УДК 519.685
ББК 22.18

КОНТИНУАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ VAR И ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРТФЕЛЬ ИНВЕСТОРА[1]

Агасандян Г. А.[2]
(*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва*)

Изучается оптимальное поведение инвестора на высокоразвитом рынке опционов. Вводится функция рисковых предпочтений инвестора и на ее основе определяется континуальный критерий VaR как континуальное обобщение хорошо известного обычного критерия VaR. Инвестор имеет также собственный прогноз на вероятностные свойства будущей цены базового актива опционов. Задача состоит в максимизации среднего дохода (доходности) при выполнении введенного критерия. На однопериодном теоретическом рынке с заданной картиной цен опционов строится оптимальный портфель. Метод построения иллюстрируется примером с двусторонними экспоненциальными распределениями вероятности.

Ключевые слова: базовый актив, функция рисковых предпочтений, континуальный критерий VaR, процедура Неймана–Пирсона, оптимальный портфель.

1. Введение

Инвестор, приобретая на рынке некий инструмент (портфель), получает случайный неотрицательный доход. Характер случайности оценивает (прогнозирует) сам инвестор. Оценива-

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект 17-01-00816*).

[2] *Геннадий Аршавирович Агасандян, доктор физико-математических наук* (*Москва, ул. Чертановская, д. 34, тел*. (495) *313-44-94*).

ние результата этого действия обычно проводится по средней доходности (как правило, речь идет о ее максимизации) и риску, мерой которого чаще всего служат дисперсия или так называемый критерий VaR. На рынках с небольшим выбором инструментов этих двух мер может оказаться достаточно; более того, они вполне могут дать схожие результаты.

Однако на высокоразвитых опционных рынках с обширным инструментарием можно строить портфели в форме комбинации привычных коллов и путов с получением практически произвольного случайного дохода как функции будущей цены базового актива. И здесь могут проявиться недостатки привычных мер риска (см., например, [4, 6, 8-11]).

Так, применение критерия VaR в задаче максимизации среднего дохода сводится к получению дохода, не превышающего заложенного в критерий уровня (обычно меньше размера инвестиции) с вероятностью, близкой к единице (при частой решетке страйков), что едва ли устроит разумного инвестора.

А использование дисперсии, как в теории Марковица, приводит к значительному обеднению пространства поиска оптимума. Основанная на свойствах случайностей лишь второго порядка, она не позволяет сыграть на некоторых нюансах распределений, например, на часто наблюдаемых на рынках тяжелых хвостах распределений, для описания которых необходим учет свойств хотя бы четвертого порядка (куртозис, эксцесс).

Предлагаемый в работе континуальный критерий VaR (CC-VaR) должен обеспечить инвестору (во всяком случае на теоретическом рынке) получение функции распределения доходов с заранее заданными им же свойствами.

Этот критерий требует, чтобы строящийся из имеющихся на рынке инструментов оптимальный портфель инвестора порождал случайный доход q, удовлетворяющий неравенствам $\mathsf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$ ($\mathsf{P}\{M\}$ – вероятность множества M с точки зрения инвестора). Неотрицательная, монотонно возрастающая и непрерывная функция $\phi(\varepsilon)$ называется *функцией рисковых предпочтений* (ф.р.п.) инвестора и им же задается. (Учет маржевых платежей исключает использование в модели агрегированных позиций инвестора, допускающих отрицательные доходы.)

Типичным примером может служить функция $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^{\lambda}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\lambda > 0$. И чем большее значение параметра λ выбирает для себя инвестор, тем более он готов рисковать ради увеличения средней доходности (см. также [1-3, 5]).

2. Континуальный δ-рынок и его инструменты

Для простоты и из желания более полного изучения возможностей CC-VaR рассматривается *однопериодный* рынок, порожденный некоторым базовым активом (например, акцией) $\boldsymbol{X}$. Рынок предполагается *теоретическим* в том смысле, что страйки опционов на актив могут быть любыми вещественными числами, и *идеальным*, поскольку цены продавца и покупателя предполагаются равными, комиссионные равны нулю, а торговать инструментами можно в *любых* количествах.

В начале периода цена базового актива $\boldsymbol{X}$ известна, а в конце периода она образует случайную величину X, принимающую значения x из континуального множества $\mathrm{X} \subset \Re_+$ (или даже $\Re$). Инвестор строит для величины X свой прогноз в форме плотности вероятности $p(x)$, $x \in \mathrm{X}$, которую называем *прогнозной*.

На рынке можно торговать любым инструментом $\boldsymbol{G}$, порождающим доход, представимый в виде произвольной неотрицательной измеримой функции $g(x)$, $x \in \mathrm{X}$. Ее называем *платежной функцией* инструмента и обозначаем $\pi(x; \boldsymbol{G})$, $x \in \mathrm{X}$, т.е. $g(x) = \pi(x; \boldsymbol{G})$; в частности, $\pi(x; \boldsymbol{X}) = x$. Цены инструментов формирует рынок, и они задаются на начало периода. Цена инструмента $\boldsymbol{G}$ обозначается $|\boldsymbol{G}|$, а средний доход от него – $\|\boldsymbol{G}\|$.

На рынке обращаются так называемые *δ-инструменты* $\boldsymbol{D}(s)$, $s \in \mathrm{X}$. Платежная функция δ-инструмента $\boldsymbol{D}(s)$, $s \in \mathrm{X}$, равна δ-функции относительно s: $\pi(x; \boldsymbol{D}(s)) \equiv \delta(x - s)$. Инструмент $\boldsymbol{D}(s)$ дает нулевой доход, если $x \neq s$, и бесконечный, если $x = s$, $s \in \mathrm{X}$, притом интеграл от платежной функции по $x \in \mathrm{X}$ равен единице.

Из инструментов $\boldsymbol{D}(s)$ может быть построен фактически любой портфель. Так, портфель $\boldsymbol{G}$ с платежной функцией $g(x)$ может быть представлен в виде континуальной комбинации инструментов $\boldsymbol{D}(s)$ с весами $g(s)$:

(1) $\boldsymbol{G} = \int_{\mathsf{X}} g(s)\boldsymbol{D}(s)ds$.

В этом смысле совокупность δ-инструментов $\{\boldsymbol{D}(s), s \in \mathsf{X}\}$ можно считать базисом в пространстве инструментов рынка, а каждый δ-инструмент – базисным. Вводя такой базис, мы рассчитываем на интуицию читателя и его определенное владение теорией обобщенных функций. Инструменты $\boldsymbol{D}(s)$, $s \in \mathsf{X}$, служат связующим звеном континуального рынка с дискретным по страйкам рынком опционов, на которых подобную роль могли бы играть, в частности, нормированные простейшие (образованные соседними страйками) баттерфляи.

Цена и средний доход портфеля $\boldsymbol{G}$ с представлением (1) определяются соответственно формулами

(2) $|\boldsymbol{G}| = \int_{\mathsf{X}} g(s)|\boldsymbol{D}(s)|ds = \int_{\mathsf{X}} g(s)c(s)ds$,

(3) $\|\boldsymbol{G}\| = \int_{\mathsf{X}} g(s)\|\boldsymbol{D}(s)\|ds = \int_{\mathsf{X}} g(s)p(s)ds$.

Цена δ-инструментов $\boldsymbol{D}(s)$ и их средний доход определяются соответственно формулами

$$|\boldsymbol{D}(s)| = c(s), \qquad \|\boldsymbol{D}(s)\| = p(s), \quad s \in \mathsf{X}.$$

Неотрицательная функция $c(x)$, $x \in \mathsf{X}$, должна задаваться рынком.

Рынок, на котором свободно обращаются все подобные δ-инструменты, называем *δ-рынком*.

Особый интерес представляют такие континуальные комбинации δ-инструментов, как *индикаторы* $\boldsymbol{H}\{M\}$, $M \subset \mathsf{X}$. Платежной функцией $\boldsymbol{H}\{M\}$ служит характеристическая функции $\chi_M(x)$ множества M, равная единице, если $x \in M$, и нулю, если $x \notin M$. В частности, безрисковый инструмент единичного объема $\boldsymbol{U}$ является индикатором $\boldsymbol{H}\{\mathsf{X}\}$. Его платежная функция тождественно равна единице. Имеют место представления

$$\boldsymbol{H}\{M\} = \int_M \boldsymbol{D}(s)ds, \qquad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{H}\{\mathsf{X}\} = \int_{\mathsf{X}} \boldsymbol{D}(s)ds.$$

Цены этих инструментов и их средние доходы:

(4) $\left|\boldsymbol{H}\{M\}\right| = \int_M c(s)ds = \mathsf{C}\{M\}$, $\left\|\boldsymbol{H}\{M\}\right\| = \int_M p(s)ds = \mathsf{P}\{M\}$;

(5) $|\boldsymbol{U}| = \int_{\mathsf{X}} c(x)dx = 1/r$, $\|\boldsymbol{U}\| = \int_{\mathsf{X}} p(x)dx = 1$.

Первое соотношение в (5) вводит параметр r, означающий *безрисковый относительный доход* за период, при этом $(r-1)$ – *безрисковая доходность*. Без ущерба для общности выводов полагаем далее $r \equiv 1$. Тогда интеграл от цены $c(x)$ по $x \in \mathsf{X}$ будет равен единице, сама цена приобретает свойства плотности вероятности, которую можно считать *порожденной рынком*; ее называем *стоимостной плотностью*. Отметим, что соотношения (4) и (5) фактически вводят *стоимостную* и *прогнозную меры* $\mathsf{C}\{\cdot\}$ и $\mathsf{P}\{\cdot\}$, а (2) и (3) можно записать иначе (E – знак математического ожидания):

$$|\boldsymbol{G}| = \mathsf{E}_{\mathsf{C}}\, g(\mathrm{X}), \qquad \|\boldsymbol{G}\| = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\, g(\mathrm{X}).$$

На теоретическом рынке среди индикаторов существуют также инструменты $\boldsymbol{U}_s^+$, $\boldsymbol{U}_s^-$ – бинарные колл и пут соответственно с произвольным страйком s и платежными функциями

$$\pi\left(x;\boldsymbol{U}_s^+\right) = \chi_{[s,\infty)}(x), \quad \pi\left(x;\boldsymbol{U}_s^-\right) = \chi_{(-\infty,s)}(x), \quad x, s \in \mathsf{X}.$$

Имеют место очевидные соотношения (формулы паритета)

$$\boldsymbol{U}_s^+ + \boldsymbol{U}_s^- = \boldsymbol{U}, \quad s \in \mathsf{X},$$

$$\boldsymbol{H}\{M\} = \boldsymbol{U}_a^+ - \boldsymbol{U}_b^+ = \boldsymbol{U}_b^- - \boldsymbol{U}_a^-, \quad M = [a, b),\ a, b \in \mathsf{X}.$$

Общеизвестные опционные инструменты колл и пут с произвольным страйком s (ценой исполнения) задаются соответственно соотношениями

$$\boldsymbol{C}_s = \int_{\{x \ge s\}} (x-s)\boldsymbol{D}(x)dx, \quad \boldsymbol{P}_s = \int_{\{x<s\}} (s-x)\boldsymbol{D}(x)dx, \quad x, s \in \mathsf{X}.$$

Подобные представления можно дать и для прочих известных инструментов: спрэдов, баттерфляев, кондоров и др.

Методы построения оптимальных портфелей, которые излагаются в дальнейшем, должны учитывать различие между плотностями $c(x)$ и $p(x)$ (мерами $\mathsf{C}\{\cdot\}$ и $\mathsf{P}\{\cdot\}$). В связи с этим особое значение приобретает *функция относительных доходов*

(6) $\rho(x) = p(x)/c(x)$, $x \in \mathsf{X}$,

Такие функции под названием *функций правдоподобия* часто встречаются в математической статистике, являясь объектом приложения известной *процедуры Неймана–Пирсона* в задачах проверки статистических гипотез (см., например, [1, 2, 4]).

Для задач инвестирования на теоретическом континуальном рынке возможны разные постановки. Перечислим некоторые наиболее важные из них, включая исходную.

Задача CO (исходная). Заданы инвестиционная сумма и ф.р.п. инвестора $\phi(\varepsilon)$. Ищется портфель, доставляющий $\max \mathsf{E}q$ при условии $\mathsf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$.

Задача CB (*базовая*). Инвестиционная сумма не задается, а $\phi(\varepsilon)$ – ф.р.п. инвестора. Ищется *регулярный* портфель, доставляющий $\min A$ при условии $\mathsf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$.

Задача CH (*однородная*). Заданы инвестиционная сумма S (> 0) и ф.р.п. в виде $b\phi(\varepsilon)$, где b – масштабирующий параметр. Ищутся *регулярный* портфель и значение параметра b, доставляющие $\max \mathsf{E}q$ при условии $\mathsf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$. Параметр b находится из условия $S = bA$.

Как мы отмечали ранее, исходной *задаче CO* свойственны вырожденные решения. *Задача CB*, напротив, сразу требует построения регулярного портфеля, но минимальной инвестиционной суммой, и потому является основой для построения решений для прочих задач. *Задача CH* является примером применения *задачи CB* к решению *задачи CO* на основе результатов леммы 9 следующего раздела в частном случае однородной по масштабу инвестиции ф.р.п..

3. Основные теоретические результаты

Процедура Неймана–Пирсона. Строится семейство множеств $\mathbf{Z} = \{Z(\tau), \tau \geq 0\}$ по правилу: $x \in Z(\tau)$ тогда и только тогда, когда для функции (6) имеет место $\rho(x) \leq \tau$. Рассматривается функция $\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau) = \mathsf{P}\{Z(\tau)\}$, $\tau \in [\tau', \tau'']$, $\tau' = \min_x \rho(x)$, $\tau'' = \max_x \rho(x)$. Семейство $\mathbf{Z}$ – неубывающее по τ, а потому и функция $\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)$ – неубывающая. Кроме того, $0 \leq \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau) \leq 1$ и $\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\infty) = 1$. Для $\varepsilon \in [0,1]$

находится множество X_ε из этого семейства такое, что $\mathsf{P}\{X_\varepsilon\} = \varepsilon$. Введенная функция как раз и устанавливает взаимосвязь τ и ε: $\varepsilon = \mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$ (и $\tau = \mathsf{f}_\mathsf{P}^{\leftarrow}(\varepsilon)$), $\tau \in [\tau', \tau'']$, $\varepsilon \in [0, 1]$.

Если функция $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$ удовлетворяет требованиям: *а*) $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau) \to 1$ при $\tau \to \infty$; *б*) $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$ непрерывна и $\mathsf{f}_\mathsf{P}(0) = 0$; *в*) $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$ строго возрастает, то пару мер $(\mathsf{C}\{\cdot\}, \mathsf{P}\{\cdot\})$ называем *регулярной* (*невырожденной*), в противном случае – *вырожденной*. □

Для регулярной пары $(\mathsf{C}\{\cdot\}, \mathsf{P}\{\cdot\})$ имеет место

Лемма 1. Для любого $\varepsilon \in [0, 1]$ множество X_ε существует и единственно, при этом стоимость $\gamma(\varepsilon) = \mathsf{C}\{X_\varepsilon\}$ максимальна среди всех $\mathsf{C}\{Y\}$ с $\mathsf{P}\{Y\} = \varepsilon$, $Y \subset \mathsf{X}$.

Доказательство можно найти, например, в [1, 2, 4].

В процедуре Неймана–Пирсона и в лемме 1 вводятся две функции: $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau) = \mathsf{P}\{Z(\tau)\}$, $\tau \geq 0$, и $\gamma(\varepsilon) = \mathsf{C}\{X_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Введем еще функцию $\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau) = \mathsf{C}\{Z(\tau)\}$, $\tau \geq 0$. Функцию $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$, $\tau \geq 0$, называем *прогнозной функцией*, $\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau)$, $\tau \geq 0$, – *стоимостной функцией*, $\gamma(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,1]$, – *диссонантой*.

Лемма 2. Функции $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$ и $\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau)$ являются функциями распределения относительного дохода $\rho(\mathrm{X})$ для мер $\mathsf{P}\{\cdot\}$ и $\mathsf{C}\{\cdot\}$ соответственно, где X – будущая цена базового актива.

Доказательство сразу следует из пары цепочек равенств

$$(7)\quad \mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau) = \mathsf{P}\{Z(\tau)\} = \mathsf{P}\{\rho(\mathrm{X}) \leq \tau\} = \mathsf{F}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}(\tau),$$

$$\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau) = \mathsf{C}\{Z(\tau)\} = \mathsf{C}\{\rho(\mathrm{X}) \leq \tau\} = \mathsf{F}_{\mathsf{C};\rho(\mathrm{X})}(\tau). \ \square$$

Теорема 3. Диссонанта $\gamma(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, является суперпозицией функций $\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau)$ и $\mathsf{f}_\mathsf{P}^{\leftarrow}(\varepsilon)$:

$$(8)\quad \gamma(\varepsilon) = \mathsf{f}_\mathsf{C}\left(\mathsf{f}_\mathsf{P}^{\leftarrow}(\varepsilon)\right) \quad \left(= \mathsf{F}_{\mathsf{C};\rho(\mathrm{X})}\left(\mathsf{F}^{\leftarrow}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}(\varepsilon)\right)\right), \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Доказательство. В соответствии с процедурой Неймана–Пирсона $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau) = \mathsf{P}\{Z(\tau)\}$, а $Z(\tau) = X_\varepsilon$, если $\varepsilon = \mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$. Поэтому для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ имеет место

$$\gamma(\varepsilon) = \mathsf{C}\{X_\varepsilon\} = \mathsf{C}\{Z(\tau)\}\Big|_{\tau = \mathsf{f}_\mathsf{P}^{\leftarrow}(\varepsilon)} = \mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau)\Big|_{\tau = \mathsf{f}_\mathsf{P}^{\leftarrow}(\varepsilon)} = \mathsf{f}_\mathsf{C}\left(\mathsf{f}_\mathsf{P}^{\leftarrow}(\varepsilon)\right). \ \square$$

Важное свойство диссонанты $\gamma(\varepsilon)$ устанавливает

Лемма 4. Функция $\gamma(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, – вогнутая, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что функция $\gamma(\varepsilon)$ – монотонно неубывающая, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$. Мы установим ее вогнутость, если покажем, что для любого $h > 0$ имеет место

(9) $\gamma(\varepsilon+h)-\gamma(\varepsilon)\le\gamma(\varepsilon)-\gamma(\varepsilon-h)$.

Вводятся события

(10) $D^- = X_\varepsilon - X_{\varepsilon-h} = \{x | \tau_{\varepsilon-h} < \rho(x) \le \tau_\varepsilon\}$,

(11) $D^+ = X_{\varepsilon+h} - X_\varepsilon = \{x | \tau_\varepsilon < \rho(x) \le \tau_{\varepsilon+h}\}$.

Очевидно, $\mathsf{P}(D^-) = \mathsf{P}(D^+) = h$, и потому

$$\mathsf{C}\{D^-\} \ge \mathsf{P}\{D^-\}/\tau_\varepsilon = \mathsf{P}\{D^+\}/\tau_\varepsilon \ge \mathsf{C}\{D^+\}.$$

Здесь левое неравенство следует из (10), правое – из (11). Из полученного соотношения вытекает (9). Лемма доказана. □

Следующая теорема отчасти уточняет и усиливает лемму 4.

Теорема 5. В условиях дифференцируемости функций $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$ и $\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau)$ (вместе с плотностями $p(x)$ и $c(x)$)

(i) $\mathsf{l}(\tau) = \mathsf{f}'_\mathsf{P}(\tau)/\mathsf{f}'_\mathsf{C}(\tau) = \tau$, $\tau \in [\tau', \tau'']$,

(ii) $\gamma'(\varepsilon) = 1/\mathsf{f}^{\leftarrow}_\mathsf{P}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим растущую систему множеств

$$Z_\tau = \{x | \rho(x) \le \tau\}, \quad \tau \in [\tau', \tau''],$$

и введем приращения (для $h > 0$)

(12) $D_{\tau,h} \equiv Z_{\tau+h} - Z_\tau = \{x | \tau < \rho(x) \le \tau + h\}$.

Справедливы соотношения

$$\mathsf{P}\{Z_\tau\} = \mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau), \qquad \mathsf{C}\{Z_\tau\} = \mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau),$$

$$\mathsf{P}\{Z_{\tau+h}\} = \mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau+h), \quad \mathsf{C}\{Z_{\tau+h}\} = \mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau+h),$$

а также

$$\mathsf{P}\{D_{\tau,h}\} = \mathsf{P}\{Z_{\tau+h}\} - \mathsf{P}\{Z_\tau\} = \mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau+h) - \mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau),$$

$$\mathsf{C}\{D_{\tau,h}\} = \mathsf{C}\{Z_{\tau+h}\} - \mathsf{C}\{Z_\tau\} = \mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau+h) - \mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau).$$

После деления первого соотношения на второе находим

(13) $\left(\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau+h) - \mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)\right)/\left(\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau+h) - \mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau)\right) = \mathsf{P}\{D_{\tau,h}\}/\mathsf{C}\{D_{\tau,h}\}$.

Переходя в этом равенстве к пределу при $h \to 0$, слева получаем отношение $\mathsf{l}(\tau)$. С другой стороны, из непрерывности $p(x)$

и $c(x)$ на интервале $D_{\tau,h}$ для правой части равенства в соответствии с (12) можно дать при малых h приближенную оценку

$$\mathsf{P}\{D_{\tau,h}\}/\mathsf{C}\{D_{\tau,h}\} \approx p(x^*)/c(x^*) = \rho(x^*) \approx \tau\,, \quad x^* \in D_{\tau,h}\,,$$

которая тем точнее, чем меньше h. Потому из (13) следует

$$\mathsf{l}(\tau) = \mathsf{f}'_{\mathsf{P}}(\tau)/\mathsf{f}'_{\mathsf{C}}(\tau) = \lim\nolimits_{h\to 0} \mathsf{P}\{D_{\tau,h}\}/\mathsf{C}\{D_{\tau,h}\} = \tau\,,$$

что доказывает утверждение (i) теоремы.

Теперь, учитывая представление (8) и равенство $\varepsilon = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)$ и применяя правила дифференцирования для суперпозиции функций и обратной функции, получаем утверждение (ii) теоремы:

$$\gamma'(\varepsilon) = d\mathsf{f}_{\mathsf{C}}\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)\right)/d\varepsilon = \mathsf{f}'_{\mathsf{C}}\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)\right) \times d\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)/d\varepsilon =$$

$$= \mathsf{f}'_{\mathsf{C}}\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)\right)/\mathsf{f}'_{\mathsf{P}}\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)\right) = 1/\mathsf{l}\left(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)\right) = 1/\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)\,, \ \varepsilon \in [0, 1].$$

Теорема доказана. □

Процедуру упорядочения, фактически, реализует однозначная *функция упорядочения* $w(x)$, определяемая правилом

(14) $w(x) = \varepsilon\,(= \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon'\uparrow\varepsilon}(X_\varepsilon - X_{\varepsilon'}),\ \varepsilon \in [0, 1].$

Здесь Γ_ε – совокупность граничных точек множества X_ε.

Обратная к $w(x)$ функция, вообще говоря, неоднозначна, и ее условно обозначаем $\boldsymbol{w}^{\leftarrow}(x)$, подчеркивая такое свойство функции полужирным шрифтом:

$$\mathbf{w}^{\leftarrow}(\varepsilon) = \{x \,|\, w(x) = \varepsilon\} = \{x \,|\, x \in \Gamma_\varepsilon\}\,, \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Лемма 6. Функция упорядочения $w(x)$ имеет представление

$$w(x) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\rho(x)), \quad x \in \mathsf{X}.$$

Доказательство. В соответствии с соотношением (14) функция упорядочения $w(x)$ является суперпозицией прогнозной функции $\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)$ и функции относительных доходов $\rho(x)$, и потому

(15) $w(x) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)\big|_{\tau=\rho(x)} = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\rho(x)),\ \ x \in \mathsf{X}.$ □

Прямым следствием утверждения леммы 6 является

Теорема 7. Случайная величина $w(\mathrm{X})$ равномерно распределена на отрезке [0, 1].

Доказательство. Из равенств (7) и (15) следует, что для случайной величины $w(\mathrm{X})$ имеет место представление

$$w(\mathrm{X}) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}\left(\rho(\mathrm{X})\right) = \mathsf{F}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}\left(\rho(\mathrm{X})\right) \in [0,1].$$

Поэтому для функции распределения $w(\mathrm{X})$ при *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$

$$\mathsf{F}_{\mathsf{P};w(\mathrm{X})}(\varepsilon) = \mathsf{P}\{w(\mathrm{X}) \le \varepsilon\} = \mathsf{P}\left\{\mathsf{F}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}\left(\rho(\mathrm{X})\right) \le \varepsilon\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\rho(\mathrm{X}) \le \mathsf{F}^{\leftarrow}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}(\varepsilon)\right\} = \mathsf{F}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}\left(\mathsf{F}^{\leftarrow}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}(\varepsilon)\right) = \varepsilon .$$

Тем самым теорема доказана. □

Таким образом, случайная величина $w(\mathrm{X})$ имеет общее (равномерное) для любых инвесторов распределение, не зависящее от их рисковых предпочтений и прогноза.

Теперь обратимся к рисковым аспектам инвестора.

Теорема 8. Для случайной величины $q = g(\mathrm{X}) = \phi(w(\mathrm{X}))$, где $\phi(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, – строго монотонно возрастающая и непрерывная функция, справедливы соотношения:

(i) $\mathsf{F}_{\mathsf{P};q}(z) = \phi^{\leftarrow}(z)$, $\quad z \in [\phi(0), \phi(1))$;

(ii) $\mathsf{P}\{q \ge \phi(\varepsilon)\} = 1 - \varepsilon$, $\quad \varepsilon \in [0, 1]$.

(Представление функций распределения для простоты записи ограничивается лишь интервалом их роста.)

Доказательство. Из условий теоремы вытекает существование функции $\phi^{\leftarrow}(z)$, $z \in [\phi(0), \phi(1))$. Для $z \in [\phi(0), \phi(1))$ имеем

$$\mathsf{F}_{\mathsf{P};q}(z) = \mathsf{P}\left\{\phi\left(w(\mathrm{X})\right) \le z\right\} = \mathsf{P}\left\{w(\mathrm{X}) \le \phi^{\leftarrow}(z)\right\} = \phi^{\leftarrow}(z),$$

что доказывает утверждение (i) теоремы.

Для доказательства утверждения (ii) в случае регулярной пары мер $(\mathsf{C}\{\cdot\}, \mathsf{P}\{\cdot\})$ достаточно воспользоваться цепочкой равенств, последнее из которых следует из теоремы 7,

$$\mathsf{P}\{q \le \phi(\varepsilon)\} = \mathsf{P}\left\{\phi\left(w(\mathrm{X})\right) \le \phi(\varepsilon)\right\} = \mathsf{P}\left\{w(\mathrm{X}) \le \phi^{\leftarrow}\left(\phi(\varepsilon)\right)\right\} = \varepsilon .$$

Теорема полностью доказана. □

Устанавливая четкую взаимосвязь функции распределения доходов инвестора с его ф.р.п., именно теорема 8 позволяет инвестору выбором ф.р.п. формировать по своему желанию распределение своих инвестиционных доходов. Непосредственным следствием утверждения (ii) теоремы 8 является

Лемма 9. Случайный доход q портфеля

(16) $\boldsymbol{G} = b\int_{\mathsf{X}} \phi\big(w(x)\big)\boldsymbol{D}(x)dx$, $\quad b > 0$,

для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$ удовлетворяют *равенствам*

$$\mathsf{P}\big\{q \ge b\phi(\varepsilon)\big\} = 1 - \varepsilon \,. \;\square$$

Строящиеся портфели можно сравнивать и по привычным интегральным характеристикам. Для них используются также специальные обозначения: R – *средний доход*, A – *стоимость* (инвестиционная сумма), y – *доходность*. Имеем

(17) $A = |\boldsymbol{G}| = \int_{\mathsf{X}} g(s)|\boldsymbol{D}(s)|ds = \int_{\mathsf{X}} g(s)c(s)ds$,

(18) $R = \|\boldsymbol{G}\| = \int_{\mathsf{X}} g(s)\|\boldsymbol{D}(s)\|ds = \int_{\mathsf{X}} g(s)p(s)ds$, $\quad y = {R}/{A} - 1$.

Часто бывает более удобным анализировать эти показатели в терминах переменных ε или τ. Фактически в представлениях (17) и (18) для оптимальной весовой функции $g(s)$ портфеля речь идет о замене переменной s переменными ε или τ.

Однако обратная к $g(s)$ функция часто бывает неоднозначной, и хотя такая замена разбиением на монотонные ветви осуществима, ее формальное представление громоздко. Мы предложим иной способ, связанный с дискретизацией задачи и последующим переходом к предельной континуальной схеме.

Для дискретного случая задаемся числом n интервалов разбиения множеств изменения параметров ε, γ и ϕ. Нетрудно видеть, что последовательное применение процедуры Неймана–Пирсона для вероятностных уровней ε_i и соответствующих им уровней γ_i и ϕ_i, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, дает следующие представления для портфеля (16) при $b = 1$, его стоимости и среднего дохода, а также для требований многоступенчатого критерия VaR:

$$\boldsymbol{G}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}(\phi_i - \phi_{i-1})\boldsymbol{H}\left\{\mathsf{X} - X_{\varepsilon_i}\right\},$$

$$A^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}(\phi_i - \phi_{i-1})(1 - \gamma_i) = \sum_{i=1}^{n}\phi_i(\gamma_i - \gamma_{i-1}),\ \phi_0 = 0, \gamma_0 = 0\,,$$

$$R^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}(\phi_i - \phi_{i-1})(1 - \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n}\phi_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}),\ \phi_0 = 0, \varepsilon_0 = 0\,,$$

$$\mathsf{P}\left\{q \ge \phi_i\right\} \ge 1 - \varepsilon_i \quad \text{для } \textit{всех } i \in I.$$

Заменяя в этих формулах разности дифференциалами по ε, γ и ϕ, а суммы – интегралами, для континуального случая имеем:

$$\boldsymbol{G} = \int_0^1 \boldsymbol{H}\{\mathsf{X} - X_\varepsilon\}\, d\phi(\varepsilon),$$

$$A = \int_0^1 (1-\gamma(\varepsilon))\, d\phi(\varepsilon) = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon),$$

$$R = \int_0^1 (1-\varepsilon)\, d\phi(\varepsilon) = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

$$\mathsf{P}\{q \ge \phi(\varepsilon)\} \ge 1-\varepsilon \quad \text{для } \textit{всех } \varepsilon \in [0, 1].$$

Таким образом, справедлива

Теорема 10. Средний доход R и стоимость A портфеля (16) при $b = 1$ определяются формулами

(19) $R = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\varepsilon, \quad A = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon) = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\gamma'(\varepsilon)\, d\varepsilon$. □

Из этой теоремы с помощью определений функций $\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)$ и $\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau)$ и утверждений леммы 2 и теорем 3, 5 можно получить эквивалентные представления в терминах параметра τ. В этом случае замена $\varepsilon = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)$ осуществляется без труда. Имеет место

Теорема 11. При $b = 1$ справедливы соотношения

$$R = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{\tau'}^{\tau''} \phi(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau))\, d\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau) = \int_{\tau'}^{\tau''} \phi(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau))\mathsf{f}'_{\mathsf{P}}(\tau)\, d\tau,$$

$$A = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon) = \int_{\tau'}^{\tau''} \phi(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau))\, d\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau) = \int_{\tau'}^{\tau''} \phi(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau))\mathsf{f}'_{\mathsf{C}}(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. Первое из соотношений является очевидным результатом замены $\varepsilon = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)$, а второе – прямое следствие теоремы 3, поскольку при такой замене в соответствии с представлением (8) $\gamma(\varepsilon) = \mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau)$. □

Наконец, нам остается установить оптимальность сконструированного портфеля.

Теорема 12. Построенное в соответствии с процедурой Неймана–Пирсона семейство $\mathbf{Z} = \{X_\varepsilon, \varepsilon \in [0, 1]\}$ доставляет минимум инвестиционной сумме A, определяемой формулой (19).

Доказательство. Пусть $\mathbf{V} = \{Y_\varepsilon, \varepsilon \in [0, 1]\}$ – произвольное иное континуальное семейство, такое что $\mathsf{P}\{Y_\varepsilon\} = \mathsf{P}\{X_\varepsilon\} = \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in [0, 1]$. Будем считать, что $\chi(\varepsilon) = \mathsf{C}(Y_\varepsilon)$ – функция с ограниченной вариацией (чего вполне достаточно для приложений), а также $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 1$. По лемме 1 для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\chi(\varepsilon) \le \gamma(\varepsilon)$.

Обозначая через A_{V} инвестиционную сумму для **V**, сравниваем A и A_{V}. Интегрируя по частям с учетом (19), получаем

$$A_{\mathrm{V}} - A = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\chi(\varepsilon) - \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon) =$$

$$= \int_0^1 \big(\gamma(\varepsilon) - \chi(\varepsilon)\big)\, d\phi(\varepsilon) \ge 0,$$

что и доказывает теорему. □

4. *Алгоритм оптимизации и иллюстративный пример*

Здесь подытоживается содержание предыдущего раздела в отношении построения оптимального по CC-VaR портфеля и перечисляются наиболее важные введенные там формальные агрегаты, образующие ядро алгоритма оптимизации. При этом речь идет о решении основной *задачи CB*. Приводится и иллюстративный пример со вторым распределением Лапласа.

4.1. АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ

Основанный на применении процедуры Неймана–Пирсона алгоритм оптимизации использует результаты предыдущего раздела, представленные в нем в форме утверждений лемм и теорем с привлечением необходимых обозначений. Имеем

$$X_\varepsilon = \{\rho(x) \le \tau\}, \quad \tau \in [\tau', \tau''],$$

$$\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau) = \mathsf{P}\{\rho(x) \le \tau\} = \mathsf{F}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}(\tau),$$

$$\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau) = \mathsf{C}\{\rho(x) \le \tau\} = \mathsf{F}_{\mathsf{C};\rho(\mathrm{X})}(\tau),$$

$$\gamma(\varepsilon) = \mathsf{f}_{\mathsf{C}}\big(\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)\big) = \mathsf{F}_{\mathsf{C};\rho(\mathrm{X})}\big(\mathsf{F}_{\mathsf{P};\rho(\mathrm{X})}^{\leftarrow}(\varepsilon)\big), \ \varepsilon \in [0, 1],$$

$$\gamma'(\varepsilon) = 1 \big/ \mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon),$$

$$w(x) = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau)\big|_{\tau = \rho(x)} = \mathsf{f}_{\mathsf{P}}\big(\rho(x)\big),$$

$$g(x) = \phi\big(w(x)\big), \ x \in \mathsf{X},$$

$$\boldsymbol{G} = \int_{\mathsf{X}} g(x)\, \boldsymbol{D}(x)\, dx,$$

$$q = g(\mathrm{X}) = \phi\big(w(\mathrm{X})\big),$$

$$R=\int_0^1\phi(\varepsilon)d\varepsilon=\int_{\tau'}^{\tau''}\phi\big(\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)\big)\mathsf{f}'_\mathsf{P}(\tau)d\tau\ \ (=\mathsf{E}_\mathsf{P}q),$$
$$A=\int_0^1\phi(\varepsilon)d\gamma(\varepsilon)=\int_{\tau'}^{\tau''}\phi\big(\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)\big)\mathsf{f}'_\mathsf{C}(\tau)d\tau\ \ (=\mathsf{E}_\mathsf{C}q),$$
$$y=R/A-1,$$
$$\mathsf{F}_{\mathsf{P};q}(z)=\phi^{\leftarrow}(z),\ z\in\big[\phi(0),\phi(1)\big),$$
$$\mathsf{P}\big\{q\ge\phi(\varepsilon)\big\}\equiv 1-\varepsilon\ \text{ для } \textit{всех}\ \ \varepsilon\in[0,1].$$

4.2. ВТОРОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО СВОЙСТВА

Второе распределение Лапласа (его называют также двусторонним экспоненциальным распределением), которое будем обозначать Exp(μ, α), имеет плотность

$$\tfrac{1}{2\alpha}\exp\left(-\tfrac{|x-\mu|}{\alpha}\right),\quad x\in\Re,$$

с математическим ожиданием $\mathsf{E}X=\mu$, дисперсией $\mathsf{D}X=2\alpha^2$ и куртозисом, равным 6 (эксцессом – 3).

Выбор данного типа распределений обусловлен исключительно нашим желанием довести исследование примера до аналитического решения. В силу относительной сложности алгоритма в подобных задачах это сделать весьма затруднительно. Хотя и некоторые свойства говорят в пользу естественности такого выбора: функции плотности унимодальны, а эксцесс выше аналогичного параметра, например, для нормального распределения, что отвечает ныне «модным» в рыночных кругах «тяжелым» хвостам распределений.

Положим $p(x)$ ~ Exp(μ, α), $c(x)$ ~ Exp(μ, β) и $\beta\neq\alpha$, т.е. предполагается, что центры симметрии обеих плотностей одинаковы и равны μ. В силу симметрии задачи полагаем $\mu=0$, т.е. под x в формулах понимаем не будущую цену базового актива, а ее отклонение от среднего.

Поскольку

$$p(x)=\tfrac{1}{2\alpha}\exp\left(-\tfrac{|x-\mu|}{\alpha}\right),\quad c(x)=\tfrac{1}{2\beta}\exp\left(-\tfrac{|x-\mu|}{\beta}\right),\quad x\in\Re,$$

функция относительных доходов при $\mu=0$ принимает вид

$$\rho(x)=\tfrac{\beta}{\alpha}\exp\left(\tfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}|x|\right).$$

Параметризация $\rho(x) = \tau$, где $0 \le \tau \le \beta/\alpha$ при $\alpha \le \beta$ и $\tau > \beta/\alpha$ при $\alpha > \beta$, порождает две обратные к $\rho(x)$ функции (в парных равенствах индексу «1» слева отвечает нижний знак справа)

$$\rho_{1,2}^{\leftarrow}(\tau) = \pm\rho^{\leftarrow}(\tau), \quad \text{где} \quad \rho^{\leftarrow}(\tau) = \tfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha\tau}\right).$$

Поведение функции $\rho(x)$ определяется значениями α и β. Параметр $\kappa = \alpha/\beta$ порождает два нетривиальных случая: $\kappa < 1$ и $\kappa > 1$. В первом случае $\rho(x)$ возрастает при $x < 0$, убывает при $x > 0$ и в точке $x = x^* = 0$ имеет максимум, во втором – убывает при $x < 0$, возрастает при $x > 0$ и в точке $x = 0$ имеет минимум.

В первом случае прогнозная дисперсия меньше рыночной, т.е. инвестор рассчитывает на более стабильное поведение базового актива, чем рынок в целом. Во втором – рынок и инвестор меняются ролями. По терминологии рынка в первом случае инвестор продает волатильность («изменчивость»), во втором – покупает. В обоих случаях принимаем $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^{\lambda}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\lambda > 0$. При рассмотрении случая с продажей волатильности будет удобно еще использовать обозначение $\theta = \lambda/\alpha$.

4.3. ПРОДАЖА ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В случае $\kappa < 1$ инвестор считает рынок менее волатильным, чем об этом свидетельствуют цены опционов. Применение алгоритма порождает следующие симметричные конструкции:

$$Z(\tau) = \left\{x \middle| |x| \ge \rho^{\leftarrow}(\tau) = \tfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha\tau}\right)\right\},$$

$$X_\varepsilon = \left\{x \middle| |x| \ge x_\varepsilon\right\}, \quad -x'_\varepsilon = x''_\varepsilon = x_\varepsilon = \rho^{\leftarrow}(\tau) \ge 0,$$

$$\tau = \rho(x'_\varepsilon) = \rho(x''_\varepsilon) = \rho(x_\varepsilon),$$

$$\mathsf{P}\{X_\varepsilon\} = 2\int_{x_\varepsilon}^{\infty} p(x)\,dx = \alpha^{-1}\int_{x_\varepsilon}^{\infty} e^{-x/\alpha}dx = \exp(-x_\varepsilon/\alpha) = \varepsilon,$$

$x_\varepsilon = -\alpha\ln\varepsilon$ – $(1 - \varepsilon/2)$-квантиль распределения $\mathrm{Exp}(0, \alpha)$,

$\Gamma_\varepsilon = \{x'_\varepsilon, x''_\varepsilon\} = \{-x_\varepsilon, x_\varepsilon\}$ – множество граничных точек X_ε.

Прогнозную функцию (для $0 \le \tau \le \kappa^{-1}$) и обратную к ней, а также стоимостную функцию дают соотношения

$$\mathsf{f_P}(\tau) = \exp\left(-\rho^{\leftarrow}(\tau)/\alpha\right) = \exp\left(-\tfrac{\beta}{\beta-\alpha}\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha\tau}\right)\right) = \left(\tfrac{\alpha\tau}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} = (\kappa\tau)^{\frac{1}{1-\kappa}},$$

$$\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)=\kappa^{-1}\varepsilon^{1-\kappa},$$

$$\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau)=\exp\left(-\rho^{\leftarrow}(\tau)/\beta\right)=\exp\left(-\tfrac{\alpha}{\beta-\alpha}\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha\tau}\right)\right)=\left(\tfrac{\alpha\tau}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}=\left(\kappa\tau\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}.$$

Функция упорядочения с двумя симметричными ветвями, весовая функция и диссонанта с ее производной имеют вид

$$u_{1,2}(\varepsilon)=\left\{x'_{\varepsilon},x''_{\varepsilon}\right\}=\pm x_{\varepsilon}=\mp\alpha\ln\varepsilon,$$

$$w(x)=\left\{u_1^{\leftarrow}(x),x<0;\ u_2^{\leftarrow}(x),x>0\right\}=\exp\left(-\tfrac{|x|}{\alpha}\right),$$

$$g(x)=\phi\left(w(x)\right)=e^{-\theta|x|},\quad g'(x)=\mp\theta e^{-\theta|x|},\quad g''(x)=\theta^2e^{-\theta|x|},$$

$$\gamma(\varepsilon)=\mathsf{C}\left\{X_{\varepsilon}\right\}=\beta^{-1}\int_{-\alpha\ln\varepsilon}^{\infty}e^{-x/\beta}dx=\varepsilon^{\kappa},$$

$$\gamma'(\varepsilon)=\kappa\varepsilon^{\kappa-1}\quad\left(=1/\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon)\right).$$

Основные показатели инвестиции:

$$A=\int_0^1\phi(\varepsilon)\gamma'(\varepsilon)d\varepsilon==\kappa\left(\kappa+\lambda\right)^{-1},$$

$$R=\int_0^1\phi(\varepsilon)d\varepsilon=\left(1+\lambda\right)^{-1},\qquad y=\lambda\left(1-\kappa\right)/\left(\kappa\left(1+\lambda\right)\right)>0.$$

Оптимальный портфель одновременно в пут- и колл-спрэдах дается смешанным представлением (естественного происхождения: при $x\le 0$ используются путы, при $x\ge 0$ – коллы)

$$\boldsymbol{G}=\left(\boldsymbol{U}-\theta\int_{-\infty}^{0}e^{\theta x}d\boldsymbol{P}(x)+\theta\int_0^{\infty}e^{-\theta x}d\boldsymbol{C}(x)\right),$$

а в терминах самих путов и коллов – представлением

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}-\theta\left(\boldsymbol{P}(0)+\boldsymbol{C}(0)\right)+\theta^2\int_{-\infty}^{0}e^{\theta x}\boldsymbol{P}(x)dx+\theta^2\int_0^{\infty}e^{-\theta x}\boldsymbol{C}(x)dx.$$

Платежная функция этого портфеля однозначно определяется параметром θ, сконцентрировавшим в себе как рисковые предпочтения инвестора (числитель λ), так и его прогноз (знаменатель α). Чем меньше α (больше расхождение прогноза и рынка) и больше λ (больше склонность инвестора к риску), тем более острым выглядит пик функции $g(x)$ при $x = 0$ и больше доходность y.

Отметим, что построенный портфель является некоторым континуальным усложнением длинного баттерфляя, реализующего на реальном рынке ту же продажу волатильности.

4.4. ПОКУПКА ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В случае $\kappa > 1$ инвестор считает рынок более волатильным, чем об этом свидетельствуют цены опционов. В данном случае упорядочение функции $\rho(x)$ по величине также очевидно, а семейство **Z** состоит из множеств, дополнительных к случаю $\kappa < 1$. Сообразно этому формулы видоизменяются, и мы имеем

$$Z(\tau) = \left\{ x \middle| |x| \le \rho^{\leftarrow}(\tau) = \tfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} \ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha\tau}\right) \right\},$$

$$X_\varepsilon = \left\{ x \middle| |x| \le x_\varepsilon \right\}, \quad -x'_\varepsilon = x''_\varepsilon = x_\varepsilon = \rho^{\leftarrow}(\tau),$$

$$\tau = \rho(x'_\varepsilon) = \rho(x''_\varepsilon) = \rho(x_\varepsilon),$$

$$\mathsf{P}\left\{ X_\varepsilon \right\} = 2\int_0^{x_\varepsilon} p(x)dx = \alpha^{-1}\int_0^{x_\varepsilon} e^{-x/\alpha}dx = 1 - \exp(-x_\varepsilon/\alpha) = \varepsilon,$$

$x_\varepsilon = -\alpha \ln(1-\varepsilon)$ – $(1 + \varepsilon)/2$-квантиль распределения $\mathrm{Exp}(0, \alpha)$,

$\Gamma_\varepsilon = \left\{ x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \right\} = \left\{ -x_\varepsilon, x_\varepsilon \right\}$ – множество граничных точек X_ε.

Прогнозная функция (для $\tau \ge \kappa^{-1}$) и обратная к ней, а также стоимостная функция имеют вид

$$\mathsf{f}_{\mathsf{P}}(\tau) = 1 - \exp\left(-\rho^{\leftarrow}(\tau)/\alpha\right) = 1 - \exp\left(-\tfrac{\beta}{\beta-\alpha}\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha\tau}\right)\right) = 1 - (\kappa\tau)^{\frac{1}{1-\kappa}},$$

$$\mathsf{f}_{\mathsf{P}}^{\leftarrow}(\varepsilon) = \kappa^{-1}(1-\varepsilon)^{1-\kappa},$$

$$\mathsf{f}_{\mathsf{C}}(\tau) = 1 - \exp\left(-\rho^{\leftarrow}(\tau)/\beta\right) = 1 - \exp\left(-\tfrac{\alpha}{\beta-\alpha}\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha\tau}\right)\right) = 1 - (\kappa\tau)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}},$$

Функция упорядочения с двумя симметричными ветвями, весовая функция портфеля и диссонанта с производными даются представлениями

$$u_{1,2}(\varepsilon) = \left\{ x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \right\} = \pm x_\varepsilon = \mp\alpha\ln(1-\varepsilon),$$

$$w(x) = \left\{ u_1^{\leftarrow}(x), x < 0;\ u_2^{\leftarrow}(x), x > 0 \right\} = 1 - \exp\left(-\tfrac{|x|}{\alpha}\right),$$

$$g(x) = \phi(w(x)) = \left(1 - \exp\left(-\tfrac{|x|}{\alpha}\right)\right)^{\lambda},$$

$$g'(x) = \pm\tfrac{\lambda}{\alpha} e^{-|x|/\alpha}\left(1 - e^{-|x|/\alpha}\right)^{\lambda-1},$$

$$g'(\pm 0) = 0, \pm\alpha^{-1}, \pm\infty \quad \text{при} \quad \lambda > 1, = 1, < 1,$$

$$g''(x)=\tfrac{\lambda^2}{\alpha^2}e^{-|x|/\alpha}\left(1-e^{-|x|/\alpha}\right)^{\lambda-2}\left(e^{-|x|/\alpha}-\tfrac{1}{\lambda}\right),$$

$$\gamma(\varepsilon)=\mathsf{C}\{X_\varepsilon\}=\beta^{-1}\int_0^{-\alpha\ln(1-\varepsilon)}e^{-x/\beta}dx=1-(1-\varepsilon)^\kappa,$$

$$\gamma'(\varepsilon)=\kappa(1-\varepsilon)^{\kappa-1}.$$

Основные показатели инвестиции:

$$A=\int_0^1\phi(\varepsilon)\gamma'(\varepsilon)d\varepsilon=\tfrac{\Gamma(1+\alpha/\beta)\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1+\alpha/\beta+\lambda)},\quad R=\int_0^1\phi(\varepsilon)d\varepsilon=(1+\lambda)^{-1},$$

$$y=R/A-1=\tfrac{\Gamma(1+\alpha/\beta+\lambda)}{(1+\lambda)\Gamma(1+\alpha/\beta)\Gamma(1+\lambda)}-1=\tfrac{\Gamma(1+\alpha/\beta+\lambda)}{\Gamma(1+\alpha/\beta)\Gamma(2+\lambda)}-1>0,$$

$$\Gamma(\nu)=\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}dx.$$

Оптимальный портфель одновременно в пут- и колл-спрэдах (также естественного происхождения) дается смешанным представлением

$$\boldsymbol{G}=\int_{-\infty}^0\left|g'(x)\right|d\boldsymbol{P}(x)-\int_0^\infty g'(x)d\boldsymbol{C}(x).$$

Характер оптимального портфеля из самих путов и коллов зависит от параметра λ, определяющего поведение функции $g(x)$ в нуле. При $\lambda > 1$, $\lambda = 1$, $\lambda < 1$ получаем соответственно

$$\boldsymbol{G}=\int_{-\infty}^0 g''(x)\boldsymbol{P}(x)dx+\int_0^\infty g''(x)\boldsymbol{C}(x)dx,$$

$$\boldsymbol{G}=\tfrac{1}{\alpha}\left(\boldsymbol{P}(0)+\boldsymbol{C}(0)\right)-\tfrac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^0 e^{-|x|/\alpha}\boldsymbol{P}(x)dx-\tfrac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty e^{-|x|/\alpha}\boldsymbol{C}(x)dx,$$

$$\boldsymbol{G}=\int_{-\infty}^0 g''(x)\left(\boldsymbol{P}(x)-\boldsymbol{P}(0)\right)dx+\int_0^\infty g''(x)\left(\boldsymbol{C}(x)-\boldsymbol{C}(0)\right)dx.$$

При $\lambda < 1$ функция $g(x)$ имеет в нуле особенность типа «острие»; чем меньше λ, тем больше инструмент походит на безрисковый актив. При $\lambda = 1$ функция $g(x)$ имеет в нуле излом и напоминает платежную функцию короткого баттерфляя. При $\lambda > 1$ функция $g(x)$ в нуле непрерывна и $g'(0) = 0$; она напоминает платежную функцию кондора – комбинации длинного и короткого стрэнглов с ближе расположенными к нулю страйками длинного стрэнгла. В этом случае также легко прослеживаются качественные аналогии с реальным рынком опционов. (Спрэды, баттерфляи, стрэнглы, кондоры – специальные линейные комбинации, т.е. портфели, коллов и путов.)

5. Заключение

Предлагаемая теория оптимизации портфеля на рынке опционов при соблюдении требований CC-VaR носит универсальный характер и она должна работать для любой пары распределений. Здесь принципиально не затрагиваются вопросы формирования цен на рынке, равно как и вопросы прогнозирования будущих цен базового актива. Первые инвестор принимает за данность, какова бы она ни была. За решение вторых инвестор вне зависимости от источника прогноза несет ответственность сам. В работе предлагается лишь инструментарий, позволяющий инвестору совместить оба распределения к своей выгоде, притом со своими же рисковыми предпочтениями.

Если отвлечься от распределений иллюстративного примера, а также некоторых других, допускающих аналитическое исследование лишь частично, то обычно приходится применять численные методы, связанные с дискретизацией задачи. Тем более если речь идет о реальных рынках опционов, на которых складывается дискретная по страйкам решетка цен. Но это – тема уже для других работ.

Также придется отказываться и от допущений, связанных с нашим использованием терминов «теоретический» и «идеальный», например, тестируя портфель на ценах покупателя и продавца реального рынка с учетом их спрэда. В любом случае для приложений результаты теории следует рассматривать как первое приближение к оптимуму. В этом качестве она полезна уже в том, что позволяет избегать грубых ошибок с точки зрения выбранного критерия и вероятностного прогноза инвестора.

Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов* // Экономика и математические методы, – 2005. – Т. 41, №4. – С. 88–98.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках*. – М.: ВЦ РАН, 2011. – 299 с.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов*. – М.: ВЦ РАН, 2015. – 298 с.
4. КАСИМОВ Ю.Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. – М.: Филинъ, 1998.
5. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Наука, 1975. –750 с. (Перевод с англ.: Cramer H. *Mathematical methods of statistics*. – Princeton University Press, 1946.)
6. МАРШАЛЛ Дж. Ф., БАНСАЛ В.К. *Финансовая инженерия*. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 784 с.
7. AGASANDYAN G.A. *Optimal Behavior of an Investor in Option Market* // Int. Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). – P. 1859–1864.
8. ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.-M., HEATH D. *Coherent measures of risk* // Mathematical Finance. – 1999. – No. 9. – P. 203–229.
9. MARKOWITZ H. *Portfolio Selection* // Journal of Finance. – 1952. – No. 7. – P. 77–91.
10. ROCKAFELLAR R.T., URYASEV S. *Optimization of conditional value at risk* // Journal of Risk. – 2000. – No. 2. – P. 21–41.
11. TOBIN J. *The Theory of Portfolio Selection* // Interest Rates / Hahn F., Breechling F., eds. – London: Macmillan, 1965.

CONTINUOUS VAR-CRITERION AND INVESTOR'S OPTIMAL PORTFOLIO

Gennady A. Agasandyan, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (Moscow, Chertanovskaya st., 34, (495) 313-44-94).

Abstract: The problem of optimal behavior of an investor in the high-developed option market is studied. The investor's risk-preferences function is introduced, and the continuous value at risk-criterion as a continuous generalization of well-known common VaR-criterion is introduced on its basis. Moreover, the investor has his own forecast for probability properties of future behavior of basic option price. The problem is to maximize an average income (or yield) under introduced criterion. The optimal portfolio on the theoretical one-period option market with the given prices picture is constructed. The method is illustrated by an example with two-sided exponential probability distributions.

Keywords: underlier, risk-preferences function, continuous VaR-criterion, Newman-Pearson procedure, optimal portfolio.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко.

Поступила в редакцию 28.02.2017.
Опубликована 31.05.2018.