcal{N}_{T-k}$, исключая переменные W_n , $n \in \mathcal{C}(m)$, задача (11) эквивалентно сводится к следующей задаче:

$$(14) \quad \begin{cases} Z_m^*(V_m) = \max_{(c_n, n \in \mathcal{C}(m))} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p(n|m) s_n u(c_n) \\ \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) s_n c_n = V_m, \quad \forall q(m) \in Q^{\text{ext}}(m) \\ c_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{C}(m). \end{cases}$$

Используя замену $\bar{c}_n \stackrel{\text{def}}{=} c_n/V_m$, $n \in \mathcal{C}(m)$, находим, что $Z_m^*(V_m) = V_m^\alpha Z_m^*(1)$, где $Z_m^*(1)$ – максимум в задаче (14) с $V_m = 1$.

Определяем оптимальное значение $Z_0^*(V_0) = V_0^\alpha Z_0^*(1)$ и переходим к решению задачи (12). С учетом условия $V_0 + c_0 = v$ максимум целевой функции $Z = u(c_0) + (v - c_0)^\alpha Z_0^*(1)$ по $c_0 \geq 0$ достигается при $c_0^* = v/s_0$.

Таким образом, оптимальное решение задачи (7) можно определить последовательно следующим способом:

$$c_0^* = v/s_0, \quad c_n^* = \bar{c}_n^* c_{a(n)}^* (s_{a(n)} - 1), \quad \forall n \in \mathcal{N}_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

где $s_n = 1 + (\alpha Z_n^*(1))^{1/(1-\alpha)}$, $\bar{c}_n^*$ – оптимальное решение задач (10) и (11) при $V_m = 1$. Максимум целевой функции исходной задачи равен $Z^* = u(c_0^*) + (v - c_0^*)^\alpha Z_0^*(1) = s_0 u(c_0^*) = v^\alpha \left(1 + (\alpha Z_0^*(1))^{1/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha} / \alpha$. ■

2.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

Теорема 3. *Оптимальный процесс потребления в задаче (7) с логарифмической функцией полезности является q -мартингалом при $q \in Q$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t = 0, \dots, T-1$. Согласно (8) задача (9) эквивалентна следующей задаче:
(15)

$$\begin{aligned} Z^* = \max_{(c, V_m, m \in \mathcal{N}_t)} & \left[\sum_{s=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} p_n \ln(c_n) \right. \\ & \left. + \sum_{m \in \mathcal{N}_t} \left(p_m \ln(c_m) + \sum_{n \in \mathcal{D}(m)} p_n \ln(c_n) \right) \right] \\ & \begin{cases} \sum_{s=0}^t \sum_{n \in \mathcal{N}_s} q_n c_n + \sum_{m \in \mathcal{N}_t} q_m V_m = v, & \forall q \in Q^{\text{ext}} \\ \sum_{n \in \mathcal{D}(m)} q(n|m) c_n = V_m, & \forall q(m) \in Q^{\text{ext}}(m), m \in \mathcal{N}_t \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

В частности, при $t = 0$ получаем задачу эквивалентную (7)

$$\begin{aligned} Z^* = \max_{(c, V_0)} & \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n \ln(c_n) \\ & \begin{cases} V_0 + c_0 = v, \\ \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} q_n c_n = V_0, & \forall q \in Q^{\text{ext}} \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Делаем замены переменных

$$\bar{c}_n \stackrel{\text{def}}{=} c_n / V_m, \quad n \in \mathcal{D}(m), \quad m \in \mathcal{N}_t, \quad W_n \stackrel{\text{def}}{=} V_n + c_n, \quad n \in \mathcal{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{D}(m)} p_n \ln(c_n) &= \sum_{n \in \mathcal{D}(m)} p_n [\ln(\bar{c}_n) + \ln(W_m - c_m)] \\ &= \sum_{n \in \mathcal{D}(m)} p_n \ln(\bar{c}_n) + p_m (T - t) \ln(W_m - c_m). \end{aligned}$$

Таким образом, целевая функция записывается так:

$$Z = \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} p_n \ln(c_n) + \sum_{m \in \mathcal{N}_t} \left[p_m (\ln(c_m) + (T-t) \ln(W_m - c_m)) + \sum_{n \in \mathcal{D}(m)} p_n \ln(\bar{c}_n) \right].$$

Для случая $t = 0$:

$$Z = \ln(c_0) + T \ln(v - c_0) + \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}} p_n \ln(\bar{c}_n).$$

При фиксированном W_m максимум целевой функции Z по c_m достигается при $c_m = W_m / (T - t + 1)$, так как ограничения задачи (15) после замены переменных от c_m не зависят. Преобразуем с учетом этих равенств первую группу ограничений задачи (9):

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) W_n &= W_m - c_m, \quad \forall q(m) \in Q(m), \quad m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T \\ \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) c_n &= c_m, \quad \forall q(m) \in Q(m), \quad m \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \end{aligned}$$

В результате, приходим к определению мартингального процесса (1). Таким образом, оптимальный процесс потребления c^* является q -мартингалом. ■

Теорема 3 позволяет провести декомпозицию исходной задачи на несколько однопериодных задач. Для этого нужно положить $c_0^* = v / (T + 1)$ и последовательно по $t = 1, \dots, T$ определить оптимальный процесс потребления c^* , решая задачи

$$\begin{aligned} \max_{(c_n, n \in \mathcal{C}(m))} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} p_n \ln(c_n) \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n \in \mathcal{C}(m)} q(n|m) c_n = c_m^*, & \forall q(m) \in Q^{\text{ext}}(m) \\ c_n \geq 0, & \forall n \in \mathcal{C}(m). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Литература

1. BOUCHARD B., PHAM H. *Optimal consumption in discrete-time financial models with industrial investment opportunities and nonlinear returns* // The Ann. of App. Prob. – 2005. – Vol. 15, № 4. – P. 2393-2421.
2. EHRENFRIED S. *Consumption-investment problems with state dependent discounting*: Doctoral dissertation. – University of Ulm, Germany, 2012. – 139 p.
3. HE H., PEARSON N. D. *Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: the finite-dimensional case* // Math. Fin. – 1991. – Vol. 1, № 3. – P. 1–10.
4. KING A. J. *Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims* // Math. Program. Ser. B. – 2002. – Vol. 91, № 3. – P. 543–562.
5. MOROZOV V. V., SOLOVIEV A. I. *On optimal partial hedging in discrete markets* // Optimization. – 2013. – Vol. 62, № 11. – P. 1403–1418.
6. PLISKA S. R. *Introduction to mathematical finance: discrete time models*: Malden, Massachusetts: Blackwell Publishers, 1997. – 276 p.

DECOMPOSITION OF CONSUMPTION-INVESTMENT PROBLEMS IN DISCRETE MARKETS

Alexey Soloviev, Lomonosov Moscow State University, Moscow,
post-graduate student (alex.solo.88@mail.ru).

Abstract: We consider a multi-period discrete model of an incomplete market evolving with respect to a non-recombining scenario tree. The investor maximizes expected utility of his or her consumption over a finite time horizon. Decomposition schemes are suggested for optimal consumption-investment problems with power-like and logarithmic utility functions. We introduce dynamic programming algorithms that reduce the original problem to the set of one-period problems.

Keywords: arbitrage-free markets, incomplete markets, consumption problems, scenario tree, dynamic programming, convex programming.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М. В. Губко*

Поступила в редакцию 16.09.2014

Дата опубликования 31.01.2015

УДК 656.225: 004.047
ББК 39.275

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ВАГОНОПОТОКОВ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАСЧЕТНЫХ ПЕРИОДОВ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Мишкурлов П. Н.¹

*(Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск)*

Представлена постановка задачи динамической оптимизации параметров вагонопотоков в железнодорожных транспортных узлах или на путях необщего пользования промышленных предприятий и пример её решения. Предложен алгоритм корректировки маршрутов движения вагонопотоков, выполненный на основе использования объектно-ориентированного подхода.

Ключевые слова: вагонопоток, железнодорожный транспортный узел, динамическое программирование, период оптимизации, оперативное управление, объектно-ориентированный подход.

1. Введение

Результаты анализа работы железнодорожного транспорта промышленных предприятий показывают, что в течение последних семи лет время нахождения железнодорожных вагонов на путях необщего пользования промышленных предприятий увеличилось в среднем на 20%. Также наблюдается усложнение структуры вагонопотоков в результате возникновения и развития компаний-операторов собственных вагонов и появления большого числа нерегулярных струй вагонопотоков малой мощности [8, 9]. Это приводит к возникновению потерь в среднем до 20–30 млн. рублей для предприятий со среднесуточным

¹ Павел Николаевич Мишкурлов, аспирант (mishkuroff@mail.ru).

вагонооборотом 2 тыс. вагонов в результате перепростоя вагонов и нерационального использования транспортной инфраструктуры [5, 6, 10, 11].

Основная причина возникновения подобных явлений заключается в том, что принятая в настоящее время форма организации управления вагонопотоками недостаточно точно в оперативном режиме учитывает усложнение их структуры [3].

Современным инструментом управления вагонопотоками являются методы динамической оптимизации [1, 4, 6]. Известный метод «динамического согласования» производства, транспорта и потребления основан на применении многоэтапного (многошагового) подхода при решении задачи оптимизации и представляет собой развитие содержательной постановки задачи линейного программирования в динамическую область, позволяет учитывать распределение объемов производства и потребления во времени, изменение запасов продукта в конечных и промежуточных пунктах [4]. Несовершенством методов динамического согласования является недостаточная точность решения задачи управления вагонопотоками на этапе оперативного планирования, если этапы оптимизации (расчетные периоды) имеют фиксированные границы (продолжительность). В случае возникновения на путях необщего пользования нерегулярных вагонопотоков, отличных от расчетных по мощности и времени обращения, использование фиксированных расчетных периодов приводит к ожиданию вагонопотоков следующего (текущего) периода (рис. 1). Задержки в принятии управленческого решения по продвижению нерегулярных вагонопотоков являются причиной увеличения времени оборота вагонов на путях необщего пользования промышленных предприятий.

Для повышения эффективности перевозочного процесса промышленного предприятия необходимо управлять вагонопотоками с момента их появления в железнодорожном транспортном узле до момента «вывода», учитывая возникновение нерегулярных вагонопотоков на этапе оперативного планирования перевозочного процесса. В качестве инструмента принятия решений по управлению вагонопотоками в таких условиях предлагается использовать разработанную математическую модель, основанную на усовершенствованном методе «динами-

ческого согласования» и учитывающую изменение длительности расчетных периодов оптимизации.

2. Постановка задачи динамической оптимизации с использованием расчетных периодов переменной длительности

Задача динамической оптимизации с использованием расчетных периодов переменной длительности формулируется следующим образом. Пусть $Gr = \{P, E\}$ есть связный, неориентированный и не имеющий петель граф, где $P = \{p_i \mid i = 1, \dots, m\}$ – множество вершин (m – количество вершин), $E = \{e_{ij} \mid i, j\}$ – множество дуг (e_{ij} – дуга транспортной сети от начальной вершины p_i до p_j), $[t, t_0]$ – расчетный период переменной длительности, $[0, T]$ – период оптимизации. Отображения $d_{ij}(t)$ и $d_i(t)$ будем называть резервом пропускной способности дуги и вершины соответственно на каждый момент времени расчетного периода, т.е. каждой дуге e_{ij} сопоставлено неотрицательное число $d_{ij}(t)$, называемое резервом пропускной способности дуги, а каждой вершине p_i сопоставлено неотрицательное число $d_i(t)$, называемое резервом перерабатывающей способности i -й вершины (рис. 2) [7].

Таким образом, $D_{ij}(t) = \{d_{ij}(t) \mid i = [1, n], j = [1, n]\}$ – множество резервов пропускных способностей дуг и $D_i(t) = \{d_i(t) \mid i = [1, n]\}$ – множество резервов перерабатывающих способностей вершин, где $d_{ij}(t), d_i(t) \in R^+$ есть значения резервов пропускных способностей дуги и i -й вершины, определенных на множестве действительных неотрицательных чисел. Тогда $G = \{P, E, D_{ij}, D_i\}$ есть транспортная сеть.

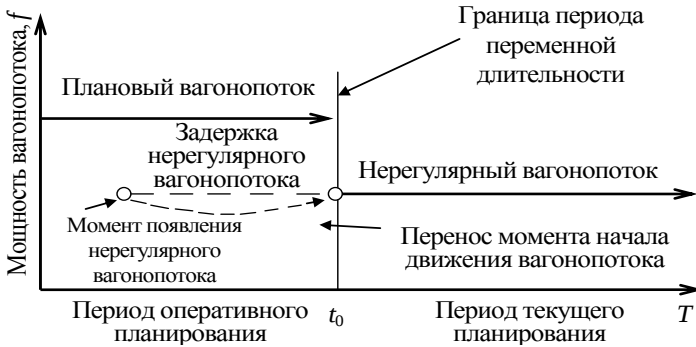


Рис. 1. Схема переноса вагонопотока

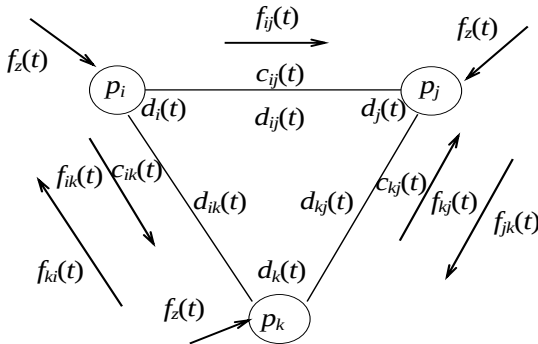


Рис. 2. Фрагмент транспортной сети.

$f_z(t)$ – внешний вагонопоток, входящий в транспортную сеть

Отображение $f_{ij}(t)$ будем называть вагонопоток в дуге i из начальной вершины p_i в конечную вершину p_j , а $F_{ij} = \{f_{ij}(t) \mid i = [1, n], j = [1, n]\}$ есть множество вагонопотоков в дугах сети G , где $f_{ij}(t) \in R^+$ – значения вагонопотока, определенные на множестве действительных неотрицательных чисел, $c_{ij}(t)$ – затраты на движение единицы мощности вагонопотока $f_{ij}(t)$.

Пусть величина мощности вагонопотока $f_{ij}(t)$ имеет случайный разброс, тогда в каждый момент отправления t оно будет $f_{ij}(t) \pm y_i(t)$, где $y_i(t)$ – случайная величина. В этом случае (рис. 4), если мощность вагонопотока будет $f_{ij}(t) - y_i(t)$, возникают потери

в результате нерационального использования транспортной инфраструктуры. Следовательно, маршрут движения вагонопотока целесообразно скорректировать, выбрать и учесть на этапе оперативного планирования маршрут, удовлетворяющий условию $f_{ij}(t) \leq d_{min}$, где d_{min} – граница поля допуска, т.е. минимальный резерв пропускной $d_{ij}(t)$ и перерабатывающей $d_i(t)$ способности дуг и вершин транспортной сети на каждом маршруте движения вагонопотока.

Однако в этом случае необходимо учитывать дополнительные затраты, связанные с корректировкой маршрута движения вагонопотока. Таким образом, если мощность вагонопотока будет $f_{ij}(t) + y_i(t)$, то наблюдаются:

1) недостаток резерва пропускной способности на маршруте движения вагонопотока, в результате чего возникают дополнительные затраты на корректировку этого маршрута (рис. 3);

2) потери от простоя нерегулярного вагонопотока мощностью $y_i(t)$ в результате деления фактического вагонопотока (рис. 4);

3) затраты при движении нерегулярного вагонопотока мощностью $y_i(t)$ по транспортной сети (рис. 5).

Требуется найти минимальную сумму затрат на движение, простой и изменение структуры вагонопотоков с учетом дополнительных затрат на корректировку их маршрутов [9]. То есть функционал имеет вид

$$(1) \quad J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \rightarrow \min ,$$

где транспортные расходы рассчитываются по формуле

$$(2) \quad J_1 = \sum_{t=0}^T \sum_{p_i}^{p_i} c_{ij}(t) \cdot f_{ij}(t) ,$$

затраты на задержку регулярного вагонопотока в начальной вершине маршрута его движения

$$(3) \quad J_2 = \sum_{t=0}^T \sum_{p_i}^{p_i} c_i \cdot f_{ij}(t) .$$

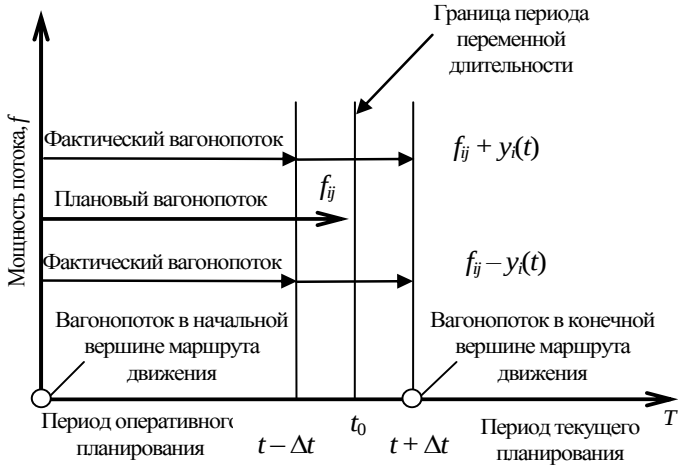


Рис. 3. Схема изменения границы периода оперативного планирования

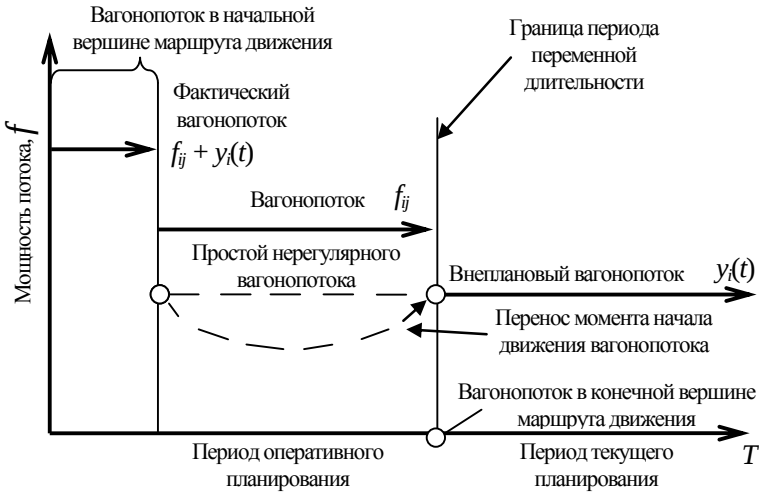


Рис. 4. Схема переноса нерегулярного вагонопотока

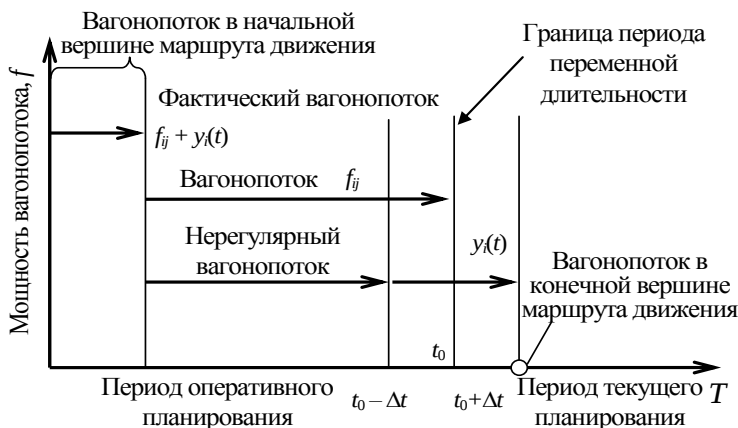


Рис. 5. Схема движения фактического вагонопотока

Составляющие J_3 и J_4 зависят от вида и параметров закона распределения. Обозначим границу периода динамической оптимизации моментом t_0 . Если момент завершения движения фактического вагонопотока t произойдет раньше t_0 (т.е. $t < t_0$), то возникают потери от задержки вагонопотока в течение времени $t_0 - t$ в ожидании начала следующего периода оптимизации. В противном случае появляются дополнительные расходы на корректировку маршрута продвижения фактического вагонопотока.

Пусть $c_{1,(i)}$ — единичные потери от задержки фактического вагонопотока в ожидании следующего периода оптимизации, $c_{2,(ij)}$ — единичные расходы на корректировку маршрута движения фактического вагонопотока, тогда потери от задержки фактического вагонопотока в ожидании следующего периода оптимизации определяются как

$$(4) \quad J_3 = \sum_0^{t_0} f_{ij}(t) \cdot c_{1,(i)}(t_0 - t), \quad t = [0; t_0],$$

а расходы на корректировку маршрута движения нерегулярного вагонопотока составят

$$(5) \quad J_4 = \sum_{t_0}^T f_{ij}(t) \cdot c_{2,(ij)}(t - t_0), \quad t = [t_0; T].$$

Если единичный ущерб от задержки нерегулярного вагонопотока в ожидании следующего периода оптимизации $c_{1,(i)}$ больше единичных затрат на корректировку маршрута движения фактического вагонопотока $c_{2,(ij)}$, то целесообразно корректировать маршруты движения вагонопотоков путем изменения границ периодов динамической оптимизации. Пусть $\varphi(t)$ – математическое ожидание мощности фактического вагонопотока. Если $c_{1,(i)}$ пропорционален $(t_0 - t)$, то математическое ожидание потерь от задержки вагонопотока в ожидании следующего периода оптимизации будет равно

$$(6) \quad \varphi(t) \cdot c_{1,(i)}(t_0 - t).$$

В случае корректировки маршрута движения фактического вагонопотока математическое ожидание потерь будет равно

$$(7) \quad \varphi(t) \cdot c_{2,(ij)}(t - t_0).$$

Выбор рациональной границы периода динамической оптимизации t_0 предлагается осуществлять на основе решения уравнения

$$(8) \quad \varphi(t) \cdot c_{1,(i)}(t_0 - t) = \varphi(t) \cdot c_{2,(ij)}(t - t_0).$$

Результатом решения уравнения (8) является оптимальное соотношение величины минимальных суммарных затрат $c_{min}(t_0)$ на задержку вагонопотока в ожидании следующего периода оптимизации и затрат на корректировку маршрута движения фактического вагонопотока (рис. 6):

$$(9) \quad c(t_0) = \frac{c_{2,(ij)}(t - t_0)}{c_{1,(i)}(t_0 - t)}.$$

На целевую функцию (1) накладываются следующие ограничения:

1. Уравнение динамики изменения мощности вагонопотока:
 $f_{ij}(t + 1) = f_{ij}(t) + y_i(t + 1) - y_i(t)$
2. Начальное и конечное условия задачи:
 $f_{ij}(0) = 0; y_i(t) = 0$
3. Условия неотрицательности переменных:
 $f_{ij}(t) \geq 0; i \neq j; y_i(t) \geq 0;$
4. Ограничения на наличие резервов пропускной способности:
 $0 \leq f_{ij}(t) \leq d_{ij}(t),$

$$0 \leq f_{ij}(t) \leq d_i(t) \cdot K_u,$$

$$0 \leq f_{ij}(t) \leq d_{min}(t),$$

где K_u – поправочный коэффициент, учитывающий сложность управления вагонопотоками на железнодорожной станции на основе расчета количества управленческой информации по методике, изложенной в работе [2].

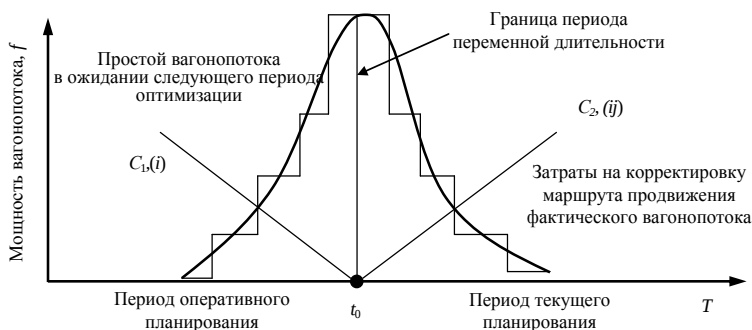


Рис. 6. Определение оптимальной границы периода динамической оптимизации

Предлагаемая задача динамической оптимизации, основанная на использовании расчетных периодов переменной длительности, позволяет учитывать в оперативном режиме изменения маршрутов движения вагонопотоков по транспортной сети и влияние этих изменений на величину пропускной способности дуг транспортной сети.

3. Пример решения поставленной задачи динамической оптимизации

Рассмотрим пример решения задачи динамической оптимизации с использованием предлагаемого способа.

Пусть известны мощности расчетных фактических вагонопотоков $f_{12}(0) = 4$, $f_{12}(10) = 2$, $f_{12}(20) = 2$, $f_{32}(0) = 2$, $f_{23}(13) = 2$, $f_{31}(21) = 1$. Примем расчетный период $[0; T] = 30$, который разделен на периоды оптимизации с границами $t_{0,1} = 10$ мин.,

$t_{0,2} = 20$ мин., $t_{0,3} = 30$ мин. Схема расчетной транспортной сети представлена на рис. 7.

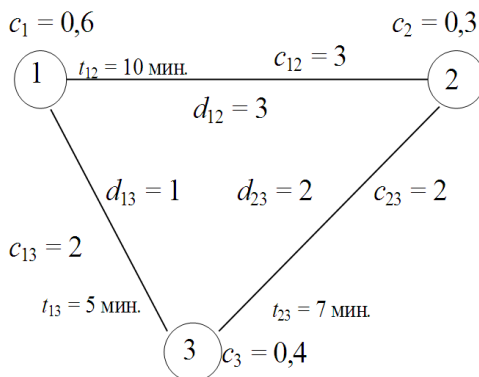


Рис. 7. Расчетная схема транспортной сети

Решение задачи начинается с последнего, третьего, периода оптимизации $[t_{0,2}; T]$. Вагонопотоки на данном периоде: $f_{12}(20) = 2$; $f_{31}(21) = 1$. Предполагается, что вагонопотоки $f_{12}(20)$ и $f_{31}(21)$ регулярные.

Проверка ограничений на наличие резервов пропускной способности элементов транспортной сети по маршрутам движения регулярных вагонопотоков:

$$d_{\min,12} = \min(3) = 3; 0 < f_{12}(20) < 3;$$

$$d_{\min,31} = \min(1) = 1; 0 < f_{31}(21) = 1.$$

Поскольку мощность вагонопотоков $f_{12}(20)$ и $f_{31}(21)$ не превышает пропускную способность, то нет необходимости осуществлять поиск альтернативных маршрутов. В результате движения вагонопотоков $f_{12}(20)$ и $f_{31}(21)$ на третьем периоде оптимизации транспортные расходы составят $J_1 = 6 + 2 = 8$, затраты при задержке регулярного вагонопотока в начальной вершине маршрута его движения $J_2 = 0$, потери от простоя фактического вагонопотока в ожидании следующего периода оптимизации $J_3 = 0$, расходы на корректировку маршрута движения нерегулярного вагонопотока $J_4 = 0$. Суммарные затраты на движение вагонопотоков на третьем периоде оптимизации (формула (1)) составят $J = 8 + 0 + 0 + 0 = 8$.

Аналогично рассчитываются параметры вагонопотоков на втором периоде, $[t_{0,1}; t_{0,2}]$. Суммарные расходы, с учетом результата на третьем периоде, будут равны 18.

На первом периоде оптимизации $[0; t_{0,1}]$ вагонопоток $f_{12}(0) = 4$ является нерегулярным. Проверим ограничение на наличие резервов пропускной способности $f_{32}(0) = 2$; $d_{min,32} = \min(2) = 2$; $0 < f_{32}(0) = 2$. Поскольку $f_{12}(0) = 4 \neq f_{12}(10) = 3$, следовательно, вагонопоток $f_{12}(0)$ является нерегулярным. Предлагается деление вагонопотока на $f_{12}(0) = 3$ и $y_{12}(0) = 4 - 3 = 1$. В этом случае вагонопоток $f_{12}(0)$ становится регулярным. В результате маршрут движения $f_{12}(0)$ совпадает с маршрутом движения аналогичных вагонопотоков на предыдущих периодах оптимизации, где $d_{min,12} = \min(3) = 3$; $0 < f_{12}(0) - y_{12}(0) = 3$.

Рассмотрим возможные варианты движения нерегулярного вагонопотока $y_{12}(0)$.

Вариант 1: движение по стандартному маршруту, запланированному на первом периоде оптимизации по дуге (ij) . На первом периоде расчетного маршрута движения вагонопотока $f_{12}(0)$, следовательно, для вагонопотока $y_{12}(0)$ $d_{min,12} = 0$. Учитывая ограничение на резерв пропускной способности, движение вагонопотока $y_{12}(0)$ возможно только во втором периоде. Следовательно, возникает задержка вагонопотока $y_{12}(0)$ в ожидании следующего периода оптимизации, где суммарные затраты рассчитываются как:

$$J_1 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13; J_2 = 0; J_3 = (0,6 \cdot 10) \cdot 1 = 0,6;$$

$$J_4 = 0 \Rightarrow J = 13 + 6 = 19.$$

Вариант 2: движение по альтернативному маршруту. Проверим ограничения на наличие резервов пропускной способности $d_{min,132} = \min(1; 2) = 1$, $0 < y_{12}(0) = 1$.

Суммарное время движение вагонопотока $y_{12}(0)$ составляет $t(1, 3) + t(2, 3) + t(3) = 5 + 7 + 2 = 14$ мин. Время движение вагонопотока $y_{12}(0)$ больше установленной величины периода оптимизации (10 мин.), в результате существует два варианта решения задачи.

Вариант 2.1: дополнительная задержка нерегулярного вагонопотока $y_{12}(0)$ в вершине 3 в ожидании движения вагонопотока $f_{23}(13)$ по дуге (23). При выборе такого варианта граница

периода оптимизации остается неизменной, вагонопоток $y_{12}(0)$ задерживается в вершине 3 в ожидании следующего периода. В результате задержки нерегулярного вагонопотока $y_{12}(0)$ суммарные затраты рассчитываются следующим образом:

$$J_1 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13; \quad J_2 = 0; \quad J_3 = 0;$$

$$J_4 = 2 \cdot 1 + (0,4 \cdot (2 + 13)) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 10 \Rightarrow J = 13 + 10 = 23.$$

Вариант 2.2: задержка регулярного вагонопотока $f_{23}(13)$ в вершине 2 в ожидании движения нерегулярного вагонопотока $y_{12}(0)$ по дуге (23). В этом варианте изменится граница периода оптимизации, в результате повысится точность решения задачи. Таким образом, суммарные затраты рассчитываются следующим образом:

$$J_1 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13; \quad J_2 = (0,3 \cdot 1) \cdot 2 = 0,6; \quad J_3 = 0,$$

$$J_4 = 2 \cdot 1 + (0,4 \cdot 2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4,8 \Rightarrow J = 13 + 4,8 + 0,6 = 18,4.$$

При выборе варианта 2.1 в качестве оптимального результата решения задачи, где вагонопоток $y_{12}(0)$ задерживается в вершине 3 в ожидании следующего периода оптимизации, суммарные затраты на движение вагонопотоков по транспортной сети составят 37. Однако при решении задачи на основе использования расчетных периодов переменной длительности (вариант 2.2) повышается точность её решения. Повышение точности достигается в результате увеличения границы периода оптимизации $t_{0,1}$, в этом случае сокращается задержка вагонопотока $y_{12}(0)$ в вершине 3. При выборе варианта 2.2 суммарные затраты на движение вагонопотоков по транспортной сети составят 36,4.

Таким образом, в качестве оптимального варианта решения задачи принимаем: разделение фактического вагонопотока $f_{12}(0)$; корректировку маршрута движения нерегулярного вагонопотока $y_{12}(0)$; изменение границы периода оптимизации $t_{0,1}$. Результат решения задачи динамической оптимизации представлен в таблице 1, где суммарные затраты на движение вагонопотоков по транспортной сети составляют 36,4.

Таблица 1. Результат решения задачи динамической оптимизации с расчетными периодами переменной длительности

Дуга транспортной сети	Время, мин.			
	t_0		$t_{0,1}$	$t_{0,2}$
	0	5	5	14
(12)	$f_{12}(0)$		$f_{12}(0)$	$f_{12}(10)$
(13)	$y_{12}(0)$			$f_{31}(21)$
(23)	$f_{32}(0)$		$y_{12}(0)$	$f_{23}(13)$

4. Алгоритм корректировки маршрутов движения вагонопотоков

Для практического использования предлагаемой модели разработан алгоритм корректировки маршрутов движения вагонопотоков, выполненный на основе использования объектно-ориентированного подхода (рис. 7).

Транспортная сеть G представлена объектом, в состав которого входят списки и функции:

1. Список вершин $P(I)$, где объект I – вершина. Данные объекта I : i – номер вершины; список $D(d, t)$, где d – резерв пропускной способности вершины в момент времени t ; список $C(c, t)$, где c – затраты на задержку единицы мощности вагонопотока в вершины в момент времени t .

2. Список дуг $E(IJ)$, где объект IJ – дуга. Данные объекта IJ : i – номер начальной вершины дуги, j – конечной; (d, t) , где d – резерв пропускной способности дуги в момент времени t ; список $C(c, t)$, где c – затраты на движение единицы мощности вагонопотока по дуге в момент времени t ; tx – время движения вагонопотока по дуге.

Список вагонопотоков $F(Fn)$, где объект Fn – вагонопоток. Данные объекта Fn : n – номер вагонопотока; f – мощность вагонопотока; t – момент времени начала движения вагонопотока; объект $M(m, c)$ – маршрут движения вагонопотока, где m – список номеров вершин, по которым движется вагонопоток, c – затраты на движение единицы мощности вагонопотока по маршруту.

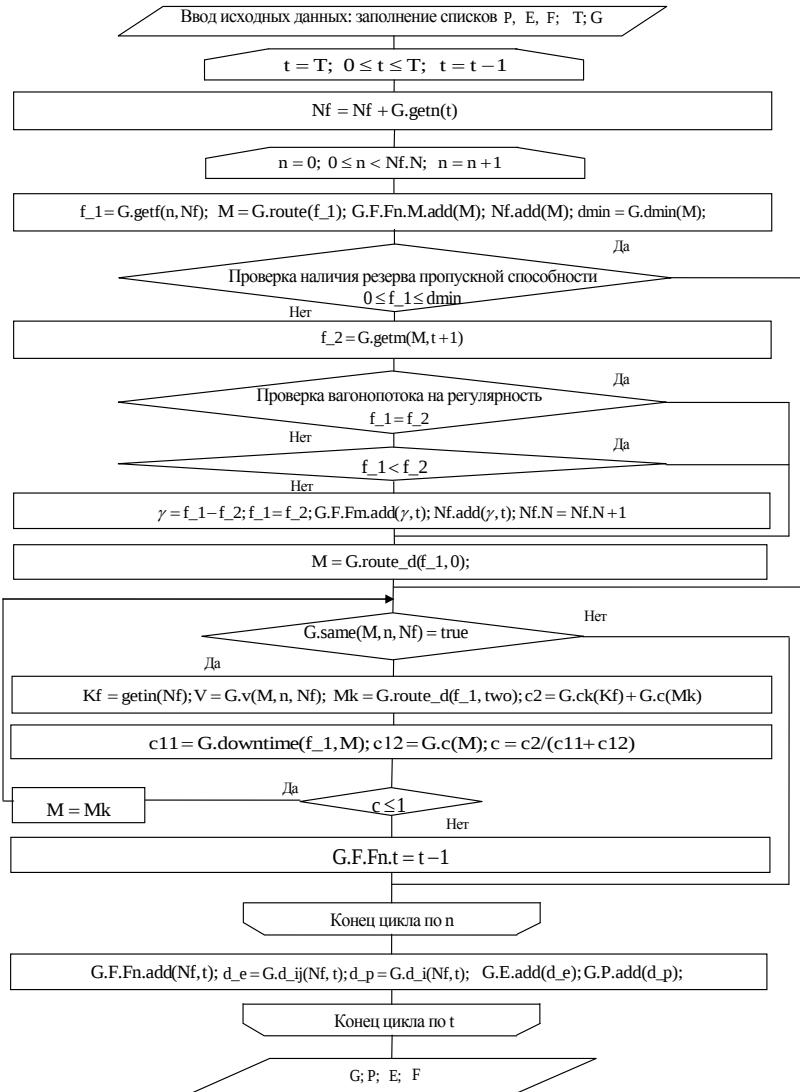


Рис. 7. Алгоритм корректировки маршрутов движения вагонопотоков на основе использования расчетных периодов переменной длительности

Функции объекта G : $getn(t)$ – получение списка вагонопотоков, движение которых начинается в момент времени t ; $getf(n, Nf(N))$ – расчет величины мощности n -го вагонопотока, где $Nf(N)$ – список вагонопотоков, имеющий структуру аналогичную списку $F(Fn)$, N – количество вагонопотоков; $getm(M, t)$ – расчет величины мощности вагонопотока, движение которого начинается в момент времени t по маршруту M ; $route(f)$ – поиск оптимального маршрута движения вагонопотока мощностью f по критерию минимума затрат «с»; $route_d(f, V)$ – поиск оптимального маршрута движения вагонопотока мощностью f по критерию минимума затрат «с» с учетом ограничений на пропускную способность d , где V – список вершин, которые не входят в маршрут; $dmin(M)$ – определение минимального резерва пропускной способности дуг и вершин маршрута M ; $same(M, n, Nf)$ – поиск совпадений номеров вершин маршрута M движения n -го вагонопотока с вершинами маршрутов движения вагонопотоков из списка Nf ; $v(M, n, Nf)$ – получение списка выявленных совпадений номеров вершин маршрута M движения n -го вагонопотока с вершинами маршрутов движения вагонопотоков из списка Nf ; $getin(Nf)$ – получение списка вагонопотоков, на маршрутах движения которых выявлено совпадение номеров вершин; $downtime(n, M)$ – расчет затрат на простой вагонопотока мощностью f в начальной вершине маршрута M ; $c(M)$ – определение затрат на движение вагонопотока по маршруту M ; $ck(Kf)$ – расчет затрат на корректировку движения вагонопотоков Kf ; $p = d_i(Nf, t)$ – определение текущих резервов пропускной способности вершин маршрутов движения вагонопотоков Nf в момент времени t , где p – список вершин, имеющий структуру аналогичную списку $P(I)$; $e = d_ij(Nf, t)$ – определение текущих резервов пропускной способности дуг маршрутов движения вагонопотоков Nf в момент времени t , где e – список дуг, имеющий структуру аналогичную списку $E(IJ)$.

5. Заключение

Реализация разработанной математической модели и алгоритм в рамках информационных систем на железнодорожном транспорте позволит оперативным руководителям перевозочно-

го процесса корректировать маршруты продвижения вагонопотоков на путях необщего пользования промышленных предприятий или в железнодорожных транспортных узлах, что приведет к ускорению продвижения вагонопотоков в условиях усложнения их структуры и растущего объема грузовых перевозок.

Литература

1. АЛЕКСАНДРОВ А.Э., ЯКУШЕВ Н.В. *Стохастическая постановка динамической транспортной задачи с задержками с учетом случайного разброса времени доставки и времени потребления* // Управление большими системами. – 2006. – №12–13. – С. 5–14.
2. БАГИНОВА В.В., РАХМАНГУЛОВ А.Н., МИШКУРОВ П.Н. *Методика оценки организационной структуры оперативного управления вагонопотоками на путях необщего пользования* // Транспорт: наука, техника, управление. – 2012. – №2. – С. 19–22.
3. БАГИНОВА В.В., РАХМАНГУЛОВ А.Н., ОСИНЦЕВ Н.А. *Контроль вагонопотоков на пути необщего пользования* // Мир транспорта. – 2010. – №3(31). – С. 108–113.
4. КОЗЛОВ П.А., МИЛОВИДОВ С.П. *Метод динамического согласования производства и транспорта* // Сб. тр. ИКТП. – 1985. – Вып. 105. – С. 156–163.
5. КОЗЛОВ П.А., ОСОКИН О.В., ПЕРМИКИН В.Ю. *Автоматизированное управление процессами в транспортном узле* // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2013. – №2. – С. 118–122.
6. МИЛОВИДОВ С.П., КОЗЛОВ П.А. *Динамическая транспортная задача с задержками в сетевой постановке* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1982. – №1. – С. 211–212.
7. МИШКУРОВ П.Н. *Постановка динамической транспортной задачи с учетом изменения границ расчетных периодов* // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования: материалы 68-й межрегиональной научно-технической конференции. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2010. – №1. – С. 199–202.

8. МИШКУРОВ П.Н. *Энерго- и ресурсосбережение промышленных предприятий на основе рационального управления вагонопотоками* // Транспортные и транспортно-технологические системы: материалы Международной научно-технической конференции. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2012. – С. 162–167.
9. РАХМАНГУЛОВ А.Н., МИШКУРОВ П.Н. *Проблемы использования методов динамического программирования при управлении вагонопотоками* // Современные проблемы транспортного комплекса России. – 2012. – №2. – С. 279–285.
10. РАХМАНГУЛОВ А.Н., МИШКУРОВ П.Н. *Повышение энергоэффективности промышленного железнодорожного транспорта на основе динамической оптимизации параметров вагонопотоков* // Сборник научных трудов SWorld. – 2012. – Вып. 3, том 1. – С. 86–91.
11. РАХМАНГУЛОВ А.Н., ОСИНЦЕВ Н.А. *Оценка резервов пропускной и перерабатывающей способности технологических железнодорожных станций с использованием теории нечетких множеств* // Вестник транспорта Поволжья. – 2011. – Вып. 1(23). – С. 45а–49.
12. ТРОФИМОВ С.В., РАХМАНГУЛОВ А.Н. *Выбор оптимальных методов оперативного управления работой промышленных транспортных систем.* – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2000. – 145 с.

IMPROVING ACCURACY OF RAILWAY CAR TRAFFIC DYNAMIC OPTIMIZATION WITH BASE PERIOD LENGTH VARIATION

Pavel N. Mishkurov, Magnitogorsk state technical university named after G.I.Nosov, Magnitogorsk, postgraduate (mishkuroff@mail.ru).

Abstract: The problem is studied of optimal railway car traffic planning for railway transportation hubs or local railways of industrial enterprises. We suggest an algorithm for car routes' adjustment. The algorithm implements the object-oriented approach.

Keywords: railway car traffic, rail transportation hub, dynamic programming, optimization period, operational management, object-oriented approach.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым*

*Поступила в редакцию 03.06.2014.
Опубликована 31.01.2015.*

УДК 007.52
ББК 32.817

МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ОЦЕНОК КООРДИНАТ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ГРУППОЙ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Белов Р. В.¹

(ОАО АНПП «Темп-Авиа», Арзамас)

Казанин Д. К.², Огородников К. О.³

(ОАО АНПП «Темп-Авиа»,

*Арзамасский политехнический институт (филиал НГТУ),
Арзамас)*

Описывается модель группы подвижных объектов (мультиагентная система). Каждый объект (агент) является материальной точкой на плоскости. Реализуется управление этой системой. Рассматриваются методы коррекции оценок координат.

Ключевые слова: мультиагентная система, коррекция координат, централизованный наблюдатель, распределённый наблюдатель, управление, опорный объект.

1. Введение

Задачи управления мультиагентными системами (МАС) [1, 4] являются предметом обширных исследований последние несколько лет. Такие системы имеют широкий спектр применения, включая моделирование окружающей среды, наблюдение и спасательные операции в военных и гражданских целях, мони-

¹ Роман Валерьевич Белов, инженер-математик.

² Дмитрий Константинович Казанин, инженер-математик, аспирант (mysterio7@rambler.ru).

³ Кирилл Олегович Огородников, техник, студент.

торинг лесов и сельскохозяйственных угодий, приложения здравоохранения, совместная обработка информации и т.д.

В последние годы использование теории графов позволило достичь ряда результатов, получивших применение в вопросах передачи данных между агентами для координации МАС. Основанные на теории графов стратегии информационного консенсуса для управления МАС широко рассматриваются в [2, 9]. Децентрализованный [3, 7] информационный консенсус требует только локального обмена данными между агентами. Основная идея такого типа консенсуса заключается в том, что каждый агент обновляет своё информационное состояние на основе информационных состояний его локальных соседей, и таким образом информационное состояние всей системы сходится к общему согласованному значению. Задачи консенсуса также решаются при управлении формациями [6, 8]. Однако динамика каждого агента зависит от неопределенностей связей МАС. Достоверность информации растёт с увеличением времени взаимодействия агентов, но уменьшается в зависимости от зашумлённости информации. Эта проблема может быть решена путём разработки схемы информационного консенсуса на основе фильтра Калмана [5, 10] для динамической МАС.

Отслеживание опорного объекта является одной из важных проблем при управлении МАС. Алгоритмы, рассматриваемые в данной статье, учитывают шум измерителя каждого отдельного агента в сети. Эта работа мотивируется необходимостью разработки эффективного фильтра Калмана в задачах консенсуса, который будет включать шумы каждого измерителя и обеспечит более точную оценку вектора состояния целевого агента (опорного объекта). Фильтр Калмана применяется для решения такого рода проблем, поскольку он может работать с измерениями, которые наблюдаются в течение долгого времени и содержат шумы (случайные вариации) и другие неточности. В связи с вышесказанным является актуальной задача построения распределённой вычислительной системы, обеспечивающей формирование качественной и достоверной информации о взаимном положении агентов, а также её использование при управлении строем.

Модель группы подвижных объектов рассматривается как мультиагентная система на плоскости. Отдельные объекты (агенты) рассматриваются как материальные точки. Ставится задача оценить возможность формирования строя, рассматриваемого как упорядоченное состояние мультиагентной системы, по различной первичной информации.

Строем считается такое состояние системы, при котором минимизируются невязки координат каждого объекта с заданными для каждого момента времени координатами (опорный объект), а дальности между любыми парами объектов не меньше заданного значения:

$$(1) \quad |\bar{x}_i(n) - \bar{x}(n)| \rightarrow \min,$$

$$(2) \quad \sqrt{(x_i(n) - x_j(n))^2 + (y_i(n) - y_j(n))^2} \geq D_{\min},$$

где n – номер итерации; $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$, $j \neq i$ – номера агентов; m – число агентов в МАС;

$$\bar{x}_i(n) = \begin{bmatrix} v_i^{(x)}(n) \\ x_i(n) \\ v_i^{(y)}(n) \\ y_i(n) \end{bmatrix}$$

– вектор состояния i -го объекта на n -й итерации (включает в себя проекции координат и скорости объекта);

$$\bar{x}(n) = \begin{bmatrix} v^{(x)}(n) \\ x(n) \\ v^{(y)}(n) \\ y(n) \end{bmatrix}$$

– вектор состояния опорного объекта на n -й итерации;

$D_{\min}$ – заданное минимальное значение дальности между агентами.

Предполагается, что агенты обмениваются между собой информацией о дальностях до других агентов и о собственных координатах и скоростях. Для оценки координат вектора состояния по дальностям и скоростям рассматриваются градиентный

метод с фиксированным шагом, а также централизованный и распределённый наблюдатели, использующие фильтр Калмана. Управление каждым объектом мультиагентной системы реализуется относительно некоторого опорного (виртуального) объекта с соблюдением ограничения минимальной дальности между агентами.

2. Модель объекта в централизованной системе

Модель объекта характеризуется уравнением состояния в виде (3):

$$(3) \quad \bar{x}_i(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta T & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_i(n) + \begin{bmatrix} \Delta T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \Delta T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{u}_i(n),$$

где $\bar{x}_i(n+1)$ – вектор состояния i -го объекта на $(n+1)$ -й итерации;

$\bar{u}_i(n) = \begin{bmatrix} u_i^{(x)}(n) \\ u_i^{(y)}(n) \end{bmatrix}$ – управляющее воздействие, представля-

ющее собой ускорение объекта; ΔT – период дискретизации.

Вектор измерения $\bar{z}_i$ включает в себя измерения радиальной дальности между объектами и проекции скорости (4):

$$(4) \quad \bar{z}_i(n) = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_i(n) - x_1(n))^2 + (y_i(n) - y_1(n))^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x_i(n) - x_j(n))^2 + (y_i(n) - y_j(n))^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x_i(n) - x_m(n))^2 + (y_i(n) - y_m(n))^2} \\ v_i^{(x)}(n) \\ v_i^{(y)}(n) \end{bmatrix} + \bar{\eta}_i,$$

где $\bar{z}_i(n)$ – выход модели, за счет которого проводится коррекция объекта на n -й итерации; $\bar{\eta}_i$ – шум измерения – нормально

распределенная величина с параметрами $N(0, \sigma)$, где $\sigma = 100$ м для дальностей и $\sigma = 3$ м/с для скоростей i -го объекта.

3. Модель распределенной системы

Взаимодействие объектов в группе предполагает возможность отправки каждым объектом сообщения, содержащего любую известную ему информацию. Остальные объекты могут принять отправленное сообщение с заданной вероятностью и временной задержкой. Принимающий объект получает вместе с ним оценку дальности до отправившего сообщение объекта.

Структура сети связи задается полносвязным графом (что не является необходимым условием) (см. рис. 1), т.е. каждый объект может принять сообщение, отправленное любым другим объектом.

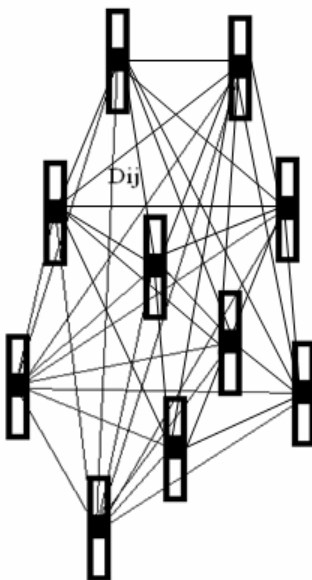


Рис. 1. Структура MAC

Модель объекта остается такой же, как и в централизованном случае, за исключением количества измеряемых дальностей и временной задержки.

4. Управление объектами и формирование строя

На рис. 2 и рис. 3, приведенных ниже, показаны траектории и мгновенные позиции объектов, полученные с помощью алгоритма формирования строя (5)–(7).

$$(5) \quad \begin{cases} un_i^{(x)}(n) = k_1 \cdot (x_i(n) - x(n)) + k_2 \cdot (v_i^{(x)}(n) - v^{(x)}(n)), \\ un_i^{(y)}(n) = k_1 \cdot (y_i(n) - y(n)) + k_2 \cdot (v_i^{(y)}(n) - v^{(y)}(n)), \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} ud_i^{(x)}(n) = n_{ji}^{(x)}(n) \cdot ((D_{\min} - D_{ji}(n)) + k_2 \cdot V_{ji}(n)), \\ ud_i^{(y)}(n) = n_{ji}^{(y)}(n) \cdot ((D_{\min} - D_{ji}(n)) + k_2 \cdot V_{ji}(n)), \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} u_i^{(x)}(n) = -(un_i^{(x)}(n) + ud_i^{(x)}(n)), \\ u_i^{(y)}(n) = -(un_i^{(y)}(n) + ud_i^{(y)}(n)), \end{cases}$$

где $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ – коэффициенты ПД-регулятора;

$\begin{bmatrix} un_i^{(x)}(n) \\ un_i^{(y)}(n) \end{bmatrix}$ – управляющее воздействие для минимизации невяз-

ки координат; $D_{ji}(n) = \sqrt{(x_j(n) - x_i(n))^2 + (y_j(n) - y_i(n))^2}$ – расстояние между j и i объектами на n -й итерации;

$\begin{bmatrix} n_{ji}^{(x)}(n) = \frac{x_j(n) - x_i(n)}{D_{ji}} \\ n_{ji}^{(y)}(n) = \frac{y_j(n) - y_i(n)}{D_{ji}} \end{bmatrix}$ – нормы невязок траекторных координат;

$V_{ji}(n) = (v_j^{(x)}(n) - v_i^{(x)}(n)) \cdot n_{ji}^{(x)}(n) + (v_j^{(y)}(n) - v_i^{(y)}(n)) \cdot n_{ji}^{(y)}(n)$ –

модуль вектора рассогласования скоростей; $\begin{bmatrix} ud_i^{(x)}(n) \\ ud_i^{(y)}(n) \end{bmatrix}$ – управ-

ляющее воздействие для ограничения минимального расстояния, на которое могут сблизиться j и i объекты.

Алгоритм (5) минимизирует невязку координат каждого объекта с опорным объектом с помощью линейного ПД-регулятора. При этом сближение объектов ограничено и управляется отдельным для каждой пары объектов ПД-регулятором (при условии, что $D_{ij} < D_{\min}$) (6). Минимальное расстояние $D_{\min}$, на которое объекты могут сблизиться, задается постоянным.

На рис. 4 показано минимальное расстояние между объектами в каждый момент моделирования. Время моделирования – 300 с. Шаг моделирования – 0,01 с.

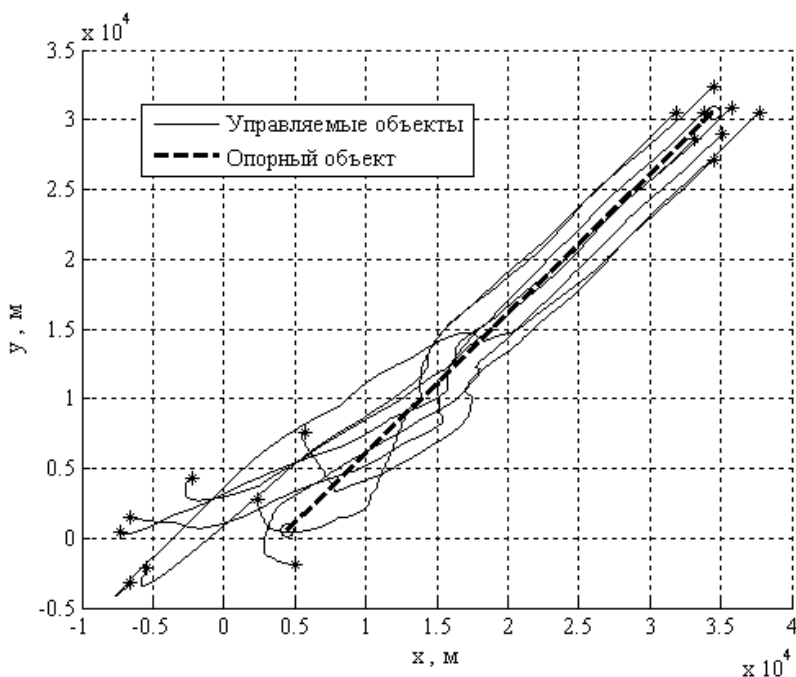


Рис. 2. Траектории управляемых объектов и опорного объекта

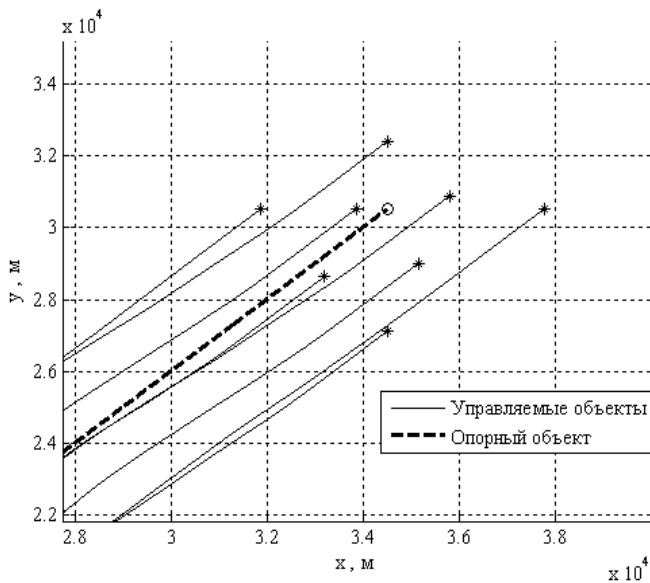


Рис. 3. Траектории управляемых объектов и опорного объекта

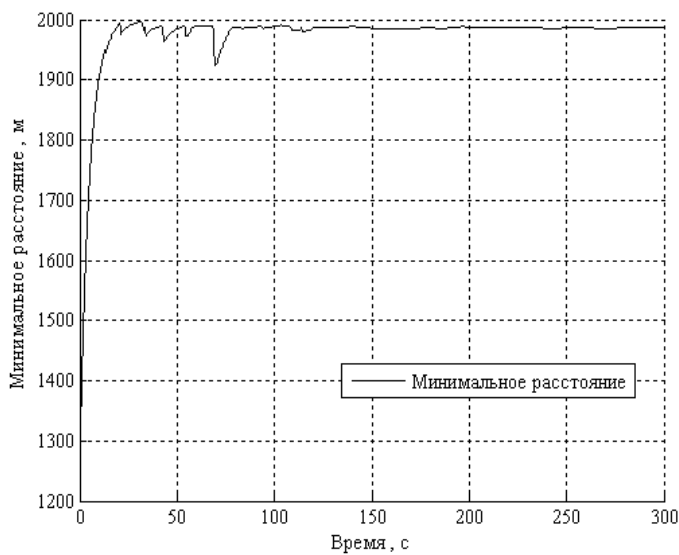


Рис. 4. Минимальное расстояние между объектами

5. Коррекция инерциальных оценок координат по дальностям между объектами в группе

В данной работе рассматривается задача построения распределённой вычислительной системы, обеспечивающей формирование качественной и достоверной информации о взаимном положении агентов, а также её использование при управлении строем. Для обеспечения качественной и достоверной информации о взаимном положении агентов были рассмотрены и численно промоделированы несколько алгоритмов коррекции.

Инерциальные оценки формировались по уравнениям объекта, используя известные управляющие воздействия. Начальное состояние каждого объекта формировалось с неопределенностями.

5.1. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД С ФИКСИРОВАННЫМ ШАГОМ

Метод осуществляет итеративную минимизацию невязки по дальностям. Каждый объект минимизирует невязки только по дальностям до себя и корректирует только свои координаты (см. рис. 5). Получение дальностей происходит путем постоянной рассылки сообщений от соседних объектов.

В процессе работы распределенной версии у каждого объекта накапливается своя очередь сообщений, которую он, по мере возможности, должен обработать.

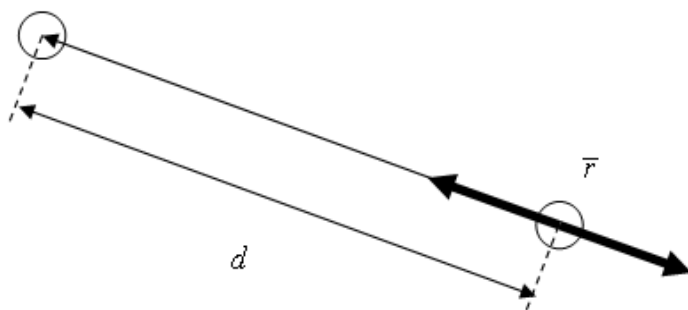


Рис. 5. Корректировка координат объекта

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{x}_{kor} &= \bar{x}_{nkor} + \bar{r}ec_1, \\ \bar{v}_{kor} &= \bar{v}_{nkor} + \bar{r}ec_2, \end{aligned}$$

где d – норма исходного объекта; $\bar{x}_{kor}$ – скорректированный вектор координат исходного объекта; $\bar{v}_{kor}$ – скорректированный вектор скоростей исходного объекта;

$\bar{x}_{nkor} = \begin{bmatrix} x_{nkor} \\ y_{nkor} \end{bmatrix}$ – вектор координат исходного объекта;

$\bar{v}_{nkor} = \begin{bmatrix} v_{nkor}^{(x)} \\ v_{nkor}^{(y)} \end{bmatrix}$ – вектор скоростей исходного объекта;

$\bar{r}$ – вектор направления единичной длины от исходного до соседнего объекта; e – невязка по дальностям; $c_1 = -0,1$; $c_2 = -0,01$ – весовые коэффициенты.

На рис. 6 показано функционирование только для пары объектов. Корректировка остальных пар объектов происходит аналогично.

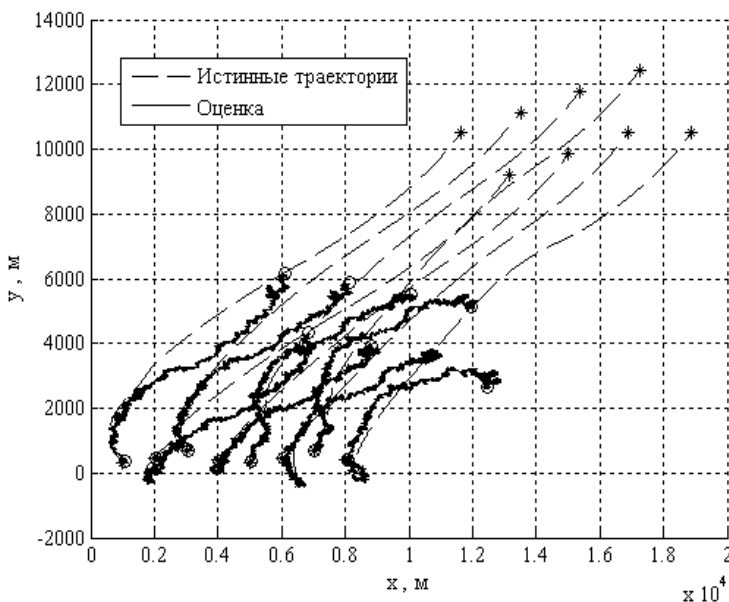


Рис. 6. Градиентный метод с фиксированным шагом

Предлагаемый градиентный метод определяет координаты с точностью до преобразований поворота и переноса. Истинные траектории заданы с помощью алгоритма управления строем (5)–(7) и вычисляются согласно выражению (3).

Минимальное расстояние, на которое могут приблизиться объекты, было задано равным 2000 м. Время моделирования – 100 с. Шаг моделирования – 0,001 с.

5.2. ЦЕНТРАЛИЗОВАННЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

В данном варианте, используя модели каждого из объектов, записывается модель всей системы, а по ней строится наблюдатель, основанный на фильтре Калмана.

Предлагаемый метод находит координаты с точностью до преобразований, сохраняющих расстояния. Если траектории объектов таковы, что относительные координаты (и дальности) значительно изменяются в процессе наблюдения, то неопределенность по повороту может быть устранена.

Для проверки неопределенности по повороту управление формируется следующим образом:

$$(9) \quad \bar{u}_i^{(n)} = \left[\frac{k \cdot x_i^{(n)}}{x_i^{(n)} \cdot x_i^{(n)} + y_i^{(n)} \cdot y_i^{(n)}}, \frac{k \cdot y_i^{(n)}}{x_i^{(n)} \cdot x_i^{(n)} + y_i^{(n)} \cdot y_i^{(n)}} \right],$$

где $k = -10^5$ – весовой коэффициент.

Фильтр Калмана использует следующие матрицы преобразования:

$$(10) \quad A = \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{A} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta T & 1 \end{bmatrix},$$

A – матрица перехода между состояниями (динамическая модель системы); ΔT – период дискретизации.

$$(11) P = \begin{bmatrix} \hat{P} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{P} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{P} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{P} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \hat{P} = \begin{bmatrix} a^{(vx)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{(vy)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{(y)} \end{bmatrix},$$

P – матрица ковариации вектора состояния; $a^{(vx)} = a^{(vy)} = 30^2$, $a^{(x)} = a^{(y)} = (3e + 3)^2$ – начальные неопределенности по скоростям и координатам соответственно.

$$(12) Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где Q – ковариация шума процесса.

$$(13) \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta(z_i - z_{i+1})}{\delta x} & 0 & \frac{\delta(z_i - z_{i+1})}{\delta y} & 0 & \frac{\delta(z_{i+1} - z_i)}{\delta x} & 0 & \frac{\delta(z_{i+1} - z_i)}{\delta y} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\delta(z_i - z_{i+2})}{\delta x} & 0 & \frac{\delta(z_i - z_{i+2})}{\delta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\delta(z_i - z_{i+3})}{\delta x} & 0 & \frac{\delta(z_i - z_{i+3})}{\delta y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\delta(z_n - z_{n-1})}{\delta y} \end{bmatrix},$$

где C – матрица измерений, отображающая отношение измерений и состояний.

Матрица C строится следующим образом:

- каждый объект имеет ровно 4 ячейки в каждой строке;
- каждая строка матрицы – два отдельно рассмотренных объекта;
- в последующих строках не могут рассматриваться те пары объектов, которые рассмотрены ранее.

$$(14) \quad R = \begin{bmatrix} D_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & D_2 \end{bmatrix},$$

где R – ковариация шума измерения; D_1 и D_2 – параметры, определяющие погрешности измерений.

В данном случае погрешности имеют нормальные распределения с нулевыми математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями $\sqrt{D_1}$ и $\sqrt{D_2}$. Число элементов D_1 и D_2 в матрице определяется количеством ребер неориентированного графа моделируемой системы.

Величина R как ошибка измерения может быть определена испытанием измерительных приборов и определением погрешности их измерения.

Для реализации фильтра Калмана были использованы следующие уравнения:

(15) $P_{n|n-1} = A_n P_{n-1|n-1} A_n^T + Q_n$ – предсказание ошибки ковариации, $n | n - 1$ указывает на переход от $(n - 1)$ -й итерации к n -й итерации;

(16) $K_n = P_{n|n-1} C_n^T (C_n P_{n|n-1} C_n^T + R_n)^{-1}$ – вычисление коэффициентов усиления;

(17) $P_{n|n} = P_{n|n-1} - K_n C_n P_{n|n-1}$ – обновление ошибки ковариации.

На рис. 7 видно, что неопределенность по повороту отсутствует. Время моделирования – 250 с. Шаг моделирования – 1 с.

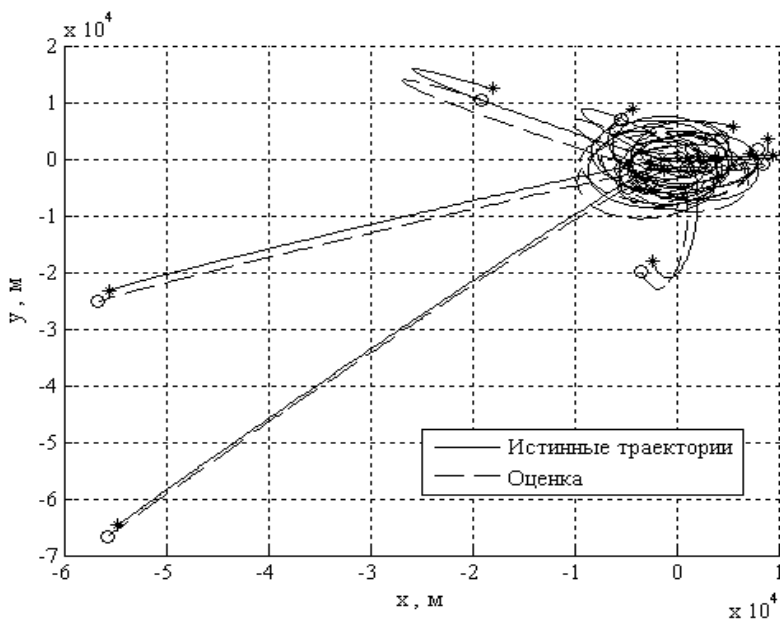


Рис. 7. Централизованный наблюдатель, использующий фильтр Калмана

5.3. РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

Другим способом решения поставленной задачи может быть использование распределённой вычислительной системы, построенной с использованием группы наблюдателей.

В вектор состояния записываются только координаты одного объекта. Имеются отдельные наблюдатели для каждого из объектов. Данный метод должен обеспечивать большую скорость сходимости, чем градиентный метод. Неопределенность по повороту устраняется введением искусственных колебаний, при этом изменяется минимальная дальность между объектами.

Для построения фильтра Калмана используются следующие матрицы линеаризованной модели объекта:

$$(18) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta T & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \Delta T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \Delta T \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta(z_2 - z_1)}{\delta x} & 0 & \frac{\delta(z_2 - z_1)}{\delta y} \\ 0 & \frac{\delta(z_3 - z_1)}{\delta x} & 0 & \frac{\delta(z_3 - z_1)}{\delta y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\delta(z_n - z_1)}{\delta x} & 0 & \frac{\delta(z_n - z_1)}{\delta y} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отправка сообщений объектам проводится случайным образом, интервал времени между двумя рассылками составляет 5–25 итераций (в зависимости от сформированной случайной величины).

На рис. 8 и рис. 9 показаны истинные траектории и их оценки. При $t = 250$ с происходит смена направления движения

опорного объекта (скорости по осям x и y меняются с 200 м/с и 100 м/с на -300 м/с и 20 м/с соответственно). При $t = 100$ с управление начинает замыкаться по координатам оценок объектов (при $t < 100$ с ускорение задавалось с помощью истинных координат).

На рис. 10 показано минимальное расстояние между объектами в каждый момент моделирования. Время моделирования – 500 с. Шаг моделирования – 0,01 с.

Для получения оценки скорости сходимости в рамках принятой модели с неидеальными измерениями необходимы дополнительные теоретические результаты и дополнительное моделирование, которые планируется провести на дальнейших этапах исследования.

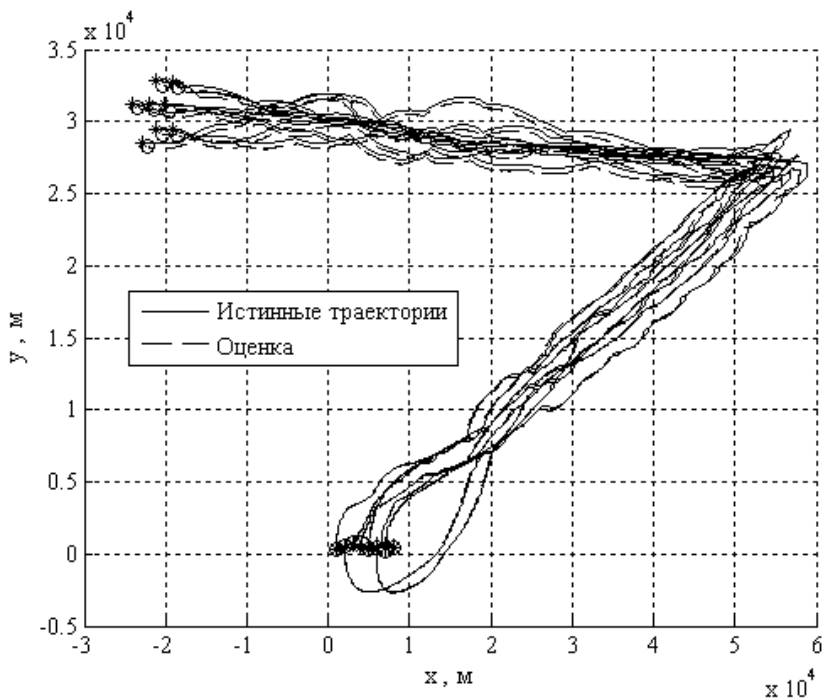


Рис. 8. Распределенный наблюдатель, использующий фильтр Калмана

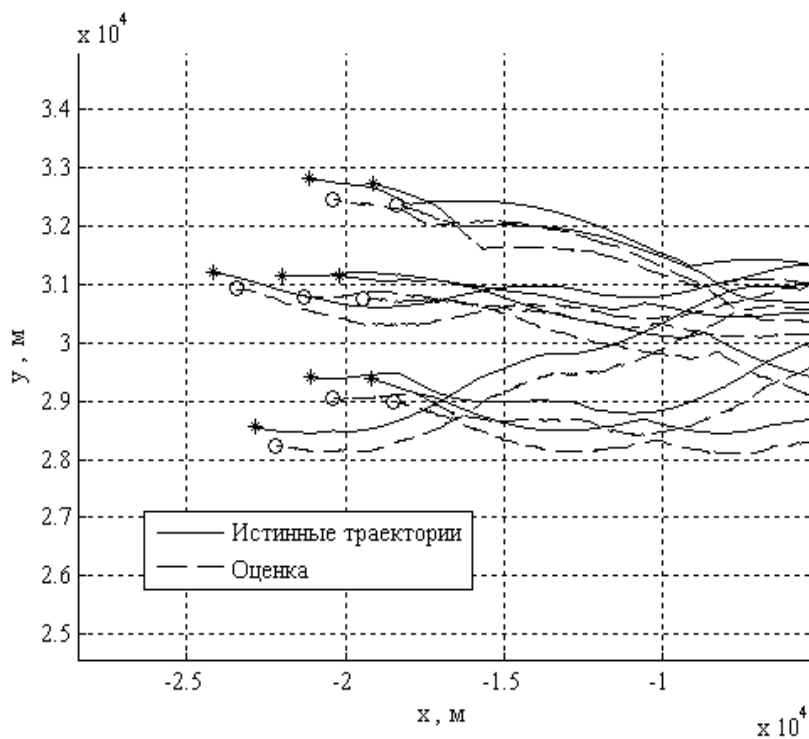


Рис. 9. Распределенный наблюдатель, использующий фильтр Калмана

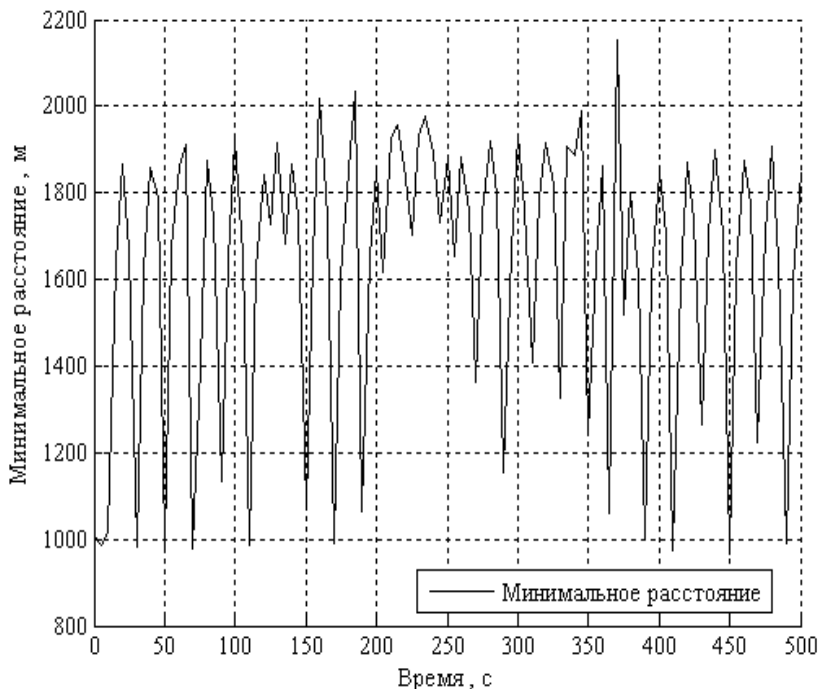


Рис. 10. Минимальное расстояние между объектами

6. Выводы

1. Исходя из полученных в результате моделирования графиков, наблюдается возможность формирования строя группы объектов по измерениям дальностей между объектами и скорости их движения. При этом показана возможность компенсации ошибок задания местоположения и скорости.

2. Наблюдаемость по повороту при коррекции по дальностям достигается только при относительном движении объектов группы. Это может потребовать постоянного преобразования строя и означать невозможность удержания неизменной формации длительное время.

3. Все рассмотренные методы используют одну идею линейного рекуррентного наблюдателя, а отличаются лишь оптимальностью коэффициентов обратной связи и возможностью децентрализованной работы.

Литература

1. CHUNG S.J., SLOTINE J.J. *Cooperative Robot Control and Concurrent Synchronization of Lagrangian Systems* // IEEE transactions on Robotics. – 2009. – Vol. 25, №3. – P. 686–700.
2. FAX J., MURRAY M.R. *Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2004. – Vol. 49, №9. – P. 1465–1476.
3. GENE M.B., ANANYEV S., CARPENTER J.R. *Decentralized Control of Satellite Clusters Under Limited Communication* // AIAA, Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 2006. – Vol. 29, №1. – P. 134–145.
4. OLFATI-SABER R., MURRAY R. *Distributed Cooperative Control of Multiple Vehicle Formations Using Structural Potential Functions* // 15th IFAC World Congress, Kidlington, Oxford, U.K. – 2002. – P. 346–352.
5. OLFATI-SABER R. *Distributed Kalman Filtering and Sensor Fusion in Sensor Networks* // Networked embedded sensing and control, Springer Berlin Heidelberg. – 2006. – P. 157–167.
6. OLFATI-SABER R. *Flocking for Multi-Agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2005. – P. 401–420.
7. REN W., BEARD R.W. *A Decentralized Scheme for Spacecraft Formation Flying via the Virtual Structure Approach* // Proc. American Control Conference, Evanston, IL. – 2003. – P. 1746–1751.
8. VEERMAN J.J.P., LAFFERRIERE G., CAUGHMAN J.S., WILLIAMS A. *Flocks and formations* // Journal of Statistical Physics. – 2005. – Vol. 121, Issue 5–6. – P. 901–936.
9. REN W., BEARD W., ATKINS E.M. *Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control* // IEEE Control Systems Magazine. – 2007, April. – Vol. 27, №2. – P. 71–82.

10. REN W., BEARD R.W., KINGSTON D.B. *Multi-Agent Kalman Consensus with Relative uncertainty* // American Control Conference. – 2005, June., Vol. 3. – P. 1865–1870.

METHODS TO CORRECT INERTIAL COORDINATE ESTIMATES IN MOBILE GROUP CONTROL

Roman Belov, «Temp-Avia», Arzamas, engineer-mathematician.

Dmitriy Kazanin, «Temp-Avia», Arzamas Polytechnical institute, Arzamas, engineer-mathematician, post-graduate student (mysterio7@rambler.ru).

Kirill Ogorodnikov, «Temp-Avia», Arzamas Polytechnical institute, Arzamas, technik, student.

Abstract: We study the group of mobile objects as a multi-agent system where each object (an agent) is modeled with a material point on the plane. We develop the control for this system and suggest the method to correct coordinate estimates.

Keywords: multi-agent system, coordinate correction, centralized observer, distributed observer, control, virtual object.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.Ю. Чеботарёвым*

*Поступила в редакцию 10.04.2014.
Опубликована 31.01.2015.*

www.mtas.ru

ИНТЕРНЕТ-сайт теории управления организационными системами

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН



Целью сайта является предоставление специалистам по теории и практике управления организационными системами (ученым, преподавателям, аспирантам, студентам, а также реальным управленцам) доступа к ресурсам, отражающим современное состояние теории и возможности обмена идеями и результатами.

На сайте имеются разделы:

Теория – с обзором теории управления организационными системами, глоссарием, информацией для аспирантов;

Практика – с обзором результатов внедрения механизмов управления в реальных организациях;

Библиография – около 2500 публикаций по теории управления, снабжена классификатором и аннотациями;

Электронная библиотека – около 700 полнотекстовых монографий, статей и учебных пособий;

а также многое другое.

На сайте работает **форум**, на котором можно обсудить вопросы, относящиеся к математике, экономике, управлению организациями, узнать новости теории управления и ознакомиться с планируемыми конференциями и семинарами.

ubs.mtas.ru

Интернет-сайт электронного периодического
научного издания «Управление большими
системами: сборник трудов»

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ИНСТИТУТА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

С 1998 года Институт проблем управления РАН выпускает периодический сборник трудов ученых, занимающихся разработкой и исследованием математических моделей управления большими (социально-экономическими, организационными, организационно-техническими и др.) системами. Все статьи, публикуемые в сборнике, проходят рецензирование ведущими специалистами по теории управления.

С 2006 года сборник "Управление большими системами" вместе с ведущим журналом ИПУ РАН "Проблемы управления" – включены в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

С июля 2007 года Сборник входит в список ВАК (перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук):

- * по управлению, вычислительной технике и информатике (для докторов наук);

- * по электронике, измерительной технике, радиотехнике и связи; по энергетике (для кандидатов наук).

**Уважаемые коллеги! Приглашаем Вас опубликовать
Вашу статью в очередном выпуске сборника
"Управление большими системами"!**

Периодичность сборника - 4 раза в год. Время выхода прошедшей рецензирования статьи - 3-4 месяца. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.