УДК 517.977.5
ББК 01.01.01

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ПОЗАКАЗНОГО ПРОИЗВОДСТВА ПО ФИНАНСОВЫМ И ВРЕМЕННЫМ КРИТЕРИЯМ

Гераськин М. И.[1], **Егорова В. В.**[2]
(*Национальный исследовательский университет «Самарский государственный аэрокосмический университет имени С.П. Королева», Самара*)

Рассматривается проблема планирования оптимальных заказов ресурсов производственных фирм в отраслях промежуточной переработки, производящих товары конечного потребления и спрос на продукцию которых определяется ограниченным кругом покупателей. На основе анализа факторов, предопределяющих позаказную систему планирования фирм на рынках олигопсонии, разработаны модели оптимизации заказов производственных ресурсов фирмы по критериям прибыли, а также производственного и операционного циклов при монотонно возрастающих трендах параметров издержек, выручки и денежного потока с учетом ценовых и технологических ограничений. Сформированы аналитические механизмы оптимального планирования заказов, на основе которых для фирм подшипниковой промышленности проведено моделирование области компромисса заказов, оптимальных по различным критериям.

Ключевые слова: модель оптимизации, оптимальный механизм планирования, производственный цикл, операционный цикл, прибыль, многокритериальная область компромисса.

[1] *Михаил Иванович Гераськин, доктор экономических наук, профессор* (*Самара, Московское шоссе, д. 34,*(*846*) *267-44-96, innovation@ssau.ru*)
[2] *Виктория Викторовна Егорова, ассистент* (*Самара, Московское шоссе, д.34,*(*846*) *267-44-96, v_v_egorova@inbox.ru*)

1. Введение

Организация промышленного производства в отраслях промежуточной переработки (машиностроение и металлообработка, в том числе подшипниковая промышленность, производство строительных материалов, электротехническая промышленность и др.) в современной мировой, а также российской экономике базируется на позаказной системе планирования, отражающей олигопсоническую структуру рынка, преобладание которой обусловлено действием следующих факторов. Аккумулирование капитала и концентрация производства в рамках крупных корпораций, доминирующих во второй половине XX века, способствовали обострению ценовой и объемной конкуренции, что, в свою очередь, предопределило перенасыщение рынков конечного потребления и постепенное превращение экономики предложения в экономику спроса, в которой сбыт товаров имеет преобладающее значение над производством. Конкуренция продавцов, в отличие от конкуренции производителей, на современном этапе выражается в наращивании диверсификации ассортимента однотипных товаров за счет расширения многообразия их качеств, что неизбежно приводит к сокращению объемов серий. В различных отраслях, производящих товары конечного потребления (автомобилестроение, производство бытовой техники и электроники, жилищное строительство и др.), систематически обновляются модельные ряды при снижении объемов партий, что обусловливает рост номенклатуры и сокращение объемов заказов в перерабатывающих отраслях.

Позаказная модель планирования основана на стратегической зависимости производителя от заказчика и предопределяет возникновение следующих системных проблем, осложняющих развитие производственных фирм. Колебания спроса сезонного или циклического характера побуждают производителя накапливать значительные запасы материальных ресурсов, что приводит к иммобилизации финансовых ресурсов и упущенной прибыли. Динамичное варьирование ассортимента заказов обусловливает непрогнозируемые потребности в специфических ресурсах, производители которых в связи с этим устанавливают повышенные цены, вследствие чего производственная фирма попадает в стратегическую зависимость также и от поставщиков ресурсов. В результате в условиях позаказного мелкосерийного полиассортиментного производства прибыль фирмы перестает быть основным критерием эффективности; на передний план выходит фактор времени, выражающийся в длительности бизнес-цикла и позволяющий оценить реальную (с учетом недополученной прибыли вследствие иммобилизации в остатках ресурсов), а не номинальную прибыль.

Наряду с отмеченными проблемами фирмы перерабатывающих отраслей, ориентированные на так называемый производный, т.е. обусловленный потребностями конечного потребления, спрос, получают определенное преимущество. Развиваются механизмы стабилизации системы внутрифирменного планирования относительно периодических повторяющихся (сезонно или циклически) подъемов и спадов спроса на конечные продукты. В результате влияние колебаний спроса при постоянных структуре заказчиков и общетехнических требованиях к качеству продукции на длительном ретроспективном временном горизонте приводит к формированию устойчивых трендов важнейших параметров состояния фирм под действием адаптационных механизмов в подсистемах снабжения, производства и сбыта за счет координации с циклическим и сезонным компонентами спроса. В итоге колебательный процесс снабжения синхронизируется с экзогенно заданной динамикой процесса сбыта, что позволяет использовать инструментарий производственных функций для построения моделей взаимосвязей ресурсов с результатами производства (выпуском, выручкой и прибылью).

Таким образом, для большинства современных промышленных фирм сектора промежуточной переработки базовая задача оптимального планирования ассортимента при экзогенной функции спроса и эндогенной функции издержек трансформируется в задачу оптимального планирования заказов ресурсов при экзогенной производственной функции выручки (и издержек) от ресурсов, экзогенных функциях цен ресурсов, и ограничениях по объемам заказов покупателей. При этом критериями оптимальности, наряду с прибылью, являются периоды иммобилизации финансовых ресурсов в фазах производства (производственные циклы) и реализации продукции (операционные циклы), раздельный учет которых играет весомую роль для фирм, имеющих стабильную высокую дебиторскую задолженность и для которых средства в расчетах выступают как особо значимый ресурс.

2. Анализ оптимальных механизмов производственного планирования

В современных исследованиях задача оптимального планирования, как правило, формулировалась для одного из подпроцессов бизнес-процесса промышленной фирмы (заготовления, производства или сбыта) при ограничениях на параметры управления другими подпроцессами; в качестве критерия оптимальности рассматривалась прибыль в форме линейной функции ресурсов, причем игнорировались временные показатели бизнес-процесса.

Однопроцессные модели формулировались в виде задач объемно-календарного оперативного планирования производственной программы [1, 14, 15, 18]. Моделирование этапов заготовления и выпуска исследовалось на основе линейных статических моделей прибыли с учетом ограничений на складские остатки [20]; анализировалось влияние функций спроса покупателей на заготовительные расходы [10]; изучалась взаимосвязь между остатками ресурсов и заказами на продукцию с учетом ограничений на производственные мощности [16, 21], а также влияние различных критериев (издержек, прибыли и выручки) на выбор объемов заказов ресурсов; оптимизировалась отпускная цена производителя с учетом расходов на заготовление и хранение ресурсов [5, 6]. Моделирование этапов заготовления и производства рассматривалось в [7, 22] в форме моделей терминального управления по критерию минимума отклонений производственных расходов от плановых показателей производственной программы; оптимизировалась себестоимость продукции по стадиям технологического процесса производства [8, 13].

Комплексное моделирование процессов заготовления, производства и сбыта также в рамках линейных моделей прибыли проводилось путем оптимизации производственной программы при ограничениях на поставки сырья, производственные и складские мощности [17]. Многопроцессные модели оптимизации формулировались в виде задач с несколькими критериями: рассматривалось календарное планирование с нечеткими ограничениями по критериям прибыли и затрат [3]; оптимизировался ассортимент выпускаемой продукции по критериям объема продаж, прибыли, себестоимости и трудоемкости [23]; оптимизировались проекты с точки зрения критериев времени и стоимости выполнения [9].

Таким образом, современные механизмы оптимального производственного планирования не учитывают, во-первых, наличия устойчивых взаимосвязей между показателями различных подпроцессов бизнес-процесса фирмы, в том числе в виде нелинейных зависимостей; во-вторых, существенности временного фактора в виде производственных и операционных циклов иммобилизации ресурсов наряду с финансовым фактором (прибылью) для выбора целей оптимизации. Поэтому актуальной представляется задача разработки оптимальных механизмов планирования заказов ресурсов для реализации заданной производственной программы с позиций комплекса временных и финансовых критериев оптимальности.

3. Модели оптимального планирования позаказного производства

Рассматривается задача оптимального планирования заказов производственных ресурсов в бизнес-процессе фирмы по критериям, характеризующим временную и финансовую эффективность:

(1) $\min F_1(u)$,

(2) $\min F_2(u)$,

(3) $\max F_3(u)$,

где F_1, F_2 – длительности производственного и операционного циклов фирмы, F_3 – прибыль фирмы. Матрица параметров управления включает в себя объемы заказов (предъявлений требований к поставке или оплате) ресурсов на различных стадиях производственного процесса:

(4) $$u = \left\{ u_i^j, i = 1, ..., 4, j = 1, ..., J_i \right\}.$$

В качестве ресурсов исследуются такие виды (обозначены индексом i), как материалы, незавершенное производство (НЗП), готовая продукция, средства в расчетах, номенклатура которых обозначена индексом j.

Критерии эффективности определяются по формулам

(5) $$F_1(u) = \frac{T}{C(u)} \left(u_\Sigma^0 + \frac{u_1 + P(u) - C(u)}{2} \right), \; u_\Sigma^0 = \sum_{i=1}^{3} u_i^0,$$

(6) $$F_2(u) = F_1(u) + \frac{T}{R(u)} \left(u_4^0 + \frac{R(u) - g(u)}{2} \right),$$

(7) $$F_3(u) = R(u) - C(u),$$

где T – продолжительность периода (в днях); u_i^0, $i = 1, \ldots, 4$ – остатки ресурсов (материалов, НЗП, готовой продукции, средств в расчетах соответственно) на начало периода; R, C – выручка и себестоимость продаж за период; P – нематериальные производственные расходы за период (расходы на оплату труда, социальные отчисления, амортизация и прочие расходы); g – денежный поток от покупателей за период.

Поскольку выражения циклов (5), (6) включают в себя в качестве аргумента в явном виде объем заказов материальных ресурсов u_1, представим функции нематериальных расходов, издержек и выручки также в зависимости от этого аргумента, что позволит свести задачу многомерной оптимизации (1)–(3) к оптимизации функций одной переменной u_1. Для этого *предположим наличие устойчивых взаимосвязанных трендов* динамики объемов заказов на продукцию фирмы и объемов заказов ресурсов на различных стадиях производства в виде функций материалоемкости производства $P(u_1), P_{u_1}^{/}(u_1) > 0$, материалоемкости выпуска продукции $C(u_1), C_{u_1}^{/}(u_1) > 0$, материалоемкости отгруженной продукции $R(u_1), R_{u_1}^{/}(u_1) > 0$, материалоемкости денежного потока $g(u_1), g^{/}_{u_1}(u_1) > 0$. Рассмотрим следующие модели этих трендов в виде степенных функций связи параметров управления и состояния фирмы:

(8) $P(u_1) = B_P u_1^{\beta_P}, \quad B_P > 0, \quad 0 < \beta_P < 2$,

(9) $C(u_1) = B_C u_1^{\beta_C}, \quad B_C > 0, \quad 0 < \beta_C < 2$,

(10) $R(u_1) = B_R u_1^{\beta_R}, \quad B_R > 0, \quad 0 < \beta_R < 2$,

(11) $g(u_1) = B_g u_1^{\beta_g}, \quad B_g > 0, \quad 0 < \beta_g < 2$,

где B_C, B_P, B_R, B_g, β_C, β_P, β_R, β_g – коэффициенты регрессионных моделей, ограничение $0 < \beta < 2$ наложено в связи с реальным характером эффекта расширения масштаба [2]. Отметим, что функции (8)–(11) могут не отражать непосредственные регрессионные связи с аргументом u_1, а формируются путем выявления наиболее коррелируемых из компонентов матрицы (4), а затем последовательного получения регрессий, как будет показано при моделировании.

Также *предположим наличие убывающих трендов цен* ресурсов, закупаемых фирмой, $z_{j_1} = z_{j_1}(u_{1j_1}), j_1 = 1,\dots, J_1, z^{/}_{j_1 u} < 0$, моделируемых в виде степенных функций:

(12) $z_{j_1}(u_{1j_1}) = A_{zj_1} u_1^{\alpha_{zj_1}}, \quad \alpha_{zj_1} < 0, \quad j_1 = 1,\dots, J_1$,

где A_{zj_1}, α_{zj_1} – коэффициенты регрессионных моделей цен ресурсов.

Учитываются следующие ограничения на управление. Ограничение по нормативу потребности ресурсов в зависимости от объема заказов покупателей определяется исходя из норм расхода материалов, а также наличных остатков готовой продукции и НЗП:

$$u_1^{\max}\left(N\right) \ge u_1 \ge u_1^{\min}\left(N\right),$$

(13) $$u_{1j_3}^{\max(\min)} = \sum_{j_1=1}^{J_1}\left[z_{j_1} \sum_{j_3=1}^{J_3} m_{j_1 j_3}\left(N_{j_3}^{\max(\min)} - u_{3j_3}^0 - k_{j_3}\cdot u_{2j_3}^0 \right)\right],$$

где $m_{j_1 j_3}$ – массовый норматив расхода j_1-го ресурса на производство единицы продукции j_3-го типа; $N_{j_3}^{\max(\min)}$ – диапазон колебаний спроса на продукцию j_3-го типа; k_{j_3} – коэффициент выхода готового изделия j_3-го типа из НЗП; z_{j_1} – закупочная цена j_1-го ресурса (за единицу массы).

Ограничение по предельному уровню заготовительных издержек

(14) $u_1 \geq u_1^{\min}\left(z\right)$

обусловлено ростом цены ресурсов при снижении u_1 по тренду (12).

Сформулируем задачи оптимизации заказов ресурсов по временным и финансовым критериям:

(15) $u_{1(1)}^{*} = \arg\min\limits_{u_1 \in U} F_1(u_1)$,

(16) $u_{1(2)}^{*} = \arg\min\limits_{u_1 \in U} F_2(u_1)$,

(17) $u_{1(3)}^{*} = \arg\max\limits_{u_1 \in U} F_3(u_1)$,

с учетом ограничений

(18) $U = \left\{u_1 \in R^{+} \middle| u_1^{\max}\left(N\right) \geq u_1 \geq u_1^{\min}\left(N\right), u_1 \geq u_1^{\min}\left(z\right)\right\}$,

где U – область допустимых значений u_1.

4. Механизмы оптимального планирования заказов ресурсов

4.1. МЕХАНИЗМ МИНИМИЗАЦИИ ИЗДЕРЖЕК

В подразделе решена вспомогательная задача оценки нижней границы заказов ресурсов для ограничения (14). Определим граничное условие в ограничении (14) исходя из условия минимума суммарных производственных расходов

(19) $P_{\Sigma}(u) = \sum\limits_{j_1=1}^{J_1} z_{j_1}\left(u_{1j_1}\right)u_{1j_1} + P\left(u_1\right)$.

Утверждение 1. Минимум суммарных производственных расходов (19) при трендах вида (8), (12) достигается для неотрицательного аргумента $u_{1j_1}^{\min} \geq 0$ при условиях

(20) $$u_{1j_1}^{\min}(z)=\left(\frac{B_P\beta_P}{-\left(\alpha_{z\,j_1}+1\right)\ A_{z\,j_1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{zj_1}}}\left(\sum_{j_1=1}^{J_1}u_{1j_1}^{\min}(z)\right)^{\frac{\beta_P-1}{\alpha_{zj_1}}},$$

$$j_1=1,\dots,J_1,$$

$$\beta_P\le 1\cap\alpha_{z\,j_1}<-1\cap$$

(21) $$\cap A_{z\,j_1}\left(\alpha_{z\,j_1}+1\right)\alpha_{z\,j_1}u_{1j_1}^{\alpha_{z\,j_1}-1}>B_P\beta_P\left|\beta_P-1\right|\left(\sum_{j_1=1}^{J_1}u_{1j_1}\right)^{\beta_P-2}.$$

Выполнение достаточного условия минимума суммарных производственных расходов (21) соответствует высокоэластичным кривым цен ресурсов ($\alpha_{zj_1}<-1$). Как правило, на практике реализуется случай низкоэластичной кривой цены ($\left|\alpha_{zj_1}\right|<1$), следовательно, ограничение (14) не играет роли, поскольку минимум производственных расходов достигается при $u_{1j_1}^{\min}<0$. Отметим, что условие (21) выполняется при типичном для производственных фирм замедленном росте нематериальных расходов по увеличением заказов ресурсов ($\beta_P\le 1$).

В предположении, что фирма использует однотипные материальные производственные ресурсы, можно приближенно заменить фактические значения коэффициентов функций цен и объемов заказов ресурсов на средние значения (обозначены $\bar{\alpha}_z,\bar{A}_z,\bar{u}_1^{\min}$); тогда уравнение (20) имеет аналитическое решение

(22) $$\bar{u}_1^{\min}(z)=\left(-\frac{B_P\beta_P J_1^{\beta_P-1}}{\left(\bar{\alpha}_z+1\right)\ \bar{A}_z}\right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}_z-\beta_P-1}}.$$

Таким образом, нижняя граница заказов ресурсов действует при низкоэластичной кривой цены и определяется по (22).

Далее сформируем механизмы оптимального планирования заказов ресурсов по критериям (1)–(3) без учета ограничений (18), обозначив оптимальные заказы u_{1F1}^*, u_{1F2}^*, u_{1F3}^*. Предварительно отметим, что совместный анализ трендов (8), (9) показывает, что темпы роста нематериальных расходов и издержек должны удовлетворять соотношению

(23) $\beta_P < \beta_C + 1$,

поскольку в противном случае ($\beta_P > \beta_C + 1$) рост нематериальных расходов должен значительно опережать рост себестоимости, что в невозможно промышленности, для которой характерна высокая материалоемкость. Аналогично, анализ трендов (10), (11) приводит к следующему практическому ограничению на соотношение темпов роста выручки и денежного потока от покупателей

(24) $\beta_g < \beta_R + 1$,

поскольку обратное соотношение ($\beta_g > \beta_R + 1$) означает опережающий рост денежного потока относительно роста объема отгруженной продукции, что невозможно в долгосрочной тенденции.

4.2. МЕХАНИЗМ МИНИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ЦИКЛА

В подразделе определим механизм оптимального планирования заказов ресурсов по критерию минимума производственного цикла.

Утверждение 2. Минимум длительности производственного цикла (5) при трендах (8), (9) с учетом (23) достигается для неотрицательного аргумента $u^*_{1F1} \geq 0$, удовлетворяющего условиям

(25) $-2u^0_\Sigma \beta_c + (1-\beta_c)u^*_{1F1} + B_p(\beta_p - \beta_c)u^{*\beta p}_{1F1} = 0$,

(26) $u^*_{1F1} \in U_1 = \left\{ \begin{matrix} \beta_C > \beta_P \cup \beta_C < \beta_P \cap \beta_C + 1 > \beta_P \cap \\ \cap \varphi\left(\beta_C, \beta_P, u^0_\Sigma, u_1\right) > 0 \end{matrix} \right\}$,

где введено обозначение

$$\varphi\left(\beta_C, \beta_P, u^0_\Sigma, u_1\right) = \beta_C\left[2\left(\beta_C + 1\right)u^0_\Sigma + \beta_C - 1\right] u_1 +$$
$$B_P\left|\beta_C - \beta_P\right|(\beta_C + 1 - \beta_P)u_1^{\beta p}.$$

В некоторых частных, но характерных случаях, уравнение (25) можно решить аналитически в виде следующих механизмов оптимизации заказов ресурсов по критерию длительности производственного цикла, области применимости которых определены с учетом $u^*_{1F1} \geq 0$:

(27) $u^*_{1F1} = \left(\dfrac{2u^0_{\Sigma}\beta_C}{B_P(\beta_P - \beta_C)} \right)^{1/\beta_P}$ $\forall \beta_C \approx 1$, при $\beta_P > \beta_C$,

(28) $u^*_{1F1} = \dfrac{2u^0_{\Sigma}\beta_C}{1 - \beta_C}$ $\forall \beta_C \approx \beta_P$, при $\beta_C < 1$,

(29) $u^*_{1F1} = \dfrac{2u^0_{\Sigma}\beta_C}{1 - \beta_C + B_P(\beta_P - \beta_C)}$ $\forall \beta_P \approx 1$, при $\beta_C < \dfrac{1 + B_P\beta_P}{1 + B_P}$,

(30) $u^*_{1F1} = \dfrac{2u^0_{\Sigma}\beta_C - B_P(\beta_P - \beta_C)}{1 - \beta_C}$ $\forall \beta_P << 1$, при $\beta_C < 1$.

Механизм (27), область применимости которого соответствует опережающему росту нематериальных расходов над общими издержками ($\beta_P > \beta_C$), получен из условия прямой пропорциональности себестоимости продукции и заказов ресурсов ($\beta_C \approx 1$), что отражает полное использование материальных ресурсов в производстве; при такой системе планирования не происходит накопления запасов и не возникает дефицит ресурсов. Механизм (28), применимый в случае замедленного роста издержек по сравнению с заказами ресурсов ($\beta_C < 1$), отражает совпадение темпа роста нематериальных производственных расходов с темпом роста себестоимости ($\beta_P \approx \beta_C$) и реализуется в условиях жестких технологических нормативов, обеспечивающих постоянное соотношение общих издержек и нематериальных расходов, что типично при системе планирования нормативного планирования (стандарт-костинг). Механизм (29), применимый, как правило, в случае $\beta_C < 1$, поскольку обычно $\beta_P < 1$, соответствует концепции нормативного планирования, как и вариант (28), но при условии установления постоянного соотношения между заказами материальных ресурсов и уровнем нематериальных расходов ($\beta_P \approx 1$). Наконец, вариант (30) типичен для фирм, производственный процесс которых отличается высокой материалоемкостью (металлургия, машиностроение и металлообработка, промышленность строительных материалов), вследствие чего темп роста нематериальных расходов значительно ниже темпа роста затрат материальных ресурсов (β_P << 1); область применимости механизма (30) также соответствует $\beta_C < 1$. Таким образом, аналитические механизмы (27)–(30) применимы для наиболее характерного способа построения производственного процесса современных промышленных фирм, при котором *за счет технологических эффектов темп роста издержек ниже темпа роста материальных ресурсов*.

Анализ механизмов (27)–(30) показывает, что значение u_{1F1}^{*} по порядку величины близко к u_{Σ}^{0}, а поскольку $u_{\Sigma}^{0} >> u_{1}^{0}$, то оптимум цикла имеет место при значениях, существенно превышающих средние остатки материальных ресурсов.

Отметим, что с учетом соотношения порядка величин остатков запасов u_{Σ}^{0}, объема заказов u_{1F1}^{*} и коэффициентов регрессий β_C, β_P выполняется следующее соотношение

$$\beta_C\left[2\left(\beta_C+1\right)u_{\Sigma}^{0}+\beta_C-1\right]\ u_1 >> B_P\left|\beta_C-\beta_P\right|(\beta_C+1-\beta_P)u_1^{\beta p},$$

поэтому достаточное условие (26) выполняется практически для всех $u_{1F1}^{*} \geq 0$, следовательно

(31) $\varphi\left(\beta_C,\beta_P,u_{\Sigma}^{0},u_1\right)>0 \quad \forall u_{1F1}^{*} \geq 0$.

Условие (31) используем в дальнейшем для анализа достаточных условий минимума операционного цикла и максимума прибыли.

Полученные приближенные механизмы оптимального планирования заказов ресурсов по критерию минимума производственного цикла (27)–(30) определяют решение задачи (1) в практически важных ситуациях.

4.3. МЕХАНИЗМ МИНИМИЗАЦИИ ОПЕРАЦИОННОГО ЦИКЛА

В подразделе определим механизм оптимального планирования заказов ресурсов по критерию минимума операционного цикла.

Утверждение 3. Минимум длительности операционного цикла (6) при трендах (8)–(11) с учетом (23), (24) достигается для неотрицательного аргумента $u_{1F2}^{*} \geq 0$, удовлетворяющего условиям

(32)
$$-\beta_c \frac{u_{\Sigma}^{0}}{B_c} + \frac{1-\beta_c}{2B_c} u_{1F2}^{*} + \frac{B_p}{2B_c}(\beta_p - \beta_c) u_{1F2}^{*\beta p} -$$
$$-\beta_R \frac{u_4^0}{B_R} u_{1F2}^{*-\beta_R+\beta_c} - \frac{B_g}{2B_R}\left(\beta_g - \beta_R\right) u_{1F2}^{*\beta_g-\beta_R+\beta_c} = 0,$$

(33)
$$u_{1F2}^{*} \in U_2 =$$
$$= \begin{cases} \left(\beta_g > \beta_R \cap \beta_g < \beta_R + 1\right) \forall u_{1F2}^{*}, \\ \beta_g \leq \beta_R \cap \varphi\left(\beta_C, \beta_P, u_{\Sigma}^{0}, u_{1F2}^{*}\right) + \beta_R\left(\beta_R + 1\right) \frac{u_4^0}{B_R} u_{1F2}^{*-\beta_R-2} + \\ + \frac{B_g}{2B_R}\left(\beta_g - \beta_R\right)\left(\beta_R + 1 - \beta_g\right) u_{1F2}^{*\beta_g-\beta_R-2} > 0. \end{cases}$$

В характерных частных случаях уравнение (32) можно решить аналитически в виде следующих механизмов оптимизации заказов ресурсов по критерию длительности операционного цикла:

(34)
$$u_{1F2}^{*} = \frac{2\left(B_R \beta_C u_{\Sigma}^{0} + B_C \beta_R u_4^0\right)}{B_g B_C\left(\beta_g - \beta_R\right) - B_R\left(1-\beta_C\right) - B_P B_R(\beta_P - \beta_C)}$$
$$\forall \beta_P \approx 1 \cap \beta_C \approx 1 \cap \beta_R \approx \beta_C \cap \beta_R \approx \beta_g,$$

(35)
$$u_{1F2}^{*} = \frac{2\left(B_R \beta_C u_{\Sigma}^{0} + B_C \beta_R u_4^0\right) - B_P B_R(\beta_P - \beta_C)}{B_R\left(1-\beta_C\right) - B_g B_C\left(\beta_g - \beta_R\right)} \forall$$
$$\beta_P << 1 \cap \beta_C \approx \beta_R \cap \beta_g \approx 1.$$

Области применимости механизмов (34), (35), определим из условия $u_{1F2}^{*} \geq 0$ с учетом того, что числители этих выражений неотрицательны (для формулы (35) это следует из условия $\beta_P < \beta_C$) в виде ограничений положительности знаменателей:

(34a) $$B_g B_C\left(\beta_g - \beta_R\right) - B_R\left(1-\beta_C\right) - B_P B_R(\beta_P - \beta_C) > 0,$$

(35a) $$B_R\left(1-\beta_C\right) - B_g B_C\left(\beta_g - \beta_R\right) > 0.$$

Ограничение (35а) выполняется в случае замедленного роста издержек ($\beta_C < 1$) и опережающего роста выручки над ростом денежного потока ($\beta_R > \beta_g$), а также в случае $\beta_R < \beta_g$, но при условии $B_R (1 - \beta_C) > B_g B_C|\beta_g - \beta_R|$. Ограничение (34а) выполняется при противоположных соотношениях темповых параметров: при $\beta_C > 1$ для случая $\beta_R < \beta_g$, а при $\beta_C < 1$ – в случае $B_P B_R (\beta_P - \beta_C) > B_g B_C(\beta_g - \beta_R) + B_R (1 - \beta_C)$.

Вариант (34) аналогичен рассмотренной выше комбинации случаев (27), (28) и характеризуется строгим соответствием объемов заказов ресурсов программе выпуска ($\beta_C \approx 1$) при соблюдении нормативов нематериальных расходов ($\beta_P \approx \beta_C \approx 1$) по отношению к темпу изменения общих издержек, а также нормативов производства продукции в соответствии с темпами роста спроса ($\beta_R \approx \beta_C$); но, наряду с этим, бизнес-процесс фирмы отличается строгой платежно-расчетной дисциплиной покупателей, когда темп роста отгруженной продукции не существенно отличен от темпа роста денежного потока $\beta_R \approx \beta_g$. Вариант (35) соответствует производству с высокой материалоемкостью (как и в случае (30), $\beta_P << 1$), в котором контролируется норматив выпуска продукции в соответствии с темпами роста спроса ($\beta_R \approx \beta_C$), т.е. не происходит значительного накопления товарных остатков ($\beta_R < \beta_C$), а также отсутствует выраженная тенденция роста отпускных цен товаров, опережающего рост цен ресурсов ($\beta_R > \beta_C$); кроме того, система снабжения фирмы скоординирована с динамикой денежного потока ($\beta_g \approx 1$), что характерно для фирм, поставщики которых отпускаю ресурсы на основе предварительной оплаты.

Поскольку из (34), (35) следует, что u^*_{1F2} по порядку величины близко к $u^0_\Sigma + u^0_4$, то оптимум операционного цикла достигается при объеме заказов ресурсов, значительно превышающем средние остатки ресурсов.

Достаточное условие минимума длительности операционного цикла (33) соблюдается в случае опережающего роста денежного потока по сравнению с ростом выручки ($\beta_R < \beta_g < \beta_R + 1$), а также если темп роста денежного потока не превышает темп роста отгруженной продукции ($\beta_g \leq \beta_R$) при дополнительном ограничении, которое, введя упрощающие предположения, экономически описанные выше, $\beta_P \approx \beta_C \approx 1$, $\beta_R \approx \beta_g \approx 1$, представим в виде неравенства

$$\beta_C(\beta_C - 1)\left[2u_\Sigma^0 + u_{1F2}^*\right] + B_P(\beta_P - \beta_C)(\beta_P - \beta_C - 1)u_{1F2}^* +$$

$$+\beta_R\left(\beta_R + 1\right)\frac{u_4^0}{B_R}u_{1F2}^{*-3} - \frac{B_g}{2B_R}\left(\beta_g - \beta_R\right)\left(\beta_g - \beta_R - 1\right)u_{1F2}^{*-2} > 0,$$

отсюда, пренебрегая несущественными слагаемыми (полагая $u_4^0 \cong u_{1F2}^*, u_{1F2}^{*-2} << u_{1F2}^*$), получим

$$u_{1F2}^* > -\frac{\beta_C(\beta_C - 1)2u_\Sigma^0}{\beta_C(\beta_C - 1) + B_P(\beta_P - \beta_C)(\beta_P - \beta_C - 1)},$$

которое при тех же условиях, что и достаточное условие минимума производственного цикла (26) ($\beta_C > 1$, $\beta_P < \beta_C$) выполняется для неотрицательных аргументов $u_{1F2}^* \geq 0$.

Таким образом, механизмы оптимального планирования заказов ресурсов по критерию минимума операционного цикла (34), (35) определяют решение задачи (2) в практически важных ситуациях.

4.3. МЕХАНИЗМЫ МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ И КОМПЛЕКСНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В подразделе определим механизм оптимального планирования заказов ресурсов по критерию максимума прибыли.

Утверждение 4. Максимум прибыли (7) при трендах (9), (10) достигается при неотрицательном значении аргумента $u_{1F3}^* \geq 0$, удовлетворяющим условиям

(36) $$u_{1F3}^* = \left(\frac{B_R\beta_R}{B_C\beta_C}\right)^{\frac{\beta_R - 1}{\beta_C - 1}},$$

$$(37)\ u_{1F3}^{*} \in U_3 = \begin{cases} \beta_C > 1 \cap \left\{ \left(\beta_R > 1 \cap \dfrac{B_R(\beta_R - 1)\beta_R}{B_C(\beta_C - 1)\beta_C} < u_{1F3}^{*\frac{\beta_C - 2}{\beta_R - 2}} \right) \cup \right. \\ \left. \cup \left(\beta_R < 1 \forall \cap u_{1F3}^{*} > 0 \right) \right\}, \\ \beta_C < 1 \cap \left\{ \left[\beta_R < 1 \cap \dfrac{B_R(\beta_R - 1)\beta_R}{B_C(\beta_C - 1)\beta_C} > u_{1F3}^{*\frac{\beta_C - 2}{\beta_R - 2}} \right] \cup \right. \\ \left. \cup \left[\beta_C < 1 \cap \beta_R > 1 \right] \right\}. \end{cases}$$

Анализ механизма оптимизации прибыли фирмы показывает, что оптимум прибыли u_{1F3}^{*} возрастает с увеличением коэффициентов регрессии выручки B_R, β_R и снижается с ростом коэффициентов регрессии издержек B_C, β_C. Сравнение этих тенденций с механизмами оптимизации циклов фирмы приводит к следующим выводам: из механизмов (27)–(30) следует, что с увеличением темпа регрессии издержек β_C оптимум производственного цикла растет, а параметры B_C, B_R, β_R на этот оптимум не влияют, т.е. критерии прибыли и производственного цикла противоречивы по β_C; механизмы (34), (35) показывают, что оптимум операционного цикла опережающим образом растет с увеличением темпа регрессии издержек β_C даже на фоне роста β_R (поскольку $u_{\Sigma}^{0} >> u_{4}^{0}$), поэтому критерии прибыли и операционного цикла противоречивы по β_C. Следовательно, *изменение эндогенной функции издержек фирмы оказывает противоречивое влияние на финансовый и временные критерии бизнес-процесса*.

Поскольку в механизме (36) коэффициенты регрессий B_R, B_C и β_R, β_C есть величины соответственно одного порядка, то максимизирующее прибыль значение u_{1F3}^{*} должно быть не велико.

Достаточное условие максимума прибыли для случая $\beta_C < 1$, при котором анализировались достаточные условия минимума циклов, приводит к выводу, что максимум прибыли достигается практически при любом неотрицательном значении аргумента $u_{1F3}^* \geq 0$, поскольку из (37) следует, что должно выполняться условие замедленного по сравнению с нарастанием заказов темпа роста выручки ($\beta_R < 1$), а также неравенство

$$u_{1F3}^{*\frac{\beta_C - 2}{\beta_R - 2}} > \frac{B_R\left(\beta_R - 1\right)\beta_R}{B_C\left(\beta_C - 1\right)\beta_C},$$

в котором

$$\frac{\beta_C - 2}{\beta_R - 2} \approx 1, \frac{B_R\left(\beta_R - 1\right)\beta_R}{B_C\left(\beta_C - 1\right)\beta_C} \approx 1,$$

так как соответствующие коэффициенты регрессий являются величинами одного порядка. В случае $\beta_C < 1$ значение u_{1F3}^*, соответствующее условию (37), должно быть порядка единицы, что для реальных фирм равносильно закрытию, поэтому данный случай в дальнейшем не рассматривается.

Утверждение 5. Механизмы

$$(38)\quad u_{1(k)}^* = \max\left\{\begin{matrix} \min\left\{u_{1Fk}^*, u_1^{\min}(N), u_1^{\min}(z)\right\}, \\ u_1^{\max}(N) \end{matrix}\right\}, \quad k = 1, 2, 3,$$

являются решениями задач оптимизации (15)–(17) при ограничении (18), если

$$(39)\quad U_k \cap U \neq \otimes, \quad k = 1, 2, 3.$$

Механизмы (38) определяют единственное решение из области компромисса для противоречивых, в общем случае, критериев (15)–(17).

5. Моделирование оптимальных механизмов

Сформируем модели (8)–(11) на основе ретроспективной информации о квартальной динамике технико-экономических показателей ООО «Завод приборных подшипников» [12] за период 2011–2013 гг.

На основе динамических рядов параметров управления $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, 3$, и параметров состояния $P(t)$, $C(t)$, $R(t)$, $g(t)$ (где t – номер квартала) рассчитаем коэффициенты парной корреляции (таблица 1), анализ которых приводит к следующим выводам. Имеется выраженная (по шкале Чеддока [11] коэффициент корреляции более 0,7) связь между параметрами управления u_2 и u_1, u_3 и u_2, подтверждающая выдвинутую гипотезу о наличии устойчивых трендов изменения объемов заказов на последовательных стадиях бизнес-процесса фирмы и позволяющая сформировать задачи одномерной оптимизации (15)–(18), поскольку видна также тесная корреляционная связь параметров состояния P, C, R, g и параметра u_3.

Поэтому сформируем регрессии (8)–(11) на основе следующих вспомогательных функций:

$$(40)\quad u_3(u_2) = A_{u_3} u_2^{\alpha_{u3}},\ u_2(u_1) = A_{u_2} u_1^{\alpha_{u_2}},\ P(u_3) = A_P u_3^{\alpha_P},$$

$$C(u_3) = A_C u_3^{\alpha_C},\ g\left(u_4\right) = A_g u_4^{\alpha_g},\ R(u_3) = A_{u_4} u_3^{\alpha_{u4}}.$$

Определение коэффициентов регрессий (40) методом наименьших квадратов позволило получить функции, адекватно описывающие фактические временные ряды (коэффициент детерминации свыше 0,9). На основе (40) получим регрессии (8)–(12), преобразовав их к годовым показателям с учетом

$$B_{T(k)} = B_{t(k)} \cdot 4^{1-\beta_{t(k)}}$$

(где $k = P, C, R, g$, индекс T обозначает годовое значение):

$$(41)\quad P(u_1) = 8585 \cdot u_1^{0,3},\ C(u_1) = 45 \cdot u_1^{0,76},$$

$$g(u_1) = 144 \cdot u_1^{0,7}, R(u_1) = 151 \cdot u_1^{0,7}.$$

Анализ динамических рядов цен и объемов поставок основных материалов, используемых фирмой, подтвердил правомерность гипотезы (12) об убывающих ценовых трендах и позволил сформировать однофакторные регрессии в виде:

$$(42)\quad z_1(u_1^1) = 205 \cdot u_1^{-0,3},\ z_2(u_1^2) = 105 \cdot u_1^{-0,2}.$$

На рис. 1–3 представлены фактические значения цен материалов и параметров состояния бизнес-процесса фирмы, а также регрессионные модели (41), (42), имеющие характерную нелинейную динамику. На рис. 3 видно соответствие регрессионных моделей фактической динамике закупочных цен металлов.

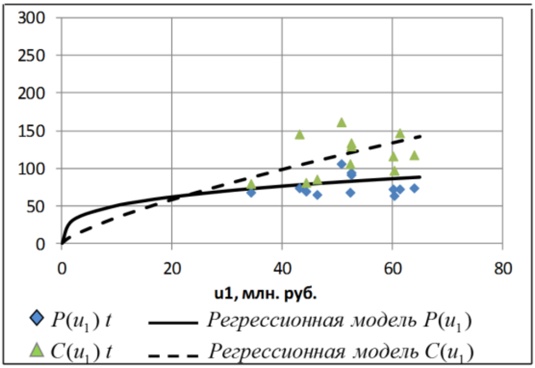

Рис. 1. Динамика изменения производственных расходов и себестоимости в 2011–2013 гг., млн руб.

Таблица 1. Матрица коэффициентов корреляции параметров управления и состояния

Показатель, тыс. руб.	u_1	u_2	u_3	$R(u_4)$	C	P	g
u_1		0,80	0,35	0,51	0,35	0,06	0,51
u_2			0,71	0,68	0,62	0,30	0,61
u_3				0,89	0,93	0,77	0,83
$R(u_4)$					0,93	0,69	0,94
C						0,71	0,89
P							0,61
g							

В таблице 2 представлены результаты анализа точности приближенных механизмов (27)–(29), по которым вычислены значения u^*_{1F1} (млн руб.) и относительные отклонения Δ (%) от точных значений по формуле (25). Погрешность формул (27)–(29) убывает либо не меняется с увеличением начальных остатков ресурсов u^0_Σ (млн руб.) и коэффициента регрессии издержек β_C, не превышая 18,73% на границах диапазона практически реализуемых значений. В данной таблице не представлены результаты анализа точности механизма (30) в связи с отсутствием положительных значений u_{1F1}^{*} при заданных коэффициентах регрессий.

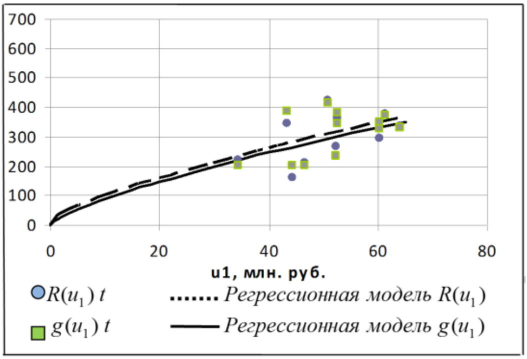

Рис. 2. Динамика изменения выручки от реализации и денежного потока в 2011–2013 гг., млн руб.

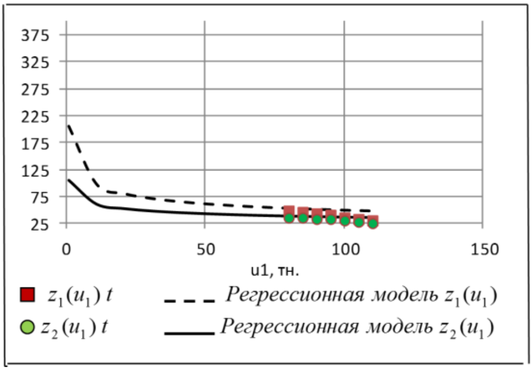

Рис. 3. Динамика изменения закупочных цен металлов ООО «ЗПП» в 2011–2013 гг., т

Таблица 2. Анализ оптимальных механизмов модели (15)

u_{Σ}^{0}	$\beta_P = 1,\ \beta_C = 0{,}93$			$\beta_P = 1,\ \beta_C = 0{,}95$		
	u_{1F1}^{*} (25)	u_{1F1}^{*} (27)	Δ,%	u_{1F1}^{*} (25)	u_{1F1}^{*} (27)	Δ,%
100 000	91 626	94 898	3,57%	131 034	135 714	3,57%

u_{Σ}^{0}	$\beta_P = 1$, $\beta_C = 0{,}93$			$\beta_P = 1$, $\beta_C = 0{,}95$		
	$u_{1F1}^{*}\,(25)$	$u_{1F1}^{*}\,(27)$	$\Delta,\%$	$u_{1F1}^{*}\,(25)$	$u_{1F1}^{*}\,(27)$	$\Delta,\%$
200 000	183 251	189 796	3,57%	262 069	271 429	3,57%
300 000	274 877	284 694	3,57%	393 103	407 143	3,57%
u_{Σ}^{0}	$\beta_P = 0{,}45$, $\beta_C = 0{,}35$			$\beta_P = 0{,}4$, $\beta_C = 0{,}3$		
	$u_{1F1}^{*}\,(25)$	$u_{1F1}^{*}\,(28)$	$\Delta,\%$	$u_{1F1}^{*}\,(25)$	$u_{1F1}^{*}\,(28)$	$\Delta,\%$
100 000	106 903	107 692	0,74%	85 339	85 714	0,44%
200 000	214 305	215 385	0,50%	170 933	171 429	0,29%
300 000	321 781	323 077	0,40%	256 560	257 143	0,23%
u_{Σ}^{0}	$\beta_P = 0{,}88$, $\beta_C = 0{,}7$			$\beta_P = 0{,}9$, $\beta_C = 0{,}75$		
	$u_{1F1}^{*}\,(25)$	$u_{1F1}^{*}\,(29)$	$\Delta,\%$	$u_{1F1}^{*}\,(25)$	$u_{1F1}^{*}\,(29)$	$\Delta,\%$
100 000	88 329	104 869	18,73 %	94 605	101 124	6,89%
200 000	190 220	209 738	10,26 %	201 581	202 247	0,33%
300 000	297 739	314 607	5,67%	313 657	303 371	-3,28%

В таблице 3 представлены результаты анализа точности приближенных механизмов (34)–(35), по которым вычислены значения u_{1F1}^{*} (млн руб.) и относительные отклонения $\Delta\,(\%)$ от точных значений по формуле (32).

Погрешность формул (34)–(35) убывает с увеличением начальных остатков ресурсов u_{Σ}^{0} (млн руб.), остатков дебиторской задолженности u_{4}^{0} и коэффициенты регрессии издержек

β_C, не превышая 22,39% на границах диапазона практически реализуемых значений.

Таблица 3. Анализ оптимальных механизмов модели (*16*)

<table>
<tr><td rowspan="2">u_Σ^0</td><td rowspan="2">u_4^0</td><td colspan="3">$\beta_P = 0{,}96$, $\beta_C = 0{,}83$, $\beta_R = 0{,}78$, $\beta_g = 0{,}83$</td><td colspan="3">$\beta_P = 1$, $\beta_C = 0{,}92$, $\beta_R = 0{,}9$, $\beta_g = 0{,}9$</td></tr>
<tr><td>u_{1F1}^* (32)</td><td>u_{1F1}^* (34)</td><td>Δ,%</td><td>u_{1F1}^* (32)</td><td>u_{1F1}^* (34)</td><td>Δ,%</td></tr>
<tr><td>100 000</td><td>50 000</td><td>100 092</td><td>83 230</td><td>–16,85%</td><td>94 241</td><td>91 184</td><td>–3,24%</td></tr>
<tr><td>200 000</td><td>100 000</td><td>204 944</td><td>166 461</td><td>–18,78%</td><td>188 900</td><td>182 368</td><td>–3,46%</td></tr>
<tr><td>300 000</td><td>200 000</td><td>334 820</td><td>260 156</td><td>–22,30%</td><td>299 048</td><td>285 426</td><td>–4,56%</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">u_Σ^0</td><td rowspan="2">u_4^0</td><td colspan="3">$\beta_P = 0{,}1$, $\beta_C = 1{,}25$, $\beta_R = 0{,}9$, $\beta_g = 0{,}8$</td><td colspan="3">$\beta_P = 0{,}05$, $\beta_C = 1{,}1$, $\beta_R = 0{,}99$, $\beta_g = 0{,}91$</td></tr>
<tr><td>u_{1F1}^* (32)</td><td>u_{1F1}^* (35)</td><td>Δ,%</td><td>u_{1F1}^* (32)</td><td>u_{1F1}^* (35)</td><td>Δ,%</td></tr>
<tr><td>100 000</td><td>50 000</td><td>106 527</td><td>130 029</td><td>22,06%</td><td>110 116</td><td>106 710</td><td>–3,09%</td></tr>
<tr><td>200 000</td><td>100 000</td><td>237 021</td><td>260 042</td><td>9,71%</td><td>222 815</td><td>213 407</td><td>–4,22%</td></tr>
<tr><td>300 000</td><td>200 000</td><td>519 236</td><td>402 960</td><td>–22,39%</td><td>378 115</td><td>333 022</td><td>–11,93%</td></tr>
</table>

На рис. 4 представлены кривая операционного цикла $F_2(u_1)$, рассчитанная по формуле (6) с учетом регрессий (41), и кривая прибыли $F_3(u_1)$ – по формуле (7), график $F_1(u_1)$ не показан в силу его близости к графику $F_2(u_1)$ для данных параметров бизнес-процесса фирмы; также отмечено ограничение (13) в виде

$u_1^{\min}(N)$, а ограничение (14) не показано, поскольку на рынке ресурсов выявлены низкоэластичные ценовые кривые (42), при которых в виду условия (21) данное ограничение не играет роли; показаны фактические значения критериев F_2, F_3, реализовавшиеся в 2013 г. Анализ рис. 4 показывает, что поскольку для исследуемой фирмы $u_{1F3}^* < u_{1F2}^*$, то областью компромиссных по критериям F_2, F_3 объемов заказов ресурсов u_1 является диапазон $u_1 \in \left[u_1^{\min}(N), u_{1F3}^*\right]$, отмеченный отрезком *EG* кривой прибыли; в противном случае область компромисса выражалась бы диапазоном $u_1 \in \left[u_1^{\min}(N), u_{1F2}^*\right]$ (отрезок *DH* кривой цикла). Отметим, что в практически значимом диапазоне значений u_1 критерии F_2, F_3 не противоречивы: прибыль уменьшается с ростом u_1 только при $u_1 > u_{1F3}^*$, а цикл при этом продолжает сокращаться, что отражает низкий темп роста заготовительных издержек фирмы.

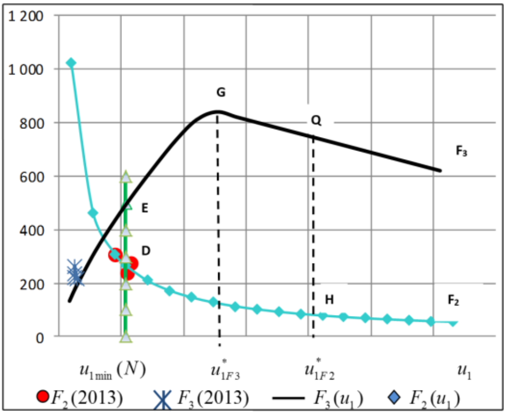

Рис. 4. Расчетные и фактические (при объемах заказов в 2013 г.) значения операционного цикла (дни), ограничение по нормативу потребности ресурсов в зависимости от объема заказов покупателей (млн. руб.), прибыль (млн. руб.)

В соответствии с механизмом (38) решением задачи (15)–(18) является значение $u_1 = u_1^{\min}(N)$, при котором значение прибыли выше, а продолжительность цикла ниже, чем фактические данные 2013 г. Общий экономический эффект при иммобилизации прибыли в запасах может составить 5,8 млн. руб.

6. Заключение

Разработана модель оптимизации заказов производственных ресурсов фирмы по критериям прибыли и бизнес-циклов, адекватная в условиях действия устойчивых нелинейных трендов издержек, выручки, денежного потока и цен ресурсов в зависимости от объема их закупок. Определены оптимальные механизмы планирования заказов ресурсов по каждому критерию, а также механизм решения задачи оптимизации по комплексу критериев. Анализ оптимальных механизмов приводит к следующим выводам.

В практически значимых случаях сопоставимых темпов роста нематериальных расходов и себестоимости, а также темпов роста денежного потока и выручки, существуют значения объемов заказов материалов, минимизирующие длительность бизнес-циклов фирмы. Аргументы оптимумов бизнес-циклов достаточно велики по сравнению со средним уровнем остатков материальных ресурсов, поэтому в реальном диапазоне изменения объема заказов ресурсов длительность циклов убывает с ростом этого показателя. Следовательно, с точки зрения временных критериев оптимальности для фирмы целесообразно наращивать объем заказов ресурсов. Также для практически реализуемых соотношений темпов роста издержек и выручки существует объем заказов ресурсов, максимизирующий прибыль фирмы, причем аргумент оптимума прибыли, как правило, существенно меньше аргументов оптимумов циклов. Поэтому с позиции финансового критерия фирма также заинтересована в повышении объемов заказов ресурсов, а в целом по комплексу временных и финансовых критериев допустимый диапазон изменения объемов заказов ограничен наименьшим из аргументов оптимумов прибыли и циклов. Следовательно, состояние противоречивости критериев наступает только при объемах заказов, превышающих аргумент оптимума прибыли, когда встает необходимость анализа множества Парето. В остальных случаях выбор оптимального по комплексу критериев объема заказов ресурсов определяется на основе сравнительного анализа оптимумов критериев и ограничений по уровню заказов покупателей и по ценовым функциям поставщиков.

7. Приложение

***Обоснование формул* (5), (6):** формулы вытекают из следующих соотношений и преобразований: базовые формулы расчета производственного и операционного циклов [4]

(П1) $F_1(u) = \dfrac{T}{C(u)} \sum_{i=1}^{3} \bar{u}_i \;,\; F_2(u) = F_1(u) + \dfrac{T}{R(u)} \bar{u}_4 \;,$

где $\bar{u}_i$ – средние остатки ресурсов за период, рассчитанные по формулам.

(П2) $\bar{u}_i = \dfrac{u_i^0 + u_i^T}{2}, i = 1,...,4 .$

С учетом соотношений материального, производственного, товарного и платежного балансов [19]

(П3) $u_1 = u_1^T - u_1^0 + u_2 , u_2 = u_2^T - u_2^0 + u_3 - P ,$

$u_3 = u_3^T - u_3^0 + C , u_4 = u_4^T - u_4^0 + g ,$

средние остатки ресурсов определяются в виде

(П4)
$$\bar{u}_1 = u_1^0 + \frac{u_1 - u_2}{2}, \bar{u}_2 = u_2^0 + \frac{u_2 + P - u_3}{2},$$
$$\bar{u}_3 = u_3^0 + \frac{u_3 - C}{2}, \bar{u}_4 = u_4^0 + \frac{u_4 - g}{2},$$

где $u_i\, u_i^T$ – остатки ресурсов на конец периода T. Полагаем средства в расчетах с дебиторами численно равными выручке фирмы за отгруженную продукцию

(П5) $R(u) = u_4 .$

Подставив (П2), (П4), (П5) в (П1), получим (4), (5). ■

Доказательство утверждения 1. Подставим (8), (12) в (19):

(П6) $P_\Sigma = \sum_{j_1=1}^{J_1} A_{zj_1} u_1^{\alpha_{zj_1}+1} + B_P \left(\sum_{j_1=1}^{J_1} u_{1j_1} \right)^{\beta_P} ,$

дифференцируя (П6), запишем необходимое условие минимума (19):

$$P^{/}_{\Sigma u_{1j_1}} = A_{zj_1}\left(\alpha_{zj_1}+1\right)u_1^{\alpha_{zj_1}} + B_P\beta_P\left(\sum_{j_1=1}^{J_1} u_{1j_1}\right)^{\beta_P-1} = 0,\ j_1 = 1,\dots,J_1,$$

откуда получим соотношение (20). Отметим, что неотрицательное решение уравнения (20) соответствует ограничению

(П7) $\alpha_{zj_1} < -1$.

Достаточное условие минимума

(П8) $$P^{//}_{\Sigma u_{1j_1}} = A_{zj_1}\alpha_{zj_1}\left(\alpha_{zj_1}+1\right)u_1^{\alpha_{zj_1}-1} + B_P\beta_P\left(\beta_P-1\right)\left(\sum_{j_1=1}^{J_1} u_{1j_1}\right)^{\beta_P-2} > 0,$$

$$j_1 = 1,\dots,J_1,$$

выполняется при

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_P > 1 \cap B_P\beta_P\left(\beta_P-1\right)\left(\sum\limits_{j_1=1}^{J_1} u_{1j_1}\right)^{\beta_P-2} \geq \\ A_{z\,j_1}\left|\alpha_{z\,j_1}+1\right|\alpha_{z\,j_1}u_{1j_1}^{\alpha_{z\,j_1}-1}, \forall\alpha_{z\,j_1} < 0, \\ \beta_P \leq 1 \cap \alpha_{z\,j_1} < -1 \cap A_{z\,j_1}\left(\alpha_{z\,j_1}+1\right)\alpha_{z\,j_1}u_{1j_1}^{\alpha_{z\,j_1}-1} > \\ B_P\beta_P\left|\beta_P-1\right|\left(\sum\limits_{j_1=1}^{J_1} u_{1j_1}\right)^{\beta_P-2}, \end{array}\right.$$

однако, учитывая (П7), условие (П8) выполняется только при соотношении (21). ■

Доказательство утверждения 2. Исходя из необходимого условия оптимальности (5)

(П9) $$F^{/}_{1u_1}(u_1) = -\beta_c\frac{Tu^0_\Sigma}{B_c}u_1^{-\beta c-1} + \frac{T}{2B_c}(1-\beta_c)u_1^{-\beta c} + \\ +\frac{TB_p}{2B_c}(\beta_p-\beta_c)u_1^{\beta p-\beta c-1} = 0,$$

получим уравнение (25) для определения значения u^*_{1F1}. Достаточное условие минимума (5)

$$F_{1u_1}^{//}(u_1) = -\beta_c(-\beta_c - 1)\frac{Tu_{\Sigma}^0}{B_c}u_1^{-\beta c-2} - \frac{T}{2B_c}(1-\beta_c)\beta_c u_1^{-\beta c-1} +$$

$$+\frac{TB_p}{2B_c}(\beta_p - \beta_c)(\beta_p - \beta_c - 1)u_1^{\beta p-\beta c-2} > 0$$

преобразуем к виду

$$\begin{aligned}(\text{П}10)\quad & \beta_C\left[2\left(\beta_C+1\right)u_{\Sigma}^0 + \beta_C - 1\right]\; u_1 + \\ & +B_P\left(\beta_C - \beta_P\right)(\beta_C + 1 - \beta_P)u_1^{\beta p} > 0.\end{aligned}$$

Поскольку для реальных фирм по порядку величин $u_{\Sigma}^0 >> \beta_C$, то $2\left(\beta_C+1\right)u_{\Sigma}^0 + \beta_C >> 1$; поэтому на знак (П10) влияет только соотношение β_C, β_P. С учетом диапазонов изменения β_C, β_P, определенных (8), (9), условие (П10) выполняется при

$$(\text{П}11)\quad \begin{cases}\beta_C > \beta_P \cup \left[\beta_C < \beta_P \cap \beta_C + 1 < \beta_P\right]\; \forall u_{1F1}^* \ge 0, \\ \beta_C < \beta_P \cap \beta_C + 1 > \beta_P \cap \varphi\left(\beta_C, \beta_P, u_{\Sigma}^0, u_1\right) > 0,\end{cases}$$

где

$$\varphi\left(\beta_C, \beta_P, u_{\Sigma}^0, u_1\right) = \beta_C\left[2\left(\beta_C+1\right)u_{\Sigma}^0 + \beta_C - 1\right]\; u_1 +$$

$$+B_P\left|\beta_C - \beta_P\right|(\beta_C + 1 - \beta_P)u_1^{\beta p}.$$

С учетом (23) условие (П11) имеет вид (26). $\blacksquare$

Доказательство утверждения 3. Запишем необходимое условие оптимума (6):

$$F_{2u_1}^{/}(u_1) = -\beta_C\frac{Tu_{\Sigma}^0}{B_C}u_1^{-\beta c-1} + \frac{T}{2B_C}(1-\beta_C)u_1^{-\beta c} + \frac{TB_P}{2B_C}(\beta_P - \beta_C)u_1^{\beta p-\beta c-1} -$$

$$-\beta_R\frac{Tu_4^0}{B_R}u_1^{-\beta_R-1} - \frac{TB_g}{2B_R}\left(\beta_g - \beta_R\right)u_1^{\beta_g-\beta_R-1} = 0,$$

преобразуя которое

$$-\beta_c\frac{u_{\Sigma}^0}{B_c}u_{1F2}^{*-\beta c-1} + \frac{1-\beta_c}{2B_c}u_{1F2}^{*-\beta c} + \frac{B_p}{2B_c}(\beta_p - \beta_c)u_{1F2}^{*\beta p-\beta c-1} -$$

$$-\beta_R\frac{u_4^0}{B_R}u_{1F2}^{*-\beta_R-1} - \frac{B_g}{2B_R}\left(\beta_g - \beta_R\right)u_{1F2}^{*\beta_g-\beta_R-1} = 0,$$

после деления на $u_{1F2}^{*-\beta c-1}$, получим уравнение (32) для определения u_{1F2}^{*}. Достаточное условие минимума (6)

$$F_{2u_1}^{//}(u_1)=\beta_C\left(\beta_C+1\right)\frac{u_\Sigma^0}{B_c}u_1^{-\beta c-2}+\frac{\beta_c(\beta_C-1)}{2B_c}u_1^{-\beta c-1}+$$

$$+\frac{B_p}{2B_c}(\beta_p-\beta_c)\left(\beta_P-\beta_C-1\right)u_1^{\beta p-\beta c-2}+$$

$$+\beta_R\left(\beta_R+1\right)\frac{u_4^0}{B_R}u_1^{-\beta_R-2}-\frac{B_g}{2B_R}\left(\beta_g-\beta_R\right)\left(\beta_g-\beta_R-1\right)u_1^{\beta_g-\beta_R-2}>0$$

преобразуем к виду

$$\text{(П12)}\quad \begin{gathered}\varphi\left(\beta_C,\beta_P,u_\Sigma^0,u_{1F2}^*\right)+\beta_R\left(\beta_R+1\right)\frac{u_4^0}{B_R}u_{1F2}^{*-\beta_R-2}+\\+\frac{B_g}{2B_R}\left(\beta_g-\beta_R\right)\left(\beta_R+1-\beta_g\right)u_{1F2}^{*\beta_g-\beta_R-2}>0.\end{gathered}$$

Будем искать минимум операционного цикла на том же множестве параметров управления, что и минимум производственного цикла, т.е. предположим выполнение достаточного условия (26):

$$\text{(П13)}\quad \varphi\left(\beta_C,\beta_P,u_\Sigma^0,u_{1F2}^*\right)>0\,.$$

В случае (П13) неравенство (П12) выполняется в следующих диапазонах значений темповых параметров бизнес-процесса фирмы и u_{1F2}^{*}:

$$\text{(П14)}\quad \begin{cases}\left(\beta_g>\beta_R\cap\beta_g>\beta_R+1\right)\cap\varphi\left(\beta_C,\beta_P,u_\Sigma^0,u_{1F2}^*\right)+\beta_R\left(\beta_R+1\right)\frac{u_4^0}{B_R}u_{1F2}^{*-\beta_R-2}+\\+\frac{B_g}{2B_R}\left(\beta_g-\beta_R\right)\left(\beta_R+1-\beta_g\right)u_{1F2}^{*\beta_g-\beta_R-2}\geq 0,\\\left(\beta_g>\beta_R\cap\beta_g<\beta_R+1\right)\forall u_{1F2}^*,\\\beta_g\leq\beta_R\cap\varphi\left(\beta_C,\beta_P,u_\Sigma^0,u_{1F2}^*\right)+\beta_R\left(\beta_R+1\right)\frac{u_4^0}{B_R}u_{1F2}^{*-\beta_R-2}+\\+\frac{B_g}{2B_R}\left(\beta_g-\beta_R\right)\left(\beta_R+1-\beta_g\right)u_{1F2}^{*\beta_g-\beta_R-2}>0.\end{cases}$$

С учетом темпового соотношения (24) в (П14) реализуется второй и третий вариант в виде (33). ■

Доказательство утверждения 4. Для выражения прибыли

(П15) $F_3(u_1) = B_R u_1^{\beta_R} - B_C u_1^{\beta_C}$,

полученного подстановкой (9), (10) в (7), запишем необходимое условие оптимума

(П16) $F_{3u_1}^{/}(u_1) = B_R \beta_R u_1^{\beta_R - 1} - B_C \beta_C u_1^{\beta_C - 1} = 0$,

откуда выразим (36). Достаточное условие максимума (П15)

$$F_{3u_1}^{//}(u_1) = B_R \left(\beta_R - 1\right) \beta_R u_1^{\beta_R - 2} - B_C \left(\beta_C - 1\right) \beta_C u_1^{\beta_C - 2} < 0 ,$$

выполняется при условиях (37). ■

Доказательство утверждения 5. Запишем функцию Лагранжа для задач (15)–(17) при ограничении (18):

(П17)
$$L_k = F_k\left(u_1\right) + \lambda_{1k}\left(u_1^{\min}(N) - u_1\right) + \lambda_{2k}\left(u_1^{\max}(N) - u_1\right) +$$
$$+\lambda_{3k}\left(u_1^{\min}(z) - u_1\right), k = 1, 2, 3,$$

дифференцируя которую получим систему необходимых условий оптимальности:

(П18)
$$\frac{\partial L_k}{\partial u_1} = \frac{\partial F_k\left(u_1\right)}{\partial u_1} - \lambda_{1k} - \lambda_{2k} - \lambda_{3k} = 0 ,$$

(П19)
$$\frac{\partial L_k}{\partial \lambda_{1k}} = u_1^{\min}(N) - u_1 \le 0, \frac{\partial L_k}{\partial \lambda_{2k}} = u_1^{\max}(N) - u_1 \ge 0,$$
$$\frac{\partial L_k}{\partial \lambda_{3k}} = u_1^{\min}(z) - u_1 \le 0, k = 1, 2, 3.$$

При выполнении (П19) как строгих неравенств решением системы (П18), (П19) будет вектор множителей Лагранжа $\lambda_{1k} = \lambda_{2k} = \lambda_{3k} = 0$, следовательно, из (П18) получаем необходимые условия оптимальности $\partial F_k / \partial u_1 = 0$, $k = 1, 2, 3$, записанные в формах (25), (32), (36) для определения оптимумов критериев без ограничений u_{1Fk}^{*}, $k = 1, 2, 3$, т.е. при этом $u_{1(k)}^{*} = u_{1Fk}^{*}$, $k = 1, 2, 3$. В случае выполнения какого либо из условий (П19) как строгих равенств решением системы (П18), (П19) будет параметр управления, удовлетворяющий условиям

(П20) $u_1 = u_1^{\min}(N) \cup u_1 = u_1^{\max}(N) \cup u_1 = u_1^{\min}(z)$, которые формально запишем в виде (38). Достаточные условия экстремумов в задачах (15)–(17) при ограничении (18) выполняются, если достаточные условия (26), (33), (37) определяют диапазоны $u^*_{1Fk} \in U$. $\blacksquare$

Литература

1. БРАЖНИКОВ М.А. *Моделирование календарных планов сборочных процессов в условиях машиностроительного производства* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. – 2004. – №26. – С. 165–173.
2. ВАЙНЕР ДЖ. *Кривые затрат и кривые предложения* // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. – Спб: Экономическая школа. – 2000. – №27. – С. 94–135.
3. ВОЖАКОВ А.В., ГИТМАН М.Б. *Модель календарного планирования с нечеткими ограничениями* // Вестник МГТУ им. Г.И. Носова. – 2008. – №4. – С. 79–82.
4. ГЕРАСЬКИН М.И., ЕГОРОВА В.В. *Статическая оптимизация производственных циклов на предприятиях подшипниковой промышленности* // Вестник Самарского государственного экономического университета. – 2014. – №11(121). – С. 53–60.
5. ГОРЛАЧ Б.А., САВЕЛЬЕВ Г.Л. *Прогнозирование и оптимизация процесса поставок в условиях колебания спроса* // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (Национального исследовательского университета). – 2011. – №4. – С. 48–57.
6. ГОРЛАЧ Б.А., ЧУЙКОВА Ю.С. *Прогнозирование объемов продаж в модели управления запасами* // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (Национального исследовательского университета). – 2008. – №8. – С. 129–133.
7. ГРИГОРЬЕВ В.П., КАЛЮТА В.Н., КИСЕЛЕВ К.А. *Модель оптимального распределения ресурсов в производство* // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т.308, №5. – С. 179–181.

8. ЗУБКОВА Н.В. *Применение экономико-математических моделей при формировании затрат машиностроительного предприятия на стадии планирования* // Вектор науки ТГУ. – 2010. – №2(12). – С. 166–169.
9. КОНОНЕНКО В.Н., МИРОНЕНКО И.Л. *Анализ финансового состояния предприятия* (*экспресс-оценка*) // Менеджмент в России и за рубежом. – 2008. – №34. – С. 26–37.
10. КУЗНЕЦОВ Л.А., ЧЕРНЫХ М.В. *Новый подход к решению задачи планирования производственной деятельности организации* // Управление предприятием. – 2005. – №1. – С. 66–76.
11. КУПРИЕНКО Н.В. *Статистика. Методы анализа распределений. Выборочное наблюдение*. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 138 с.
12. *Материалы сайта ООО «Завод приборных подшипников»* [Электронный ресурс] – URL: http://www.mbf-samara.ru. (дата обращения 20.11.2015.)
13. МУЛКИДЖАНЯН В.С. *Совершенствование процесса управления оборотными средствами промышленного предприятия: организационно-методический аспект*: автореф. дис. канд. экон. наук – Ростов н/Д, 2011. – 26 с.
14. ПАНЮКОВ А.В. *Подходы к формированию производственной программы для предприятий с дискретным механосборочным типом производства* // Вестник Пермского университета. Серия экономика. – 2011. – №4(11). – С. 74–83.
15. ПИЖУРИН А.А., МУРАЩЕНКО Д.Д. *Оптимизационная математическая модель задачи оперативного планирования и управления лесопильно-деревообрабатыващим производством в условиях рыночной экономики* // Лесной вестник. – 2008 – №3. – С. 32–35.
16. РАДИОНОВ Р.А. *Нормирование и управление запасами и оборотными средствами предприятия в условиях рыночной экономики* // Вестник машиностроения. – 2004. – №9. – С. 69–75.
17. РОСТОВА Е.П., ВЕРХОВЕЦ О.А. *Постановка задачи линейного программирования для распределения средств по управлению рисками промышленного предприятия* // Вест-

ник Омского университета. Серия: Экономика. – 2013. – №2. – С. 116–119.

18. РУЖАНСКАЯ Н.В. *Методика оптимизации запасов торговой организации: модели и возможности применения* // Корпоративное управление и инновационное развитие Севера. Вестник научно-исследовательского центра корпоративного права, управления и венчурного инвестирования Сыктывкарского гос. ун-та. – 2008. – №3. – С. 107–115.
19. СОКОЛОВ Я.В. *Основы теории бухгалтерского учета*. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 496 с.
20. ТОЛЫСБАЕВ Б.С. *Экономико-математическое моделирование процесса поставки сельскохозяйственной продукции* // Вестник ОГУ. – 2006. – №5. – С. 85–88.
21. ТКАЧ В.Р. *Экономико-математические модели оперативного планирования камнеобрабатывающего производства* // Материалы симпозиума «Неделя горняка – 2001». – М.: МГТУ, 2001.
22. ФЕДОРИН В.Ю. *Проблема рынка природного камня в России* // Камень и бизнес. – 2000. – №2. – С. 76–80.
23. ШОРИКОВ А.Ф. *Динамическая оптимизация комплексного управления технологическими процессами на предприятии* // Известия Уральского государственного экономического, университета. – 2007. – №1(18). – С. 254–266.

OPTIMAL PLANNING MECHANISMS FOR ASSEMBLE-TO-ORDER MANUFACTURING: TIME AND MONEY CRITERIA

Michail Geraskin, Samara State Aerospace University, Samara, Doctor of Economics, professor ((846)267-44-96, innovation@ssau.ru).
Victoriia Egorova, Samara State Aerospace University, assistant of the Department of mathematical methods in Economics ((846)267-44-96, v_v_egorova@inbox.ru).

Abstract: The problem is studied of raw material inventory optimization in companies, which manufacture consumer goods for market of limited volume. We analyze factors leading to the use of the assemble-to-order planning policy in firms, which compete on oligopsony markets, and suggest optimization models of procurement order planning either to maximize profit or to minimize the operation/manufacturing cycle under the monotonic increase of costs, revenue, and cash flow. The model takes into account price and technology constraints. We design analytical mechanisms of optimal order planning for bearing industry and model the region of compromise for orders being extremal with respect to different criteria.

Key words: production cycle, work in process, finished products, optimization, supply and demand, the ratio of production costs.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.В. Клочковым

Поступила в редакцию 18.08.2015.
Опубликована 30.11.2015.