ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫБОРА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО РАНЖИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Корнеенко В. П.[1]

(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В настоящее время не существует оптимального метода построения результирующего ранжирования, известного как медиана Кемени-Снелла, по матричному критерию между упорядочениями объектов экспертами, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов. Однако задачу построения результирующего ранжирования по матричному критерию между упорядочениями объектов экспертами, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов, можно свести к эквивалентной оптимизационной задаче, если ранжирования объектов представить в ранговой шкале измерения. В этом случае в качестве критерия оптимальности выступает расстояние между ранжированиями объектов, представленными в виде векторных ранговых оценок, в том числе и с учётом оценок объектов со связанными рангами. В статье показано, что введённые расстояния между ранжированиями объектов в ранговой шкале удовлетворяют традиционным аксиомам метрического пространства. Обоснованность перехода от постановки задачи построения медианы Кемени-Снелла по матричному критерию к постановке задачи по критерию близости между ранжированиями в ранговой шкале связана с тем, что между ранжированиями, представленными матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов и ранжированиями в ранговой шкале, как показано в данной статье, существует взаимнооднозначное соответствие.

Ключевые слова: ранговая шкала, расстояние и медиана Кемени, бинарные отношения, ранжирование объектов.

1. Введение

Сегодня неуклонно возрастает роль информационно-аналитической поддержки принятия эффективных по многим критериям решений в различных сферах деятельности общества и государства.

При многокритериальной оценке эффективности объектов экспертами в конкретной предметной области возникает задача

---

[1] *Виктор Павлович Корнеенко, к.т.н., доцент* (vkorn@ipu.ru).

выбора результирующего (группового) ранжирования объектов, представленных точечными и интервальными оценками [1–7, 10–14, 20, 22, 23]. В частности, при построении иерархической системы показателей на начальном этапе возникает задача ранжирования показателей по убыванию их значимости, когда мнения экспертов (аналитиков) не совпадают [9, 16].

В развитии теории экспертных оценок выявлена исключительная роль расстояния и медианы Кемени [10–14]. В классической постановке задача построения результирующего ранжирования, известного как медиана Кемени, по матричному критерию между упорядочениями объектов, представленными матрицами бинарных отношений, относится к классу NP-полных комбинаторных задач [8]. На данный момент для данного класса задач с матричным критерием не существует оптимального метода решения.

Данная статья посвящена оптимизационному методу построения результирующего ранжирования объектов, измеренных в ранговой (порядковой) шкале и представленных в виде векторов (точек) евклидового метрического пространства.

2. Задача выбора результирующего ранжирования объектов, представленных матрицами бинарных отношений

Одним из первоначальных методов построения результирующего ранжирования (упорядочения) n объектов по предпочтительности m экспертами был предложен Дж. Кемени и Дж. Снеллом в работе 1962 г. под названием «Mathematical Models in the Social Sciences» [21] и изданной на русском языке в 1972 г. [6]. В работе [21] упорядочения объектов представлены матрицами бинарных отношений на множестве пар объектов.

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВЫБОРА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО РАНЖИРОВАНИЯ ПО КРИТЕРИЮ БЛИЗОСТИ МАТРИЦ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Рассмотрим ранжирования n объектов из множества $A = \{a_1,\dots, a_n\}$ m экспертами $Э_j$, $j = \overline{1,m}$:

(1) $P_j : a_{j_1} \succcurlyeq a_{j_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{j_l} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{j_n}$.

Ранжирование P_j (1) экспертом представляется в виде квадратной матрицы бинарных отношений частичного и линейного порядка [16]:

(2) $M(P_j) = [p^j_{kq}],\ k, q = \overline{1, n}$,

$$\text{где } p^j_{kq} = \begin{cases} 1, \text{если объект } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{предпочтительнее объекта } a_q; \\ -1, \text{если объект } a_q \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{предпочтительнее объекта } a_k; \\ 0, \text{если объекты } a_q \text{ и } a_k \text{ в } P_j \text{ ранжировании} \\ \quad \text{равноценны.} \end{cases}$$

Расстояние между произвольными ранжированиями P_i и P_j можно рассчитывать по матричным l_1-норме и l_2-норме по формулам [19]

(3) $d_1(P_i, P_j) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|p^i_{kq} - p^j_{kq}\right|$;

(4) $d_2(P_i, P_j) = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(p^i_{kq} - p^j_{kq})^2}$.

Понятно, что представление предпочтений объектов в виде матриц бинарных отношений не позволяет метрически определить расстояния между смежными или любыми парами объектов a_q, $a_k \in A$ ранжирования P_j (1). В работе Дж. Кемени и Дж. Снелла приводится следующее определение результирующего ранжирования (см. с. 33–34 [6]): медианой данного множества упорядочений $P_1, \ldots, P_m$ (не обязательно различных) называется такое упорядочение R, для которого сумма расстояний

(5) $\sum_{j=1}^{m} d(P_j, R)$

минимальна, а средним значением – упорядочение R, для которой минимальна величина

(6) $\sum_{j=1}^{m} d(P_j, R)^2$.

Расстояние (5), часто называемое как «расстояние Кемени-Снелла», между произвольными ранжированиями P_i и P_j, представленными в матричном виде $M(P_j)$, можно вычислить с помощью элементов, расположенных над главной диагональю, по формуле

(7) $d(P_i, P_j) = \sum_{k<q}\left|p^i_{kq} - p^j_{kq}\right|$,

значение которой равно количеству поразрядных несовпадений элементов матриц $M(P_i)$ и $M(P_j)$ ранжирований P_i и P_j.

Роли медианы Кемени-Снелла в экспертных оценках и её вычислению посвящён ряд работ [3–7, 10–14, 18]. При этом возникает вопрос: каков математический смысл критериев (5), (6)? Очевидно, что расстояние (5) представляет из себя l_1-*норму* разности матриц $M(R)$ и $M(P_j)$, а расстояние в формуле (6) – квадрат евклидовой нормы той же разности матриц [19], в которых в качестве неизвестных асимметричного бинарного отношения выступают $n(n-1)/2$ наддиагональных элементов матрицы $M(R)$, принимающие значения из множества $\{-1, 0, +1\}$. По сути задача построения медианы Кемени по матричным критериям (5) или (6) относится к классу комбинаторных задач.

Действительно, каждому произвольному ранжированию

(8) $P_\sigma\colon a_{\sigma_1} \succcurlyeq a_{\sigma_2} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{\sigma_n}$

соответствует матрица бинарных отношений $M(P_\sigma) = \left[p_{kq}^\sigma\right]$, $k, q = \overline{1, n}$, объектов, где $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ – перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ номеров объектов.

Тогда исходная задача выбора результирующего ранжирования относительно мнений m экспертов сводится к поиску перестановки $\sigma^* = (i_1^*, \dots, i_n^*)$ объектов ранжирования, минимизирующей сумму расстояний до исходных ранжирований P_j, $j = \overline{1, m}$:

(9) $R_*(P_1, \dots, P_m) = \min\limits_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{j=1}^m d(P_j, P_\sigma)$,

где $d(P_j, P_\sigma) = \sum_{k<q} \left|p_{kq}^j - p_{kq}^\sigma\right|$.

2.2. СУЩЕСТВУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА

В примерах, приведённых в работах [10, 13, 14], в качестве результирующего ранжирования R_* выступает одно из исходных ранжирований P_j, наименее удалённое в среднем от остальных, хотя в общем случае результирующее ранжирование может не совпадать ни с одним из исходных ранжирований (мнений экспертов).

Формально постановка задачи (9) построения результирующего ранжирования относится к классу комбинаторных задач при достаточно больших n [8], поскольку множество решений ранжирований объектов состоит из $n!$ (n-факториал) всевозможных перестановок только строгих, не считая нестрогих, которых тоже не менее $n!$.

Поэтому в статье [14] вместо классической медианы Кемени предлагается применять «модифицированную медиану Кемени», всегда совпадающую с мнением одного из экспертов, что позволяет избежать эффекта «центра дырки от бублика», т.е., по мнению автора, если предположить, что мнения экспертов равномерно распределены по поверхности тора, то классическая медиана Кемени – центр «дырки от бублика», что делает её расчёт бессмысленным.

Понятно, что такая «модифицированная» медиана медианой ранжирования не является.

3. Сведение исходной задачи выбора медианы Кемени к задаче по критерию близости ранжирований объектов, представленных в ранговой шкале

3.1. ВЗАИМОСВЯЗЬ РАНЖИРОВАНИЙ В ГРАДАЦИЯХ РАНГОВОЙ ШКАЛЫ С МАТРИЦАМИ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ПАР ОБЪЕКТОВ

Каждому объекту $a_k \in A$ в ранжировании P_j (2.1) поставим в соответствие его ранг $r_j^{(k)}$ как порядковое (натуральное) число в ранжировании или связный ранг как среднеарифметическое чисел рангов для равноважных объектов. Ранжирование $Э_j$ экспертом P_j будем представлять в виде векторной оценки в ранговой шкале:

(10) $\vec{r}_j = (r_j^{(1)}, r_j^{(2)}, \dots, r_j^{(n)})$.

Для порядкового типа шкал измерения в качестве допустимых преобразований принято множество монотонно возрастающих преобразований [15]. Таким преобразованием, например, является $\varphi_{П}(x) = x^2$, которое линейные шкальные балльные оценки объектов переводит в нелинейные. При этом упорядочение между объектами хотя и сохраняется, но сравнение объектов после преобразования в шкале разности теряет смысл, т.е. такие шкалы не являются эквивалентными.

Переход от порядковой шкалы к количественной введём с помощью операции метризации расстояния между ранговыми оценками объектов, включая и оценки со связанными рангами [8, 16].

Рассмотрим векторную оценку ранжирования P_j (10) объектов как точку в n мерном евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда расстояния между ранжированиями P_i и P_j можно представить в виде меры близости между векторными оценками

(11) $\rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sum_{k=1}^{n} \left| r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right|,$

в котором отображение $\rho_1 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задаёт метрику пространства [17].

Очевидно, что расстояние между векторами можно вычислить и по формуле евклидовой нормы

(12) $\rho_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2}.$

Легко убедиться, что введённые расстояния между ранжированиями объектов удовлетворяют традиционным аксиомам метрического пространства, а именно: аксиомам тождества, симметрии и треугольника [17].

Взаимосвязь между ранговыми оценками объектов a_k ранжирований P_j и элементами p_{kq}^{j} матрицы $M(P_j)$ (2) бинарных отношений между парой объектов можно представить соотношениями:

а) для объектов с обратным порядком предпочтения –

(13) $r_{j\downarrow}^{(k)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{q=1, k \neq q}^{n} \left(1 - p_{kq}^{j}\right);$

б) для объектов с прямым порядком предпочтения –

(14) $r_{j\uparrow}^{(k)} = n - \frac{1}{2} \sum_{q=1, k \neq q}^{n} \left(1 - p_{kq}^{j}\right).$

Рассмотрим пример. Для ранжирования пяти объектов

$$P_j\colon a_1 \succ a_4 \succ \{a_3 \approx a_5\} \succ a_2$$

матрица бинарного нестрогого отношения примет вид:

(15) $$M(P_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранги для объектов, например, с прямым порядком предпочтения, по элементам матрицы $M(P_j)$ (15):

$r_{j\uparrow}^{(1)} = 5 - \frac{1}{2}[(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)] = 5;$

$r_{j\uparrow}^{(2)} = 5 - \frac{1}{2}[(1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)] = 1;$

$r_{j\uparrow}^{(3)} = 5 - \frac{1}{2}[(1+1)+(1-1)+(1+1)++(1-0)] = 2{,}5;$

$r_{j\uparrow}^{(4)} = 5 - \frac{1}{2}[(1+1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)] = 4;$

$r_{j\uparrow}^{(5)} = 5 - \frac{1}{2}[(1+1)+(1-1)+(1-0)+(1+1)] = 2{,}5.$

Для обратного порядка предпочтения вектор ранговых оценок имеет вид

$\vec{r}_{j\downarrow} = (1;\ 5;\ 3,5;\ 2;\ 3{,}5),$

где $r_{j\downarrow}^{(1)} = 1; r_{j\downarrow}^{(2)} = 5;\ r_{j\downarrow}^{(3)} = 3{,}5; r_{j\downarrow}^{(4)} = 2;\ r_{j\downarrow}^{(5)} = 3{,}5.$

Возникает вопрос о связи расстояний между ранжированиями, представленными в ранговой шкале, и элементами матриц бинарных отношений. Ответ даёт следующая теорема.

Теорема 1 (Корнеенко). Пусть P_j, $j = \overline{1,m}$, – упорядочения n объектов $a_k \in A$ группой из m экспертов, представленные в виде векторных оценок $\vec{r}_j$ (10) в ранговой шкале измерения и матрицами бинарных отношений $M(P_j)$ (2).

Тогда расстояния d_1 (3), d_2 (4), ρ_1 (2), ρ_2 (3) удовлетворяют неравенству:

(16) $\rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \le d_1(P_i, P_j)$ и $\rho_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \le d_2(P_i, P_j)$.

Доказательство. Представим формулы (13) и (14) перехода от элементов матриц бинарных отношений к ранговым градациям в следующем виде:

$r_{j\downarrow}^{(k)} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j};\ r_{j\uparrow}^{(k)} = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j}.$

Имеем

$\left\lceil r_i^{(k)} - r_j^{(k)} \right\rceil = \left\lceil r_{i\uparrow}^{(k)} - r_{j\uparrow}^{(k)} \right\rceil = \left\lceil r_{i\downarrow}^{(k)} - r_{j\downarrow}^{(k)} \right\rceil =$

$$= \frac{1}{2}\left|\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{i} - \sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j}\right|,$$

откуда с учётом свойств модуля, а именно:

$$\big||a| - \lceil b\rceil\big| \leq \lceil a\rceil + [b],$$

приходим к соотношению

$$\rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left| - \sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1,q\neq k}^{n}\left|p_{kq}^{i} - p_{kq}^{j}\right| = d_1(P_i, P_j).$$

Причём равенство $\rho_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = d_1(P_i, P_j)$ имеет место, если выполняется соотношение

$$\left|\sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{i} - \sum_{q=1,q\neq k}^{n} p_{kq}^{j}\right| = \sum_{q=1,q\neq k}^{n}\left|p_{kq}^{i} - p_{kq}^{j}\right|.$$

Аналогично можно показать, что $\rho_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \leq d_2(P_i, P_j)$. Теорема 1 доказана. ■

3.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА МЕДИАНЫ КЕМЕНИ ПО КРИТЕРИЮ БЛИЗОСТИ РАНЖИРОВАНИЙ В РАНГОВОЙ ШКАЛЕ

Каждому объекту $a_k \in A$ в P_j ранжировании поставим в соответствие его ранг $r_j^{(k)}$, рассматривая его, с учётом связных рангов, как вещественное число, а само ранжирование P_j будем представлять в виде векторных оценок $\vec{r}_j$ (10) арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. В связи с этим от комбинаторной задачи (9) нахождения медианы Кемени, обеспечивающей минимум суммы расстояния от m ранжирований P_j, $j = \overline{1,m}$, представленных в виде матриц бинарных отношений, перейдём к эквивалентной задаче, в которой ранжирования представлены в ранговой шкале. Векторную оценку произвольного ранжирования с неизвестными значениями компонент представим в виде

$$\vec{r} = (r_1, \dots, r_k, \dots, r_n).$$

При этом будем предполагать, что r_k – переменное шкальное значение объекта a_k, $k = \overline{1,n}$, принимающее значения на множестве вещественных положительных чисел $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

В качестве меры близости между произвольными ранжированиями P_i и P_j в ранговой шкале примем расстояние между векторными оценками по формуле квадрата евклидовой нормы:

(17) $d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (r_i^{(k)} - r_j^{(k)})^2$,

тогда в качестве критерия расстояния между результирующим R_* и остальными m ранжированиями в ранговой шкале можно взять показатель

(18) $D(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m) = \sum_{j=1}^{m} d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (r_j^{(k)} - r_k)^2$.

Математическая постановка задачи нахождения медианы (результирующего) ранжирования R_* сводится к минимизации показателя (18) по переменным r_k, $k = \overline{1, n}$:

(19) $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (r_j^{(k)} - r_k)^2 \to \min\limits_{(r_1, \dots, r_n)}$

при условии:

(20) $\sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{1+n}{2} \cdot n$.

Условие (20) означает, что поскольку для ранговых оценок объектов выполняется соотношение $\sum_{k=1}^{n} r_j^{(k)} = \frac{1+n}{2} \cdot n$, то это соотношение должно выполняться и для оценок объектов результирующего ранжирования R_*.

В обосновании построения результирующего ранжирования объектов (медианы Кемени) по критерию минимума расстояния в ранговой шкале лежит следующее утверждение.

Теорема 2 (Корнеенко). Пусть ранжирования P_j, $j = \overline{1, m}$, объектов представлены в виде оценок $r_j^{(k)} = r_j(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, с прямым (обратным) порядком предпочтения объектов в ранговой шкале.

Тогда оптимальным решением задачи (19)–(20) по переменным r_k, $k = \overline{1, n}$, являются среднеарифметические числа рангов объектов по числу m ранжирований (экспертов):

(21) $r_k^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} r_j^{(k)}, \forall\, k = \overline{1, n}$,

и результирующее ранжирование:

(22) $R_*\colon a_{k_1} \succcurlyeq a_{k_2} \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{k_n}$,

объектам которого поставим в однозначное соответствие ранг в канонической ранговой шкале:

а) при прямом направлении возрастания предпочтения объектов:

(23) $r_{k_1}^* > r_{k_2}^* > \dots > r_{k_n}^* \Longrightarrow r_{k_1}^* = n; r_{k_2}^* = n - 1; \dots; r_{k_n}^* = 1$;

б) при обратном направлении убывания предпочтения объектов:

(24) $r_{k_1}^* < r_{k_2}^* < \dots < r_{k_n}^* \Rightarrow r_{k_1}^* = 1;\ r_{k_2}^* = 2; \dots;\ r_{k_n}^* = n.$

При равенстве шкальных оценок $r_{k+1}^* = r_{k+2}^* = \dots = r_{k+s}^*$ объектам, занимающим места с $(k+1)$-го по $(k+s)$-е, присвоим «средний» ранг равный

(25) $r_{k+i}^* = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(k+i) = k + \frac{1+s}{2}, \forall i = \overline{1,s}.$

Доказательство теоремы базируется на построении функции Лагранжа для задачи выпуклого программирования (19)–(20) и выполнении необходимых и достаточных условиях существования минимума функции Лагранжа.

Рассмотрим пример. Пусть тремя экспертами упорядочены четыре объекта: $P_1: a_2 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_3$; $P_2: \{a_2 \approx a_3\} \succ a_4 \succ a_1$; $P_3: a_3 \succ a_2 \succ \{a_1 \approx a_4\}$, которым соответствуют векторные оценки в ранговой шкале с прямым порядком предпочтения объектов: $\vec{r}_1 = (2,\ 4,\ 1,\ 3)$; $\vec{r}_2 = (1;\ 3{,}5;\ 3{,}5;\ 2)$; $\vec{r}_3 = (1{,}5;\ 3;\ 4;\ 1{,}5)$.

По формуле r_k^* (21) для k = 1, 2, 3, 4 находим оптимальные оценки объектов, которые представим в виде векторной оценке в количественной шкале измерения $\vec{r}_* = \left(\frac{9}{6},\ \frac{21}{6},\ \frac{17}{6},\ \frac{13}{6}\right)$, и соответвующее ей результирующее ранжирование:

$R_*: a_2 \succ a_3 \succ\succ a_4 \succ a_1,$

которому соответствует векторная оценка в канонической ранговой шкале $\vec{r}_* = (1, 4, 3, 2)$.

3.3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫБОРА

В связи с отсутствием в работе Кемени и Снелла конструктивного метода построения результирующего ранжирования, для решения проблемы группового выбора был предложен ряд правил и принципов согласования индивидуальных мнений экспертов, позволяющих строить результирующее отношение [10, 11, 13, 14].

Наряду с правилом выбора медианы Кемени в соответствии с показателем расстояния (2.9) рассмотрим правила согласования индивидуальных мнений экспертов, представленных бинарными отношениями в виде:

$(a_k, a_q) \in \mathcal{R} \subset A \times A, \ \ \forall a_k, a_q \in A.$

Правило согласования по большинству голосов даёт возможность весьма простым образом определить результирующее (групповое) предпочтение.

Пусть m – число экспертов, $n_{kq} = n(a_k, a_q)$ – число экспертов предпочитающих объект a_k объекту a_q, т.е. для которых имеет место $a_k \succ a_q$. Тогда правило голосования по большинству в l голосов, выполняющих роль порога, определяется следующим образом:

$$a_k \succ a_q \Leftrightarrow n(a_k, a_q) \geq l.$$

Если мерой различия ранжирований выбрано «расстояние Кемени» (2.5), то справедлива следующая теорема, устанавливающая связь мажоритарного правила с медианой Кемени [11].

Теорема 3 (Миркин). Мажоритарное групповое отношение $\mathcal{R}^*(\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m)$, полученное по принципу простого большинства:

$$a_k \succcurlyeq a_q \Leftrightarrow n(a_k, a_q) \geq \frac{m}{2},$$

среди бинарных отношений $\mathcal{R}_j$, $j = \overline{1, m}$, на множестве объектов $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ является медианой в классе всех бинарных отношений.

Рассмотрим пример. Пусть тремя экспертами на основе исходных транзитивных бинарных отношений

$$\mathcal{R}_1 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_1, a_3)\};$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(a_3, a_1), (a_1, a_2), (a_3, a_2)\};$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_2, a_1)\}$$

получены ранжирования трёх объектов a_1, a_2, a_3 в виде

$$P_1\!: a_1 \succ a_2 \succ a_3;\ P_2\!: a_3 \succ a_1 \succ a_2;\ P_3\!: a_2 \succ a_3 \succ a_1\}.$$

Тогда при $l \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ получаем нетранзитивное групповое предпочтение $\mathcal{R}^* = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$.

Для данных ранжированиях в качестве медианы Кемени в соответствии с результатами теорем 2 и 3 будет результирующее ранжирование:

$$R_*\!: a_1 \approx a_2 \approx a_3.$$

Рассмотрим пример. Пусть ранжирования объектов экспертами представлены в виде (здесь исходные данные взяты из примера на с. 75 работы [10]):

$$P_1\colon a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5,\ P_2\colon a_2 \succ a_5 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_3,$$
$$P_3\colon a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_5,\ P_4\colon a_1 \succ a_5 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4,$$
$$P_5\colon a_4 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_2,$$

поставим им в соответствие ранг с прямым порядком предпочтения (см. столбцы 2–6 таблицы 1).

Таблица 1. Исходные данные и результирующие ранжирования

<table>
<tr><th rowspan="2">Объекты, a_k</th><th colspan="5">Ранги объектов ранжирований, P_j</th><th rowspan="2">$\vec{r}_{opt}$</th><th rowspan="2">$\vec{r}_*$</th><th colspan="2">Результирующее ранжирование</th></tr>
<tr><th>$r_1^{(k)}$</th><th>$r_2^{(k)}$</th><th>$r_3^{(k)}$</th><th>$r_4^{(k)}$</th><th>$r_5^{(k)}$</th><th>R_*, в ранговой шкале</th><th>M_*, по мажоритарному правилу</th></tr>
<tr><td>**1**</td><td>**2**</td><td>**3**</td><td>**4**</td><td>**5**</td><td>**6**</td><td>**7**</td><td>**8**</td><td>**9**</td><td>**10**</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>3,8</td><td>5</td><td rowspan="6">$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \approx a_3 \\ a_4 \approx a_5 \end{pmatrix}$</td><td rowspan="6">$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>3,2</td><td>3,5</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>3,2</td><td>3,5</td></tr>
<tr><td>a_4</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>2,4</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>a_5</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>2,4</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>Сумма</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td></tr>
</table>

Количественные оценки объектов результирующего ранжирования, вычисленные по формуле r_k^* (21), представим в виде оптимального вектора: $\vec{r}_{opt} = (3{,}8; 3{,}2; 3{,}2; 2{,}4; 2{,}4)$, которому в ранговой шкале соответствует вектор оценок со связанными рангами:

(26) $\vec{r}_* = (5; 3{,}5; 3{,}5; 1{,}5; 1{,}5)$.

Результирующее ранжирование (медиана Кемени) R_*, которому соответствует векторная оценка (26), представлено в столбце 9 таблице 2 в виде вектор-столбца.

В соответствии с мажоритарным правилом для каждой пары объектов $a_k, a_q \in A$ подсчитаем n_{qk} – число экспертов, считающих объект a_q предпочтительнее a_k. Поскольку, например:

$n(a_1, a_2) > n(a_2, a_1)$,
где если $n(a_1, a_2) = 3$, $n(a_2, a_1) = 2$, то $a_1 \succ a_2$, и т.д.

В результате получим медиану Кемени по мажоритарному правилу, которая представлена в столбце 10 таблицы 2, т.е.

$a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5$.

Сравним результаты формирования медианы Кемени по мажоритарному правилу и как решение оптимизационной задачи.

Рассчитаем меру близости результирующих ранжирований до исходных ранжирований $P = \{P_j\}, j = 1 \div 5$, в градациях матриц бинарных $M(P_j)$ (2) отношениий $\{-1, 0, +1\}$ и в градациях ранговой шкалы (см. столбцы 2–6 таблицы .2). По формулам расстояния

(27) $D_1(R_*, P) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k<q}\left|p_{kq}^{j} - p_{kq}^{*}\right|$.

(28) $D_2(R_*, P) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k<q}\left(p_{kq}^{j} - p_{kq}^{*}\right)^2$.

(29) $S_1\left(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^{m}\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d\left(\vec{r}_j, \vec{r}_*\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left|r_j^{(k)} - r_k^{*}\right|$.

(30) $S_2\left(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^{m}\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(r_j^{(k)} - r_k^{*})^2$.

Результаты сравнений ранжирований в ранговой шкале и градаций матрицы бинарных отношений представлены в таблице 2.

Таблица 2. Оценка ранжирований объектов, полученных различными методами

Медиана	Показатели			
	$D_1(R_*, P)$	$D_2(R_*, P)$	$S_1\left(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^{m}\right)$	$S_2\left(\vec{r}_*, \{\vec{r}_j\}_{j=1}^{m}\right)$
R_*	7,6	**13,2**	6	**11,8**
M_*	**7,2**	14,4	6	12,8

Из таблицы 3 видно, что медиана Кемени R_*: $a_1 \succ \{a_2 \approx a_3\} \succ \{a_4 \approx a_5\}$, вычисленная в ранговой шкале, не совпадает с медианой Кемени, полученной по мажоритарному правилу: M_* : $a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5$.

Данный пример иллюстрирует вывод теоремы 1 о том, что величина расстояний ранжирований объектов до результирующего ранжирования R_* в ранговой шкале не превосходит величин расстояний объектов до результирующего ранжирования M_* по матричному критерию. Кроме того, результирующее ранжирование R_*, как видно из примера, может иметь наименьшую сумму расстояний по критериям S_2 (30), D_2 (28) и не хуже по критерию S_1 (29). Результирующее ранжирование M_* имеет наименьшую сумму расстояний только по критерию D_1 (27). Легко показать, что данный критерий не всегда позволяет определить оптимальное расстояние, если речь идёт, например, об определении расстояний на плоскости.

Таким образом, для приведенного примера можно сделать следующие выводы:

1. В обоих случаях объект a_1 оказался строго предпочтительнее всех остальных объектов.

2. Объекты a_2 и a_3 в обоих случаях строго предпочтительнее объектов a_4 и a_5. Однако между собой в первом случае они эквивалентны, а во втором случае объект a_3 строго предпочтительнее a_2. Поэтому следует дополнительно опросить экспертов о предпочтениях данных объектов.

3. Объекты a_4 и a_5 в обоих случаях оказались строго менее предпочтительнее всех остальных объектов. Однако, как и в предыдущем случае, между собой в первом случае они эквивалентны, а во втором случае объект a_4 строго предпочтительнее a_5. Поэтому в данном случае следует также дополнительно опросить экспертов о предпочтениях данных объектов. В качестве обобщённого решения подходит медиана Кемени R_* в ранговой шкале, поскольку она имеет лучшие значения по показателям D_2, S_1 и S_2 чем медиана M_*, полученная по мажоритарному правилу.

4. Заключение

Задача ранжирований объектов, представленных матрицами бинарных отношений, предложенных Дж. Кемени и Дж. Снеллом, относится к классу комбинаторных NP-полных задач, для которых в настоящее время не существует оптимального метода нахождения результирующего ранжирования по матричному критерию.

При этом представление предпочтений объектов в виде матриц бинарных отношений не позволяет метрически определить расстояния между смежными или любыми парами объектов произвольного ранжирования.

Результирующее ранжирование (медиана Кемени) является оптимальным решением оптимизационной задачи выбора для исходных ранжирований экспертов, представленных в ранговой шкале.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БАУМАН Е.В., ВОЛЬСКИЙ В.И. *Методы обработки интервальных экспертных оценок* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – №3. – С. 127–133.
2. АЙЗЕРМАН М.А., АЛЕСКЕРОВ Ф.Т. *Выбор вариантов: основы теории*. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
3. БЕШЕЛЕВ С.Д., ГУРВИЧ Ф.Г. *Математико-статистические методы экспертных оценок*. –М.: Статистика, 1980. – 263 с.
4. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация*. – М.: Наука, 1984. – 95 с.
5. ДУБОВ Ю.А., ТРАВКИН С.И., ЯКИМЕЦ В.Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем*. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
6. КЕМЕНИ ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ. *Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения*. – М.: Советское радио, 1972. – 192 с.
7. КЕНДЭЛ М. *Ранговые корреляции*. – М.: Мир, 1975. – 216 с.
8. КОРНЕЕНКО В.П. *Методы оптимизации* : учебник. – М.: Высшая школа, 2007. – 664 с.
9. КОРНЕЕНКО В.П., ОЖИГАНОВ Э.Н. *Методика рейтинговой оценки эффективности использования человеческого капитала* // Экономика и предпринимательство. – 2014. – №12 (ч. 3). – С. 183–191.
10. ЛИТВАК Б.Г. *Экспертная информация: Методы получения и анализа*. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
11. МИРКИН Б.Г. *Проблема группового выбора*. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

12. НОВИКОВ Д.А., ОРЛОВ А.И. *Экспертные оценки – инструменты аналитика* // Заводская лаборатория. – 2013. – Т. 79, №4. – С. 3–4.
13. ОРЛОВ А.И. *Роль медиан Кемени в экспертных оценках и статистическом анализе данных* // Теория активных систем: Труды международной научно-практической конференции (14-16 ноября 2011 г., Москва, Россия). Том I. / Под общ. ред. В.Н. Буркова, Д.А. Новикова. – М.: ИПУ РАН, 2011. – С. 172–176.
14. ОРЛОВ А.И. *Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы* [Электронный ресурс] // Научный журнал КубГАУ. – 2013. – №89(05). – URL: http://www.mtas.ru/theory/orlov2011a.pdf (дата обращения: 23.03.2017).
15. ПФАНЦАГЛЬ И. *Теория измерений* . – М.: Мир, 1976. – 247 с.
16. РАМЕЕВ О.А., КОРНЕЕНКО В.П. *Основы теории многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности* : монография. – М.: МАКС-Пресс, 2018. – 2018. – 414 с.
17. СИБИРЯКОВ Г.В., МАРТЫНОВ Ю.А. *Метрические пространства*: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Том. университета, 2012. – 166 с.
18. ФАЙН В.Б., ДЕЛЬ М.В. *Турнирный метод ранжирования вариантов* // Заводская лаборатория. – 2005. – Т. 71, №7. – С. 58–60.
19. ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – М.: Мир, 1989. – 352 с.
20. ШМЕРЛИНГ Д.С., КУЗНЕЦОВА Т.Ю., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю., ЧУРКИН Э.П. *Применение экспертных оценок для задач стратегического планирования*. – М.: Московская школа экономики VUE, 2008. – 36 с.
21. KEMENY J.G., SNELL J.L. *Mathematical Models in the Social Sciences.* – New York, University of Michigan, 1962. – 168 p.
22. JACKSON B.N., SCHNABLE P.S., ALURU S. *Consensus Genetic Maps as Median Orders from Inconsistent Sources* // IEEE/ACM Transactions on computational biology and bioinformatics. – 2008. – Vol. 5, No. 2. – P. 161–171.

23. ISHIZAKA A., LABIB A. *Analytic hierarchy process and Expert Choice: benefits and limitation* // ORinsight. – 2009. – Vol. 24. – P. 201–220.

OPTIMIZATION METHOD OF SELECTING THE RESULTING RANKING OF OBJECTS PRESENTED INRANK SCALE OF MEASUREMENT

Viktor Korneenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (vkorn@ipu.ru).

Abstract: At present, there is no optimal method for constructing the resulting ranking, known as the Kemeny-Snell median, according to the matrix criterion between orderings of objects by experts, represented by matrices of binary relations on a set of pairs of objects. However, the task of constructing the resulting ranking according to the matrix criterion between orderings of objects by experts represented by matrices of binary relations on a set of pairs of objects can be reduced to an equivalent optimization problem if the ranking of objects is presented in a ranking scale of measurements. In this case, the distance between the object rankings presented in the form of vector rank ratings, including taking into account the ratings of objects with related ranks, acts as an optimality criterion. The article shows that the introduced distances between the ranking of objects in the rank scale satisfy the traditional axioms of metric space. The validity of the transition from the statement of the problem of constructing the Kemeny-Snell median by the matrix criterion to the statement of the problem by the criterion of proximity between rankings in the rank scale is related to the fact that between the rankings represented by the binary relations matrices on the set of pairs of objects and the rankings in the rank scale, As shown in this article, there is a one-to-one correspondence.

Keywords: rank scale, Kemeny distance and median, binary relations, object ranking.

УДК 519.8
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2019.82.3

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.

Поступила в редакцию 10.06.2019. Опубликована 30.11.2019.