УДК 514.763.34 + 515.164.13 + 517.95
ББК 22.15 + 22.161.6

О КОНТАКТНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ИНВАРИАНТЕ КАЛАБИ[1]

Бибиков П. В.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)
Стрельцова И. С.[3]
(*Астраханский государственный университет, Астрахань*)

В работе исследуется проблема построения глобальных инвариантов действия группы контактных диффеоморфизмов компактного многообразия на себе сопряжениями. Построен интегральный инвариант такого действия, аналогичный инварианту Калаби для группы симплектоморфизмов единичного четномерного диска.

Ключевые слова: контактный диффеоморфизм, инвариант Калаби, действие сопряжениями, инвариант.

Введение

Контактная и симплектическая геометрии являются одним из наиболее известных и важных примеров формальной математической теории, допускающей самые разнообразные и широкие применения не только в математике, но и в механике, физике и т.д. В частности, симплектическая геометрия лежит в основе гамильтоновой механики, что объясняется наличием на кокасательном расслоении гладкого многообразия естественной симплекти-

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект мол_а 16-31-00044*

[2] *Павел Витальевич Бибиков, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (tsdtp4u@proc.ru).*

[3] *Ирина Станиславовна Стрельцова, кандидат физико-математических наук, доцент (strelzova_is@mail.ru).*

ческой структуры [2], а контактная геометрия является основой для построения геометрической теории дифференциальных уравнений, активно развивающейся в наши дни [1].

Важно отметить, что результаты, получаемые с помощью подобных геометрических конструкций, отнюдь не являются отвлеченными; напротив, они допускают широкое применение в различных прикладных областях, в частности, в теории численных методов [6], геометрической теории управления [5] и теории управления с распределенными параметрами [4]. При этом контактная и симплектическая геометрии тесно связаны между собой (см., например, [2]), что позволяет применять идеи и методы из одной геометрии для изучения различных вопросов в другой и использовать эти связи в различных приложениях, в частности, в теории управления.

Целью данной работы является установление одной такой связи в задаче изучения инвариантов действия контактной и симплектической групп на себе сопряжениями. Важно отметить, что локальная версия этой задачи тривиальна в силу известной теоремы Дарбу [2], однако глобальная версия крайне сложна и в данный момент активно изучается в связи с разнообразными приложениями к теории зацеплений, топологии стационарных течений и теории уравнений Навье–Стокса, свойств магнитных и вихревых полей и т.д. (подробнее см. [3]).

1. Необходимые сведения

Пусть M — компактное контактное многообразие, т.е. многообразие, снабженное неинтегрируемым распределением $P\colon x \mapsto P_x \subset T_xM$ коразмерности 1. Обозначим через $\varkappa$ его контактную форму, т.е. такую дифференциальную форму, что $P = \langle \ker \varkappa \rangle$. Напомним, что диффеоморфизм $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ называется *контактным*, если он сохраняет распределение P: $(d_x\varphi)P_x \subseteq P_{\varphi(x)}$ для всех $x \in M$. В терминах дифференциальной формы Картана $\varkappa$ это условие переписывается так: $\varphi^*\varkappa \wedge \varkappa = 0$. Группу контактных диффеоморфизмов многообразия M обозначим через $\mathrm{Cont}(M)$.

Рассмотрим действие группы $\mathrm{Cont}(M)$ на себе сопряжениями: $g \mapsto \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$. Важной задачей является классификация орбит такого действия. Естественно начать ее с помощью вычисления *инвариантов*, т.е. функций на группе $\mathrm{Cont}(M)$, инвариантных относительно сопряжений.

Аналог соответствующей задачи в симплектическом случае хорошо известен (см., например, [3]). А именно, для симплектического диффеоморфизма, постоянного на границе компактного многообразия, существует *интегральный инвариант Калаби* $\mathcal{C}$, устроенный следующим образом. Пусть D — единичный шар размерности $2n$, снабженный замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой Ω. Поскольку 2-форма Ω замкнута, то найдется такая дифференциальная 1-форма α, что $\Omega = d\alpha$. Пусть $g \in \mathrm{Symp}(D)$ — произвольный симплектоморфизм, постоянный на границе ∂D. Так как $g^*\Omega = \Omega$, то 1-форма $\alpha - g^*\alpha$ является замкнутой. Поэтому существует и единственна такая функция $h \in C^\infty(D)$, что $\alpha - g^*\alpha = dh$, причем $h\mid_{\partial D}= 0$ и $(dh)\mid_{\partial D}= 0$. В таком случае функция

$$\mathcal{C}\colon \mathrm{Symp}(D) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}(g) = \int\limits_D h\Omega^{\wedge n}$$

является инвариантной относительно действия $\mathrm{Symp}(D)$ на себе сопряжениями.

Целью данной работы является обобщение конструкции инварианта Калаби на случай контактных диффеоморфизмов. Соответствующий инвариант мы будем называть *контактным инвариантом Калаби*.

2. Контактный инвариант Калаби

Для построения контактного инварианта Калаби мы применим следующую конструкцию. Пусть $g \in \mathrm{Cont}(M)$ — контактный диффеоморфизм. Заметим, что дифференциальная 1-форма $\varkappa$ определена с точностью до умножения на ненулевую гладкую функцию. Нормируем ее с помощью следующего соображения.

Пусть $g^*\varkappa = \lambda\varkappa$, где $\lambda \in C^\infty(M)$. Сопоставим гладкой функции λ контактное (т.е. сохраняющее распределение P) векторное поле X_λ, задаваемое условиями $X_\lambda(\varkappa) \wedge \varkappa = 0$ и $\varkappa(X_\lambda) = \lambda$. Несложно доказать (см., например, [1]), что этими двумя условиями векторное поле X_λ задается однозначно. Например, если $M = J^1\mathbb{R}$ – пространство 1-джетов функций $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, то $\varkappa = dy - pdx$ и

$$X_\lambda = -\lambda_p\partial_x + (\lambda - p\lambda_p)\partial_y + (\lambda_x + p\lambda_y)\partial_p.$$

Однако векторное поле X_λ зависит от выбора контактной формы $\varkappa$. Поскольку эта форма определена с точностью до умножения на ненулевую гладкую функцию, то и векторное поле X_λ также определено с точностью до умножения. Зададим условие нормировки следующим дополнительным соотношением: $X_\lambda(\lambda) = 1$ (производная Ли от функции λ вдоль векторного поля X_λ равна 1). Это условие задает коэффициент пропорциональности для векторного поля X_λ, а значит, и для контактной формы $\varkappa$. Нормированную контактную форму обозначим через $\varkappa_g$ (поскольку нормировка зависит от выбора контактного диффеоморфизма g).

Заметим, что такая нормировка осуществима не всегда. Например, в случае $M = J^1\mathbb{R}$ имеем $X_\lambda(\lambda) = \lambda\lambda_y$, поэтому нормировка возможна если и только если $\lambda_y \neq 0$.

Теперь мы готовы построить аналог интегрального инварианта Калаби для контактных диффеоморфизмов компактного многообразия.

Теорема 1. *Пусть M – компактное контактное многообразие размерности $2n+1$. Функция $\widehat{\mathcal{C}}\colon \mathrm{Cont}(M) \to \mathbb{R}$,*

$$\widehat{\mathcal{C}}(g) = \int\limits_M \varkappa_g \wedge (d\varkappa_g)^{\wedge n}$$

является инвариантной относительно действия группы $\mathrm{Cont}(M)$ на себе сопряжениями.

Контактный инвариант Калаби $\widehat{\mathcal{C}}$ может быть использован для доказательства бесконечности диаметра группы контактоморфизмов $\mathrm{Cont}(M)$, подобно тому, как симплектический инвариант Калаби используется для доказательства бесконечности диаметра группы симплектоморфизмов $\mathrm{Symp}(D)$ [3].

Литература

1. АЛЕКСЕЕВСКИЙ Д.В., ВИНОГРАДОВ А.М., ЛЫЧАГИН В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии* // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». – М.: ВИНИТИ, 1988. – Т. 28. – 289 с.
2. АРНОЛЬД В.И. *Математические методы классической механики*. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
3. АРНОЛЬД В.И., ХЕСИН Б.А. *Топологические методы в гидродинамике*. – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.
4. АХМЕТЗЯНОВ А.В., КУШНЕР А.Г., ЛЫЧАГИН В.В. *Геометрическая теория особых режимов в системах управления с распределенными параметрами* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №11. – С. 20–38.
5. КУШНЕР А.Г., ЛЫЧАГИН В.В. *Инварианты петрова гамильтоновых систем с управляющим параметром* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №3. – С. 83–102.
6. LYCHAGIN V.V., LYCHAGINA O.V. *Finite Dimensional Dynamics for Evolutionary Eguations* // Nonlinear dynamics. – 2007. – P. 29–48.

ON CONTACT INTEGRAL CALABI INVARIANT

Pavel Bibikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of physico-mathematical sciences, senior researcher (tsdtp4u@proc.ru).
Irina Streltsova, Astrakhan State University, Astrakhan, Candidate of physico-mathematical sciences, assistant professor (strelzova_is@mail.ru).

Abstract: The paper is about the problem of the global invariants construction for the action of the group of contact diffeomorphisms on itself by conjugations. The integral invariant is obtained for this action. This invariant is the analogue of the Calabi invariant for the groups of symplectomorphisms of the unit disk. We normalize Cartan form for a given contact diffeomorphism and then consider the volume form on our compact manifold. This volume form is constructed with the help of the normalized Cartan form. The volume of our manifold in relation to this form is our integral invariant.

Keywords: contact diffeomorphism, Calabi invariant, action by conjugations, invariant.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 21.11.2017.
Дата опубликования 31.03.2018.