

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 87
Сентябрь 2020***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2020

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 87

Москва – 2020

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаяев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольников Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Уанкпо Г.Ж.К., Козырев Д.В., Нибасумба Э., Муаль М.Н.Б. <i>Анализ надежности однородной системы передачи данных горячего резервирования</i>	5
Чиркова Ю.В. <i>Задача выбора и размещения базовых станций в беспроводной сети</i>	26

Математическая теория управления

Казаков А.Л., Лемперт А.А., Та Ч.Т. <i>О задачах упаковок неравных шаров в трехмерном пространстве</i>	47
--	----

Анализ и синтез систем управления

Бурков В.Н., Сергеев В.А., Коргин Н.А. <i>Идентификация механизмов комплексного оценивания на основе унитарного кода</i>	67
--	----

Управление в социально-экономических системах

Мальсагов М.Х., Угольницкий Г.А., Усов А.Б. <i>Динамическая модель оценивания при коррупции</i>	86
Калмыков Н.С., Сидельников Ю.В. <i>Введение и экспериментальное исследование гистограммного коэффициента как инструмента для изучения явления сверхдоверия в среде экспертов</i>	101

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ГОРЯЧЕГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ¹

Уанкпо Г. Ж. К.^{2а}, Козырев Д. В.^{3а,б}, Нибасумба Э.^{4а},
Муаль М. Н. Б.^{4а}

(^а Российский университет дружбы народов, Москва)

(^б Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Резервирование является одним из основных способов повышения надежности сложных технических систем и широко применяется не только в наземных системах передачи данных, но и в телекоммуникационных беспроводных сетях на базе высотных привязных мультироторных платформ. В работе рассматривается математическая модель восстанавливаемой резервированной системы передачи данных в виде модели замкнутой однородной системы горячего резервирования каналов передачи данных с одним ремонтным устройством и произвольным числом источников данных. Предполагается, что функция распределения времени безотказной работы компонент системы является экспоненциальной, а функция распределения времени их ремонта – произвольной. Изучается надежность системы, определяемая как стационарная вероятность безотказной работы системы. Предлагаемая аналитическая методология позволила оценить надежность всей системы в случае отказов её компонент. Получены явные аналитические и асимптотические выражения для стационарных вероятностей состояний системы и стационарной вероятности безотказной работы системы, позволяющие анализировать другие операционные характеристики системы относительно производительности резервных компонент. Разработана имитационная модель для анализа надежности системы в тех случаях, когда не удастся получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы в явном аналитическом виде и для построения эмпирической функции распределения времени безотказной работы и функции надежности системы. Для численного анализа и сравнения результатов были выбраны следующие распределения времени ремонта компонент: экспоненциальное, Вейбулла – Гнеденко, Парето, логнормальное и гамма-распределение. Также изучается проблема анали-

¹ Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №19-29-06043 и №20-37-90137.

² Гектор Жибсон Кинманон Уанкпо, аспирант (gibsonhouankpo@yahoo.fr).

³ Дмитрий Владимирович Козырев, к.ф.-м.н., доцент (kozyrev-dv@rudn.ru).

³ Эммануэль Нибасумба, аспирант (ema.patiri2015@yandex.ru).

⁴ Мутуама Нда Бьенвену Муаль, аспирант (bmouale@mail.ru).

за чувствительности характеристик надежности рассматриваемой системы к видам функций распределения времени ремонта компонент системы.

Ключевые слова: стохастическое моделирование, надежность резервированных систем, асимптотический анализ, имитационное моделирование, стационарные вероятности состояний системы, эмпирическая функция надежности.

1. Введение

Ранее в [7] была рассмотрена модель надёжности однородной системы передачи данных облегчённого резервирования с экспоненциальной функцией распределения (ФР) времени безотказной работы (в.б.р.) и произвольной функцией распределения времени ремонта её компонент. Были получены явные аналитические выражения для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности отказа системы. Проведён сравнительный анализ надежности систем холодного и горячего резервирования через модель облегчённого резервирования. Также в [4] была рассмотрена аналитическая модель однородной системы передачи данных горячего резервирования. В [1–2] были построены имитационная модель для исследования надежности замкнутой однородной системы холодного резервирования с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки и имитационная модель расчета стационарных вероятностей и оценки надежности резервированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта её элементов. В [3, 8] было показано, что не всегда можно получить явные аналитические выражения для стационарного распределения рассматриваемой системы передачи данных с холодным резервом. Имитационная модель позволила исследовать надежность системы, определяемую как стационарную вероятность безотказной работы системы, а также получить оценки характеристик надежности системы; также численное исследование и анализ графиков показали, что зависимость характеристик надежности системы от исходных распределений становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении

её компонент, т.е. с ростом относительной скорости восстановления.

Значительная работа была проделана в этой области, например в [6]: была проанализирована надежность системы с учетом отказа по общей причине и оценено улучшение системы по сравнению с существующей системой горячего резервирования, которая изменяется во всей системе. Для анализа надежности используется модель Маркова, и надежность сравнивается с коэффициентом отказов подсистемы. В работе [11] надежность системы горячего резервирования анализируется с помощью моделей независимых систем и зависимых систем с общими сбоями. Надежность резервной системы может быть эффективно проанализирована с помощью марковских моделей, которые могут моделировать избыточную конфигурацию и переход между состояниями. В [19] был рассмотрен анализ надежности многоуровневой системы горячего резервирования. В [13] был представлен обзор основных подходов теории надежности и описан систематический метод анализа надежности резервированных систем с использованием матричных методов. Рассмотрены некоторые общие конфигурации системы, которые включают: горячий резерв, холодный резерв, восстанавливаемые и невосстанавливаемые системы; системы с зависимыми состояниями. Также в [15] был представлен анализ надежности двухкомпонентной системы программируемых логических контроллеров с горячим резервированием, и для этой цели использовались реальные данные промышленной системы. В программируемых логических контроллерах наблюдаются четыре типа отказов: сбой входного модуля, сбой цифрового реле / сбой электропитания, сбой полного сбоя блока и сбой из-за поврежденного программного обеспечения. Понятие проверки введено, чтобы обнаружить тип отказа. Измерения эффективности системы по показателям надежности получены с использованием полумарковских процессов и методов регенерации. В [5], используя концепции теории считающих процессов, предложен простой, точный и эффективный в вычислительном отношении метод определения надежности резервированных систем. Предложенный метод позволяет эффективно анализировать системы с неидентичными компонен-

тами, смешанными компонентами холодного и горячего резерва, общими резервными компонентами между различными подсистемами, работающими в разных условиях, отказами переключения и произвольными распределениями времени отказов. Предложенный метод был продемонстрирован на нескольких примерах, а также предоставлен используемый программный код в MATLAB. В [17] был проведен анализ надежности двухблочной системы горячего резервирования с ремонтируемыми и неремонтируемыми отказами. Предполагалось, что система имеет 3 режима работы, 2 ремонтируемых режима отказа и несколько неремонтируемых режимов отказа. Даны определения новых показателей надежности, а методы их расчета получены с использованием вероятностного анализа, определенного интеграла и метода дополнительных переменных.

Однако во всех рассмотренных выше исследовательских работах авторы не анализировали модель замкнутой однородной горячей резерва с одним устройством восстановления, произвольным числом источников данных, с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени восстановления его элементов, используя математический и имитационный подходы.

2. Математическая модель анализа надежности системы

2.1. ОПИСАНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается замкнутая однородная система горячего резервирования с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени ремонта её компонент, которая, согласно дополненным обозначениям Кендалла [9], будет обозначаться как $\langle M_n/GI/1 \rangle$. Система состоит из n неоднородных каналов передачи данных с одним ремонтным устройством. В данной работе будет рассмотрена зависимость вероятности безотказной работы системы $\langle M_n/GI/1 \rangle$ от относительной скорости восстановления.

Для исследования системы вводятся следующие предположения:

Предположение 1: первоначально резервные компоненты участвуют в функционировании системы наравне с основным;

Предположение 2: отказавшие компоненты поступают в ремонт по одному.

Мы можем рассмотреть следующие состояния исследуемой системы:

Состояние 0: все компоненты работают;

Состояние 1: один элемент отказал и находится в ремонте, $(n - 1)$ элементов работают;

Состояние i : i элементов отказали, один находится в ремонте, $(i - 1)$ – ждут своей очереди на ремонт, $(n - i)$ – работают, $i = 2, n - 1$.

Состояние n : все элементы отказали, один находится в ремонте, остальные $(n - 1)$ ждут своей очереди на ремонт.

Ставится задача нахождения явных аналитических выражений для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности безотказной работы системы как в общем случае, так и для некоторых частных случаев распределений. Для этого рассмотрим случайный процесс $\iota(t)$ – число отказавших компонент системы в момент времени t , определенный на множестве состояний $\varepsilon = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Для марковизации этого процесса, т.е. для описания поведения системы с помощью Марковского процесса (МП) [12], введём дополнительную переменную $x(t) \in R_+^2$ – время, затраченное в момент t на ремонт отказавшего элемента, и воспользуемся расширенным пространством состояний $E = \varepsilon \times R_+^2$. В результате получим двумерный [18] процесс $(\iota(t), x(t))$ с расширенным фазовым пространством $E = \{(0), (1, x), (2, x), \dots, (n, x)\}$.

Предположим, что компоненты системы функционируют независимо друг от друга, и введем следующие обозначения:

A – случайная величина (с.в.), время до отказа основного элемента;

B – с.в., время восстановления отказавшего элемента;

$A(x)$ – функция распределения (ФР) с.в. A ;

$B(x)$ – ФР с.в. B ;

$b(x)$ – плотность распределения (ПР) с.в. B ;

$\tilde{b}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} b(x) dx$ – преобразование Лапласа (ПЛ) плотности $b(x)$;

EA – среднее время безотказной работы основного элемента;

EB – среднее время ремонта отказавшего элемента;

$\rho = EA/EB$ – относительная скорость восстановления;

$\beta(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}$ – условная ПР остаточной длительности ремонта элемента, находящегося в ремонте время t (интенсивность восстановления [10]);

α – параметр экспоненциального распределения времени безотказной работы элемента;

$\lambda_i = (n-i) \cdot \alpha$; $i = \overline{0, n-1}$; $\alpha > 0$ – интенсивность перехода между отказами.

Обозначим через $p_0(t)$ – вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии $i = 0$, и через $p_i(t, x)$ – ПР (по непрерывной компоненте) вероятностей того, что в момент времени t система находится в состоянии $(i = \overline{1, n})$ и время, затраченное на ремонт отказавшего элемента, находится в интервале $(x, x + dx)$;

$$p_0(t)dx = p\{v(t)=0\},$$

$$p_i(t, x)dx = p\{v(t)=i, x < x(t) < x + dx\}, i = \overline{1, n}.$$

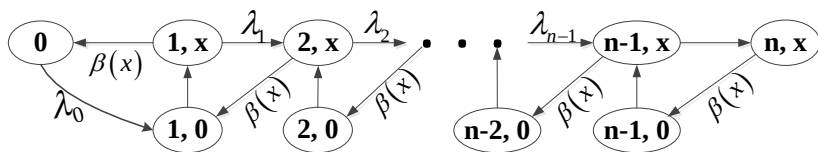


Рис. 1. График интенсивностей переходов

Теорема 1. Стационарное распределение вероятностей состояний восстанавливаемой системы $\langle M_n/GI/1 \rangle$ имеет вид:

$$p_0 = C_1 \frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0}; \quad p_1 = C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1};$$

$$p_i = C_1 \left(A_i \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \right),$$

$$i = \overline{2, n-1}; \quad n > 2;$$

$$p_n = \begin{cases} C_1 \left(A_n E[B] - A_{n-1} \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}} \right), & n = 2; \\ C_1 \left(A_n E[B] - A_{n-1} \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{n-2} \frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \right), & n > 2. \end{cases}$$

Доказательство. С помощью формулы полной вероятности и с предельным переходом при $\Delta \rightarrow 0$ перейдем к выводу системы дифференциальных уравнений Колмогорова, позволяющей найти стационарные вероятности [16] состояний рассматриваемой системы.

Предположим, что для описанного процесса существует стационарное распределение вероятностей при $t \rightarrow \infty$. Тогда получим систему уравнения баланса. Перейдем к решению полученной системы, используя метод вариации постоянной [14].

В итоге получаем следующие аналитические выражения для стационарных вероятностей состояний восстанавливаемой системы $\langle M_n/GI/1 \rangle$ в следующем виде:

$$p_0 = C_1 \frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0}; \quad p_1 = C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1};$$

$$p_i = C_1 \left(A_i \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \right), \quad i = \overline{2, n-1}; \quad n > 2;$$

$$p_n = \begin{cases} C_1 \left(A_n E[B] - A_{n-1} \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}} \right), & n = 2; \\ C_1 \left(A_n E[B] - A_{n-1} \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{n-2} \frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \right), & n > 2; \end{cases}$$

где $E[B]$ – математическое ожидание с.в. времени ремонта отказавшего элемента и

$$A_1 = 1; \quad A_n = A_{n-1}; \quad n = 2;$$

$$A_2 = \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \tilde{b}(\lambda_1) \right) \cdot \frac{1}{\tilde{b}(\lambda_2)}, \quad n \geq 3;$$

$$A_{i+1} = \left(A_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^i (-1)^{i+1-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^i \frac{\lambda_k}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \tilde{b}(\lambda_j) \right) \cdot \frac{1}{\tilde{b}(\lambda_{i+1})},$$

$$i = \overline{2, n-2}; \quad n \geq 4;$$

$$A_n = A_{n-1} \left(1 + \tilde{b}(\lambda_{n-1}) \right) + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-1-j} \cdot \left(\prod_{i=j}^{n-2} \frac{\lambda_i}{(\lambda_j - \lambda_{i+1})} \right) A_j - \\ - \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \cdot \left(\prod_{i=j}^{n-2} \frac{\lambda_{i+1}}{(\lambda_j - \lambda_{i+1})} \right) \cdot A_j \tilde{b}(\lambda_j), \quad n \geq 4.$$

2.2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ РЕДКИХ ОТКАЗАХ

Пусть $\tilde{b}(\lambda_i) = \int_0^\infty e^{-\lambda_i x} b(x) dx$ – ПЛ ПР с.в. времени восстановления отказавшего элемента.

Рассмотрим случай, когда $\max(\lambda_i) \rightarrow 0$.

Используя метод разложения в ряд Тейлора, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}\tilde{b}(\lambda_i) &= \sum_{k=0}^{np} \frac{\tilde{b}^{(k)}(0)}{k!} \lambda_i^k + \bar{o}(\lambda_i^{np}) = \\ &= \sum_{k=0}^{np} \frac{\left[\int_0^\infty e^{-\lambda_i x} \cdot b(x) dx \right]^{(k)}}{k!} \Big|_{\lambda_i=0} \lambda_i^k = \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\lambda_i^k}{k!},\end{aligned}$$

где $E[B^k] = \int_0^\infty x^k b(x) dx$ – моменты k -го порядка времени восстановления отказавшего элемента, np – номер порядка.

В итоге получаем аналитические асимптотические выражения при редких отказах для вероятностей состояний восстанавливаемой системы $\langle M_n/GI/1 \rangle$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}p_0 &= C_1 \frac{\sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!}}{\lambda_0}; \quad p_1 = C_1 \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!}}{\lambda_1}; \\ p_i &= C_1 \left(A_i \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\lambda_i^k}{k!}}{\lambda_i} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\lambda_j^k}{k!}}{\lambda_j} \right), \\ i &= \overline{2, n-1}; n \geq 3; \\ p_n &= C_1 \left(A_n b - A_{n-1} \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\lambda_{n-1}^k}{k!}}{\lambda_{n-1}} \right), n = 2.\end{aligned}$$

Иначе

$$p_n = C_1 \left(A_n b - A_{n-1} \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\lambda_{n-1}^k}{k!}}{\lambda_{n-1}} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{n-2} \frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\lambda_j^k}{k!}}{\lambda_j} \right).$$

Как видно из приведенных выражений, имеется зависимость стационарных вероятностей состояний системы от вида распределений времени ремонта. Однако эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» ремонте отказавших элементов, т.е. с ростом относительной скорости восстановления ρ [2, 7].

3. Численные и графические результаты по явным аналитическим формулам

Рассмотрим частные случаи модели при $\rho = 100$; $n = \{2; 3; 5\}$; где $\rho = \frac{a_1}{b_1}$ и $b_1 = 1$, с разными известными распределениями времени ремонта.

В таблице 1 приведены полученные значения вероятности $1 - P_n$ безотказной работы восстанавливаемой системы.

Для анализа и сравнения результатов были выбраны следующие распределения времени ремонта: экспоненциальное (M), Вейбулла – Гнеденко ($WB = 0,4$), Парето ($PAR = 7$), гамма- ($G = 3$) и логнормальное ($LN = 1$).

Таблица 1. Точные значения (Т.з.) и приближенные значения (П.з.) вероятности безотказной работы восстанавливаемой системы $1 - p_n$ при $\rho = 2$

n		M	$GW(W)$	$PAR(P)$	$G(G)$	$LN(Sig)$
2	Т.з.	0,9998	0,9990	0,9998	0,9998	0,9997
	П.з.	0,9998	0,9989	0,9998	0,9998	0,9997
3	Т.з.	0,9999	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999
	П.з.	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
5	Т.з.	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
	П.з.	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Видно, что для всех рассматриваемых распределений чем больше число элементов системы, тем, естественно, больше вероятность безотказной работы системы. А также с увеличением числа порядка разложения в ряд Тейлора видно, что результаты асимптотического выражения совпадают (полностью согласуются) с результатами, полученными

по точным формулам.

На рис. 2 представлены графики зависимости вероятности безотказной работы системы от относительной скорости восстановления $\rho = 25$.

Графические результаты демонстрируют вывод о высокой асимптотической нечувствительности стационарной надежности системы – хорошо видно, что различия между кривыми при «быстром» восстановлении становятся исчезающе малыми для всех рассматриваемых распределений времени ремонта компонент системы [2, 7].

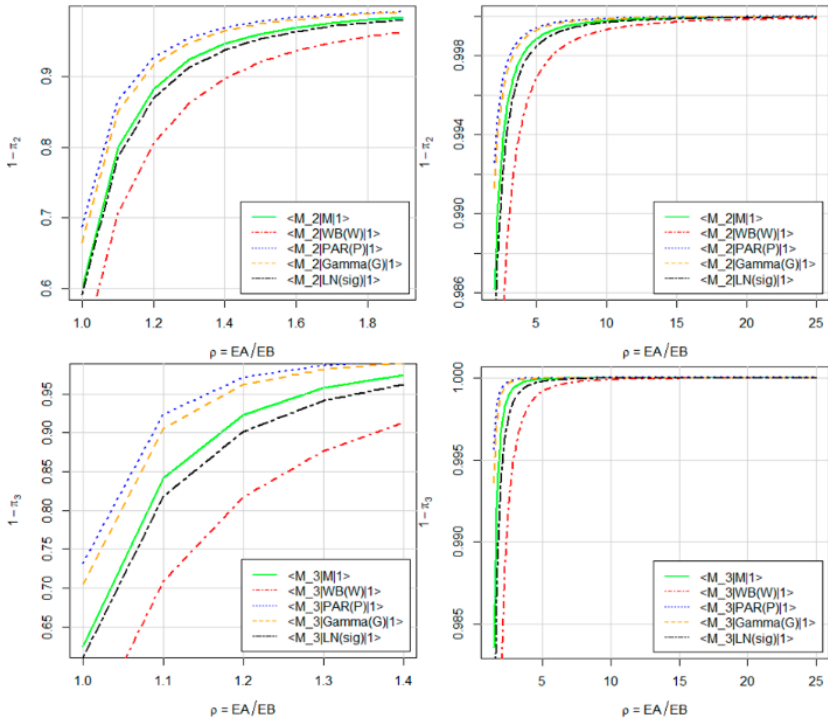


Рис. 2. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы $1 - p_n$ от ρ при $n = \{2; 3\}$

4. Имитационная модель анализа надежности системы

4.1. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

Поскольку не всегда удастся получить явные аналитические выражения для стационарного распределения рассматриваемой системы, особенно в случае, когда функция распределения времени безотказной работы системы не является экспоненциальным распределением, то был применен дискретно-событийный имитационный подход.

Для описания алгоритма имитационного моделирования надёжности системы введём следующие переменные [7]:

double t – часы модельного времени, меняются при отказе или восстановлении компонент системы;

int i, j – переменные состояния системы; при наступлении события осуществляется переход из i в j ;

double t_{nextfail} – служебная переменная, в которой хранится время до следующего отказа элемента;

double $t_{\text{nextrepair}}$ – служебная переменная, в которой хранится время до следующего окончания ремонта отказавшего элемента;

int k – счетчик числа итераций основного цикла.

Для наглядности имитационная модель представлена на рис. 3 в виде блок-схемы.

Алгоритм 1.

Исходные данные:

A – с.в., время до отказа основного элемента;

B – с.в., время восстановления отказавшего элемента;

i – число отказавших элементов;

n – число элементов в системе;

$\xi = \{\xi_1 < \dots < \xi_n\}$ – время отказа элемента;

$X = \{X_1 < \dots < X_n\}$ – момент отказа элемента в системе;

η – время ремонта отказавшего элемента;

Y – момент окончания ремонта элемента в системе;

$t_{\text{Тек}}$ – текущее время;

T – максимальное модельное время.

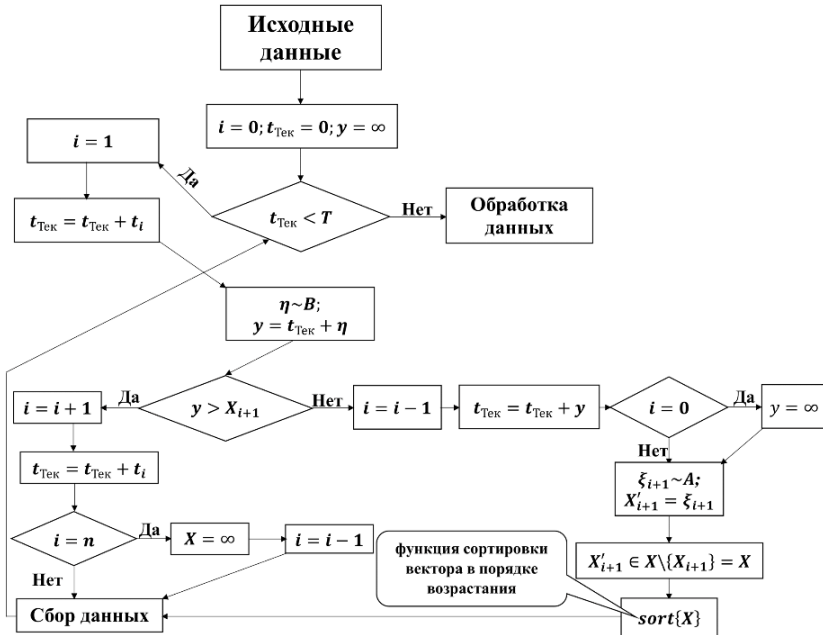


Рис. 3. Блок-схема имитационной модели для оценки стационарных вероятностей состояний системы

Ввод: “GI”, a1, b1, n, T, NG.

“GI” – функция распределения;

a1 – среднее время между отказами элементов;

b1 – среднее время ремонта;

n – число элементов в системе;

T – максимальное модельное время прогона;

NG – число графиков траекторий.

Вывод: стационарные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_n$.

4.2. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАДЁЖНОСТИ СИСТЕМЫ

В этом случае при отказе n -го элемента система перестаёт функционировать (процесс попадает в поглощающее состояние).

Алгоритм 2.

Исходные данные:

В этом разделе, максимальное модельное время $T = \infty$.

Ввод: “GI”, a_1 , b_1 , n , NG .

Вывод: Оценка надёжности системы $\widehat{ET}$.

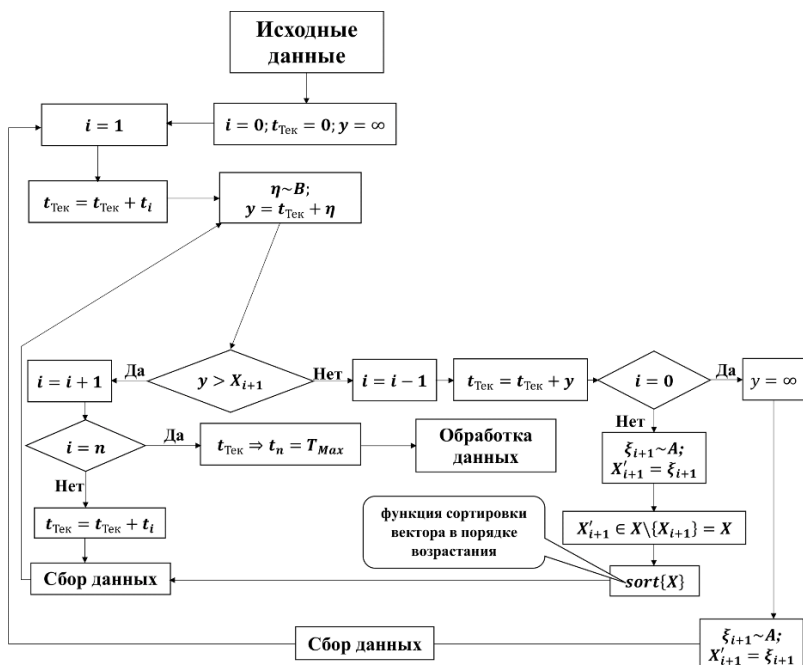


Рис. 4. Блок-схема имитационной модели для оценки надёжности системы

5. Сравнительный анализ численных и графических результатов

Рассмотрим модели при $n = 2$; $T = 100000$; $NG = 1000$; где $\rho = \frac{a_1}{b_1} = 25$ и $b_1 = 1$.

В таблице 2 приведены значения стационарных вероятностей состояний восстанавливаемой системы p_i , вычисленные как методом имитационного моделирования (Им), так и по аналитическим формулам (Ан).

Таблица 2. Стационарные вероятности состояний p_i восстанавливаемой системы

		π_0	π_1	π_2
M	Им.	0,9802	0,0196	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0196	0,0002
$GW(W)$	Им.	0,9807	0,0191	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0192	0,0006
$PAR(P)$	Им.	0,9801	0,0197	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0197	0,0001
$G(G)$	Им.	0,9802	0,0196	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0197	0,0001
$LN(Sig)$	Им.	0,9804	0,0194	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0195	0,0003

Как видно, результаты, полученные имитационным способом, хорошо аппроксимируют результаты, полученные по явным аналитическим формулам [3].

На рис. 5 представлены графики зависимости вероятности безотказной работы системы и графики абсолютной разности между значениями стационарной надёжности системы при показательном и непоказательных распределениях времени безотказной работы компонент системы.

Как можно видеть, абсолютная разность вероятности безотказной работы системы между экспоненциальным и логнормальным слишком мала. Система с Парето-распределением времени безотказной работы и с экспоненциальным распределением времени ремонта её компонент показала самую высокую стационарную надёжность системы.

На рис. 6 представлены графики эмпирической функции распределения $F^*(t)$ и эмпирической функции надёжности $R^*(t)$ при $\rho = 5$; $n = 2$.

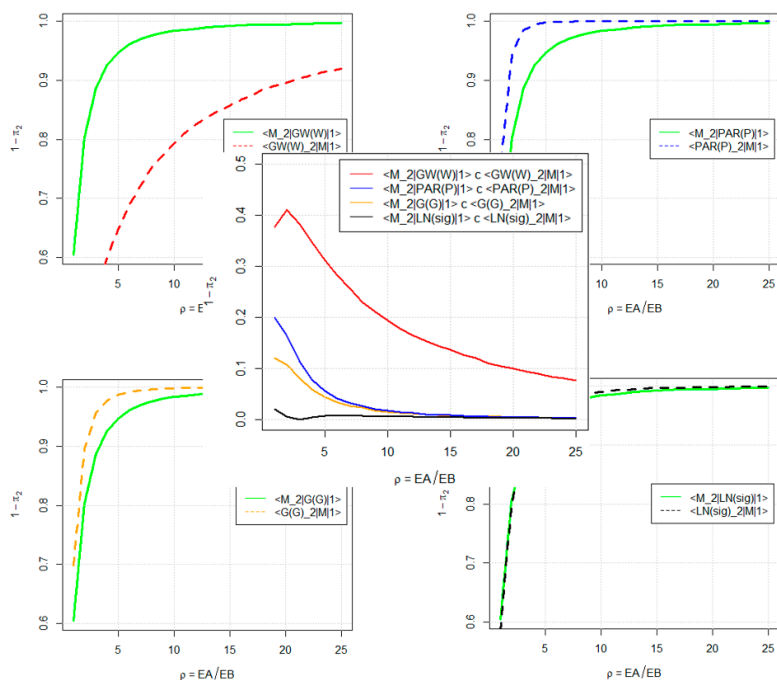


Рис. 5. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы $1 - p_2$ от ρ и графики абсолютной разности с ростом ρ

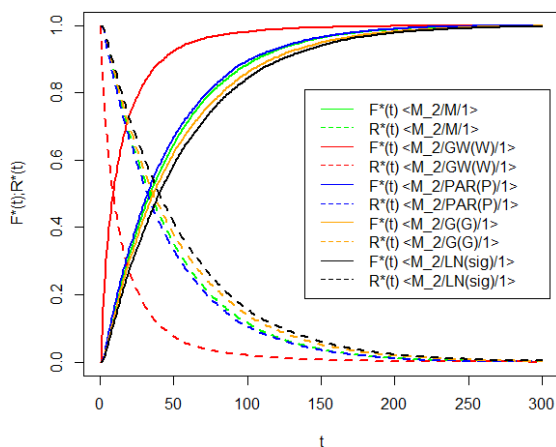


Рис. 6. Графики эмпирической функции распределения $F^*(t)$ и эмпирической функции надёжности $R^*(t)$

6. Заключение

В работе были получены явные аналитические выражения для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности безотказной работы системы в общем случае, а также асимптотическое выражение для вероятностей состояния системы при редких отказах. Полученные формулы показывают наличие явной зависимости этих характеристик от вида ФР времени ремонта её компонент.

Численный анализ показал, что с увеличением числа порядка разложения в ряд Тейлора видно, что результаты асимптотического выражения хорошо согласуются с результатами, полученными по точным формулам. Графические результаты демонстрируют высокую асимптотическую нечувствительность стационарной надежности системы, что хорошо видно из анализа различий между кривыми при «быстром» восстановлении. В качестве метрики близости кривых была выбрана равномерная разность, которая становится исчезающе малой для всех рассматриваемых распределений времени ремонта элементов системы с ростом относительной скорости восстановления.

Было проведено имитационное моделирование системы. Численный анализ показал, что построенная имитационная модель хорошо аппроксимирует аналитическую модель системы, а значит может быть использована в тех случаях, когда не удается получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы в явном аналитическом виде. Также были построены графики эмпирической функции распределения в.б.р. системы и эмпирической функции надежности системы.

Литература

1. УАНКПО Г.Ж.К., КОЗЫРЕВ Д.В. *Программный комплекс имитационного моделирования и расчета стационарных вероятностей и оценки надежности резервированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта её элементов* // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2019. – Т. 15, №3. – С. 542–550. – DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.542-550.

2. УАНКПО Г.Ж.К., КОЗЫРЕВ Д.В. *Аналитическое и имитационное моделирование надежности замкнутой однородной системы с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки* // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2018. – Т. 14, №3. – С. 548–555.
3. УАНКПО Г.Ж.К., КОЗЫРЕВ Д.В. *Анализ чувствительности характеристик надёжности модели дублированной системы передачи данных к виду распределений времени безотказной работы и ремонта её элементов* // В сб.: Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (Distributed computer and communication networks: control, computation, communications, DCCN-2016): материалы Девятнадцатой международной научной конференции, 21–25 ноября 2016 г. – С. 473–480.
4. УАНКПО Г.Ж.К., КОЗЫРЕВ Д.В., ГУДКОВА И.А. *Модель надёжности однородной системы передачи данных горячего резервирования с произвольным распределением времени ремонта элементов* // Обозрение прикладной и промышленной математики (ОПиПМ). – 2019. – Т. 26, №4. – С. 384–386. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=42583668.
5. AMARI S.V.; DILL G. *A new method for reliability analysis of standby systems* // Proc. of the Annual Reliability and Maintainability Symposium. – Article number: 4914713. – P. 417–422. – DOI: 10.1109/RAMS.2009.4914713.
6. CHAE E., PARK C.-W., KANG J.-W. *Reliability Analysis of Hot-Standby Sparing Sub-system with Common Cause Failures for Railway* // Journal of the Korean Society for Railway. – December, 2018. – Vol. 21, No. 11. – P. 1072–1079. – DOI: 10.7782/JKSR.2018.21.11.1072.
7. HOUANKPO H.G.K., KOZYREV D.V. *Reliability Model of a Homogeneous Warm-Standby Data Transmission System with General Repair Time Distribution* // Springer Nature Switzerland AG, 2019 / Eds.: V.M. Vishnevskiy, K.E. Samouylov, D.V. Kozyrev: DCCN 2019, LNCS 11965. – P. 443–454. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-36614-8_34.

8. HOUANKPO H.G.K., KOZYREV D.V. *Sensitivity Analysis of Steady State Reliability Characteristics of a Repairable Cold Standby Data Transmission System to the Shapes of Lifetime and Repair Time Distributions of its Elements* // Selected Papers of the VII Conference “Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems”, Moscow, Russia, 24-Apr-2017, CEUR Workshop Modellings 1995 (2017). – P. 107–113. – URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1995/paper-15-970.pdf>.
9. KENDALL D.G. *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains* // In: Ann. Math. Stat. – 1953. – Vol. 24. – P. 338–354.
10. LISNIANSKI A., LAREDO D., HAIM H.B. *Multi-state Markov model for reliability analysis of a combined cycle gas turbine power plant* // In: Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management – 2016 (SMRLO-2016). – DOI: <https://doi.org/10.1109/SMRLO.2016.31>.
11. PARK C.-W., CHAE E., SHIN D.-H. *Reliability Analysis of Hot-Standby Sparing System with Common Cause Failures for Railway* // Journal of the Korean Society for Railway. – June, 2017. – Vol. 20, No. 3. – P. 349–355. – DOI: 10.7782/JKSR.2017.20.3.349.
12. PARSHUTINA S., BOGATYREV V. *Models to support design of highly reliable distributed computer systems with redundant processes of data transmission and handling* // In: International Conference “Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies – 2017” (IT&QM&IS-2017). – DOI: <https://doi.org/10.1109/ITMQIS.2017.8085772>.
13. PATTAVINA J. *Reliability Analysis for Redundant Systems* // EDN Magazine, in: Edn-Boston then Denver then Highlands Ranch Co. – April 2011. – URL: <https://www.researchgate.net/publication/340610343>.
14. PETROVSKY I.G. *Lectures on the theory of ordinary differential equations* // Lectures on the theory of ordinary differential equations. – Moscow, GITTL, 1952. – 232 p. (In Russian).

15. RIZWAN S.M., KHURANA V., TANEJA G. *Reliability analysis of a hot standby industrial system* // International Journal of Modelling and Simulation. – September, 2010. – Vol. 30(3). – P. 315–322. – DOI: 10.2316/Journal.205.2010.3.205-5057.
16. SEVASTYANOV B.A. *An Ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals* // Theor. Probab. Appl. – 1957. – Vol. 2(1). – P. 104–112.
17. SU B. *Reliability analysis of a new 2-unit hot standby redundant system* // 38th International Conference on Computers and Industrial Engineering-2008. – 2008. – Vol. 2. – P. 1741–1747.
18. THE J., LAI C.-M., CHENG Y.-H. *Impact of the real-time thermal loading on the bulk electric system reliability* // IEEE Trans. Reliab. – 2017. – Vol. 66(4), 11101119. – DOI: <https://doi.org/10.1109/TR.2017.2740158>.
19. WU J., LUO S. *Reliability analysis of layered structure hot standby redundancy system* // ISSN: 1673-0291. – December, 2011. – Vol. 35, Iss. 6. – P. 44–48.

RELIABILITY ANALYSIS OF A HOMOGENEOUS HOT STANDBY DATA TRANSMISSION SYSTEM

Hector Gibson Kinmanhon Houankpo, Postgraduate Student, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow (gibsonhouankpo@yahoo.fr).

Dmitry Kozyrev, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow; Senior research scientist, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia (kozyrev-dv@rudn.ru).

Emmanuel Nibasumba, Postgraduate Student, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow (ema.patiri2015@yandex.ru).

Moutouama N'dah Bienvenu Mouale, Postgraduate Student, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow (bmouale@mail.ru).

Abstract: In this work, we consider the mathematical model of a repairable data transmission system as a model of a closed homogeneous hot standby system with one repair device with an arbitrary number of data sources with an exponential

distribution function of uptime and an arbitrary distribution function of the repair time of its elements. We study the system-level reliability, defined as the steady-state probability of failure-free system operation. The proposed analytical methodology made it possible to evaluate the reliability of the entire system in case of failure of its elements. Explicit analytic and asymptotic expressions are obtained for the steady-state probabilities of system states and the steady-state probability of failure-free system operation, which allow us to analyze other operational characteristics of the system relative to the performance of the backup elements using the constant variation method. We developed a simulation model of the system for the cases when it is not possible to obtain expressions for the steady-state probabilities of system in an explicit analytical form and for constructing an empirical lifetime distribution function and the system reliability function. Exponential, Weibull – Gnedenko-, Pareto-, Gamma- and Lognormal distributions were selected for the numerical analysis and comparison of results.

Keywords: stochastic modeling, reliability of redundant systems, asymptotic analysis, simulation modeling, stationary probabilities of system states, empirical reliability function.

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

DOI: 10.25728/ubs.2020.87.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.М. Вишневым.*

Поступила в редакцию 31.08.2020.

Опубликована 30.09.2020.

ЗАДАЧА ВЫБОРА И РАЗМЕЩЕНИЯ БАЗОВЫХ СТАНЦИЙ В БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ

Чиркова Ю. В.¹

(ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск)

Исследуется модель эгоистичного выбора базовой станции в беспроводной сети в игровой постановке, где каждый игрок стремится увеличить свою величину отношения «сигнал к интерференции плюс шум». Для модели $N+1$ игроков, распределенных на отрезке с некоторой плотностью, построена система интегральных уравнений, решение которой дает равновесные стратегии выбора базовых станций. Также исследуется задача оптимального размещения базовых станций на отрезке, где владельцы базовых станций стремятся максимизировать число своих абонентов, ведущих себя согласно стратегиям в предыдущей модели. Построены системы интегральных уравнений, решение которых дает стратегии размещения базовых станций для двух сценариев: социально-оптимального и эгоистичного поведения владельцев станций. Разработано программное обеспечение для численного нахождения и визуализации решений для данных моделей.

Ключевые слова: беспроводная сеть, эгоистичная маршрутизация, отношение «сигнал к интерференции плюс шум».

1. Введение

Беспроводная сеть состоит из большого количества точек доступа – базовых станций, которые покрывают определенную географическую область, чтобы обеспечить беспроводное соединение для пользователей. Обычно эти точки доступа перекрываются, т.е. в зоне покрытия существуют области, в которых доступен сигнал с нескольких базовых станций. Перекрывание требуется для передачи соединения на другие базовые станции, чтобы обеспечить непрерывность связи. С другой стороны, некоторые беспроводные сети используют несколько базовых станций для предоставления услуги радиодоступа для определенной области, чтобы обслуживать большое количество мобильных пользова-

¹ Юлия Васильевна Чиркова, к.ф.-м.н. (julia@krc.karelia.ru).

телей. Мобильные пользователи делают выбор самостоятельно, пытаясь максимизировать качество своей связи. Выбор ближайшей базовой станции не всегда является наилучшей возможной стратегией, поскольку другие игроки могут уже использовать ресурсы данной станции. В ряде работ представлены исследования в области решения подобных задач выбора базовой станции с целью достижения различных целей: повысить пропускную способность пользователей [4, 6, 7, 14, 16], минимизировать помехи среди пользователей [2, 5, 12], минимизировать стоимость выбора базовой станции [11], максимизировать отношение «сигнал к интерференции плюс шум» как показатель качества связи [1, 10, 15]. В работе [3] решается задача максимизации числа поддерживаемых соединений в беспроводных сетях, где передача поддерживается тогда и только тогда, когда отношение SINR для приемника больше определенного порога. Отношение сигнала к интерференции плюс шум (SINR) – один из важнейших показателей качества связи в беспроводных сетях [1], данная величина используется в основе многих математических моделей анализа таких сетей. Один из популярных подходов к повышению производительности системы – это предложение новых сценариев для управления решением задачи выбора станций и анализа производительности на основе теоретико-игровых моделей [4, 10, 13, 15, 16]. Методы теории игр применимы не только в случае, когда требуется распределить ограниченное количество ресурсов среди большого числа эгоистичных пользователей, но также и в случае возникновения антагонистичных участников игры. В работах [8, 9] на основе отношения SINR строятся модели для оптимизации работы сети в условиях возникновения DoS-атак, при которых атакующий намеренно увеличивает уровень интерференции для снижения качества связи.

В данной работе исследуется модель эгоистичного выбора базовой станции в беспроводной сети. Допустим, что на некоторой территории расположено несколько базовых станций беспроводной связи. Пользователь с устройством мобильной связи находится в некоторой точке либо передвигается по территории

и в каждой своей точке нахождения он решает, с какой из доступных базовых станций лучше соединиться его мобильному устройству, чтобы обеспечить себе наилучшее качество связи. В случае единственного пользователя оптимальным решением был бы выбор ближайшей станции, однако на данной территории могут находиться еще пользователи, решающие аналогичную задачу. Если несколько мобильных устройств соединяются с одной станцией, качество связи на данной станции ухудшается и может возникнуть ситуация, когда оптимально было выбрать более удаленную станцию, но менее загруженную соединениями.

Рассмотрим задачу как игру, в которой игроками являются устройства мобильной связи. В каждой точке нахождения игрок выбирает базовую станцию для соединения, пытаясь максимизировать для себя значение отношения «сигнал к интерференции плюс шум» в виде, используемом, например, в работах [3, 15]. В данной модели значение «сигнал» обратно пропорционально квадрату расстояния до выбранной базовой станции. «Интерференция плюс шум» – это величина, пропорциональная сумме сигналов всех игроков, выбравших данную базовую станцию, и некоторой постоянной величины – уровня шума на данной базовой станции. Здесь не учитывается влияние сигналов игроков, выбравших другую базовую станцию. Рассматривается 1-размерная модель, т.е. предполагается, что базовые станции и игроки расположены на некотором отрезке. Такая модель может быть применима к тем случаям, когда рассматриваемая территория имеет сильно вытянутую форму, например, населенные пункты, расположенные вдоль дорог, рек, побережий озер, что является частой ситуацией в таежных областях. Также исследуется задача оптимального размещения базовых станций на отрезке, где владельцы базовых станций стремятся максимизировать число своих абонентов, ведущих себя согласно стратегиям в предыдущей модели.

2. Задача выбора базовых станций

В рассматриваемой игре участвуют $N + 1$ игрок с координатами, которые распределены на числовой прямой в пределах интервала $[T_0, T]$ с некоторыми одинаковыми известными функциями плотности. Каждый из игроков знает свою координату x , а также функцию $p(\cdot)$ плотности распределения координаты каждого из остальных N игроков. Положим, что игрокам нужна связь в некотором интервале $[T_0, T]$ (например, это могут быть границы населенного пункта). На числовой прямой также расположено n базовых станций, для каждой i -й из которых известны характеристики: координата b_i , высота h_i , уровень шума c_i . Считаем, что базовые станции упорядочены по возрастанию значений их координат.

Стратегией каждого игрока является набор $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ пороговых координат переключения между станциями. Положим, что самая левая и самая правая координаты соединения игрока с базовыми станциями совпадают с концами интервала $[T_0, T]$ и связаны соответственно с первой и n -й базовыми станциями, т.е. $t_0 = T_0$ и $t_n = T$. Стратегический набор порогов t является допустимым, если $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1}$ и все $t_i \in [T_0, T]$, $i = 0, \dots, n$. Для набора стратегий t будем считать, что при выборе базовой станции все игроки придерживаются следующего правила выбора станции (ПВС).

Определение 1 Правило выбора станции (ПВС). Игрок с координатой x выбирает базовую станцию i , если $t_{i-1} < x < t_i$. Если есть такой порог t_i , что $x = t_i$, то игрок может выбрать либо станцию i , либо станцию $i + 1$.

Таким образом, допустимый стратегический набор порогов $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ делит интервал $[T_0, T]$ на n подынтервалов таких, что игроки, находящиеся на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ выбирают для соединения базовую станцию i . Все игроки одинаковы и одинаково действуют. Поэтому стратегию t можно считать общей для всех игроков.

Функцией выигрыша каждого из игроков является ожидаемое им значение своего отношения «сигнал к интерференции плюс шум». Для игрока, находящегося в точке x , если он выбрал для соединения базовую станцию i , его функция выигрыша определяется как

$$SINR_i(x, t) = \frac{\frac{1}{h_i^2 + (x - b_i)^2}}{\frac{1}{h_i^2 + (x - b_i)^2} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{Np(y)dy}{h_i^2 + (y - b_i)^2} + c_i}.$$

В качестве суммы сигналов остальных игроков используется ее математическое ожидание с учетом того, что игроки действуют одинаково. Здесь y – переменная интегрирования на интервале $[t_{i-1}, t_i]$, в каждой точке y которого координата каждого из N других игроков распределена с плотностью $p(y)$.

Упростим функцию выигрыша:

$$SINR_i(x, t) = \frac{1}{1 + (h_i^2 + (x - b_i)^2) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{Np(y)dy}{h_i^2 + (y - b_i)^2} + c_i \right)}$$

и рассмотрим ее производную:

$$\frac{\partial SINR_i}{\partial x} = - \frac{2(x - b_i) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{Np(y)dy}{h_i^2 + (y - b_i)^2} + c_i \right)}{\left(1 + (h_i^2 + (x - b_i)^2) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{Np(y)dy}{h_i^2 + (y - b_i)^2} + c_i \right) \right)^2},$$

которая меньше 0 при $x < b_i$ и больше 0 при $x > b_i$. Это означает, что для любой базовой станции и любого игрока его функция выигрыша на этой станции строго увеличивается с приближением к ней и строго уменьшается с удалением от нее.

Определение 2. Стратегический набор порогов t является равновесием по Нэшу, если все игроки выбирают базовые станции согласно ПВС с набором порогов t , и ни один игрок не может увеличить значение своей функции выигрыша, действуя согласно ПВС с другим набором порогов.

Определим значение $SINR_{max}(x, t) = \max_{i=1, \dots, n} SINR_i(x, t)$ – наилучшее значение выигрыша, которое игрок с координатой x может получить при данном расположении базовых станций b и стратегии t . В равновесии игроки получают это значение в качестве выигрыша. Следующий пример показывает, что в случае неравновесной стратегии и использования ПВС есть участки, где игроки получают в качестве выигрыша меньшие значения, чем $SINR_{max}(x, t)$. То есть в неравновесных ситуациях следование ПВС невыгодно для игроков.

Пример 1. На отрезке $[0, 4]$ расположены 3 одинаковые базовые станции с координатами $b_1 = 1$, $b_2 = 2,5$, $b_3 = 3$ и высотой и уровнем шума, равными 1. На этом отрезке равномерно распределены координаты $N = 10$ игроков. Игрок $N + 1$ знает свою координату x . Произвольный стратегический набор порогов $(t_1 = 1,5, t_2 = 3,5)$ не является равновесным. Это видно по рис. 1, где построены графики функций выигрыша игрока с координатой x на различных станциях. В частности, невыгодными являются точки переключения между станциями. Например, при переключении в точке $x = 1,5$, согласно ПВС, со станции 1 на станцию 2 игрок получает выигрыш меньше, чем если бы он остался на станции 1. •

Лемма 1. Если равновесный стратегический набор порогов t существует, то он является решением системы $SINR_i(x, t)|_{x=t_i} = SINR_{i+1}(x, t)|_{x=t_i}$ для всех $i = 1, \dots, n - 1$.

Доказательство. Пусть t – равновесный стратегический набор порогов и есть базовые станции i , $i + 1$, при переключении между которыми в точке $x = t_i$ оказывается, что $SINR_i(x, t)|_{x=t_i} > SINR_{i+1}(x, t)|_{x=t_i}$. Тогда использование ПВС невыгодно для игрока и, следовательно, t не является равновесным. Если же, наоборот, $SINR_i(x, t)|_{x=t_i} < SINR_{i+1}(x, t)|_{x=t_i}$, то при обратном движении в сторону уменьшения координаты x игроку невыгодно следовать ПВС с данным набором порогов t .

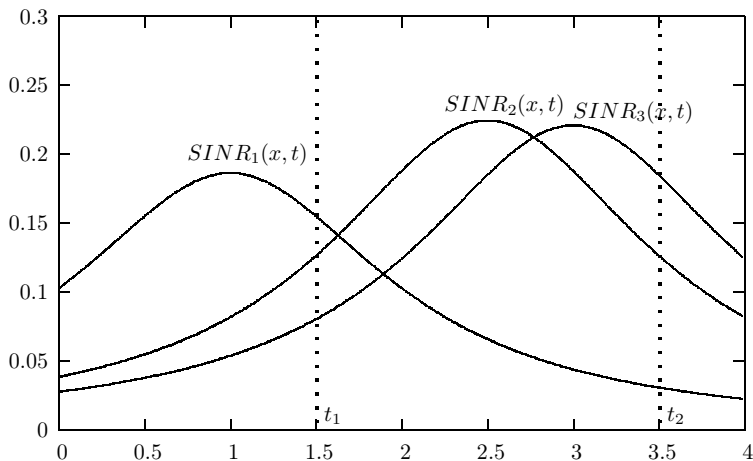


Рис. 1. Выигрыши игрока на станциях 1, 2, 3 при стратегиях $t_1 = 1,5$, $t_2 = 3,5$ для случая равномерно распределенных игроков

Таким образом, если равновесие t существует, то оно может быть найдено из системы

$$(1) \quad \begin{cases} (h_i^2 + (t_i - b_i)^2) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{Np(y)dy}{h_i^2 + (y - b_i)^2} + c_i \right) = \\ = (h_{i+1}^2 + (t_i - b_{i+1})^2) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{Np(y)dy}{h_{i+1}^2 + (y - b_{i+1})^2} + c_{i+1} \right) \\ \text{для } i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Данная система решается численно. Даже в простом случае равномерного распределения координат игроков на отрезке $[T_0, T]$ и двух базовых станций равновесный момент переключения t_1 является решением уравнения

$$\frac{h_1^2 + (t_1 - b_1)^2}{h_1(T - T_0)} \left(\arctg \frac{t_1 - b_1}{h_1} - \arctg \frac{T_0 - b_1}{h_1} + c_1 h_1 (T - T_0) \right) = \frac{h_2^2 + (t_1 - b_2)^2}{h_2(T - T_0)} \left(\arctg \frac{T - b_2}{h_2} - \arctg \frac{t_1 - b_2}{h_2} + c_2 h_2 (T - T_0) \right),$$

из которого t_1 не может быть выражено аналитически.

Пример 2. На отрезке $[0, 4]$ расположены 3 одинаковые базовые станции с координатами $b_1 = 1$, $b_2 = 2,5$, $b_3 = 3$ и высотой

и уровнем шума, равными 1. На этом отрезке равномерно распределены координаты $N = 10$ игроков. Игрок $N + 1$ знает свою координату x . Равновесный набор порогов ($t_1 \approx 1,628, t_2 \approx 2,771$). Выигрыш игрока с координатой x на выбираемых им согласно ПВС станциях изображен на рис. 2. •

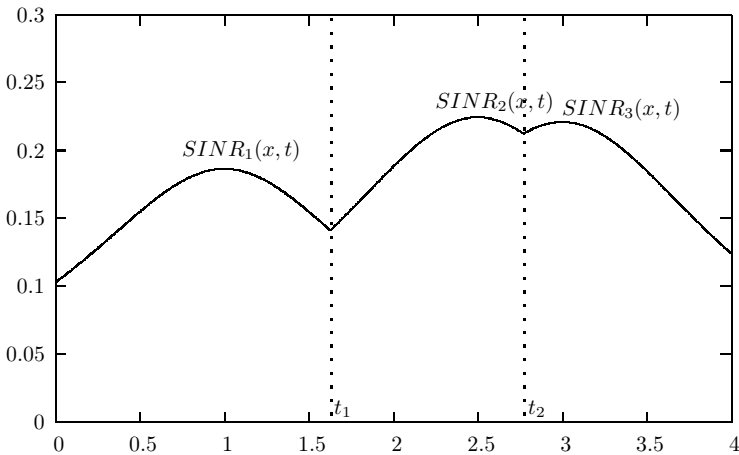


Рис. 2. Выигрыш игрока в равновесии для случая равномерно распределенных игроков

Пример 3. На отрезке $[0, 4]$ расположены 2 одинаковые базовые станции с координатами $b_1 = 1, b_2 = 3$ и высотой и уровнем шума, равными 1. Координаты $N = 10$ игроков нормально распределены с параметрами $\sigma = 1, \mu = 1$ на числовой прямой. Равновесное $t_1 \approx 1,721$. Выигрыш игрока с координатой x на выбираемых им согласно ПВС станциях изображен на рис. 3. •

Равновесие по Нэшу в данной модели не всегда существует. Проблемы с существованием равновесия могут возникнуть в том случае, если среди базовых станций есть такие, что дают по сравнению с другими станциями слишком маленькие или слишком большие значения «сигнал к интерференции плюс шум». Такой, например, является система из примера 1, где у базовых станций уровни шума изменены соответственно на 100 и 1. В этом

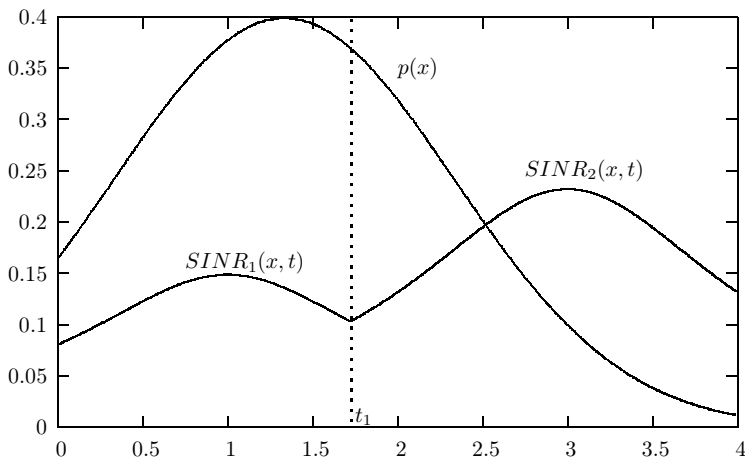


Рис. 3. Выигрыш игрока в равновесии для случая нормально распределенных игроков

случае система (1) не имеет решения, являющегося допустимым стратегическим набором порогов. Возможный путь решения этой проблемы – исключение из модели слишком «слабых» базовых станций, так как их выбирать игрокам не выгодно, и рассмотрение модели с оставшимися станциями.

3. Задача одновременного размещения базовых станций

В предыдущей модели местоположение базовых станций было фиксировано и эгоистичными игроками были только мобильные устройства, выбирающие станции для соединения. Однако владельцы базовых станций также могут иметь свои цели увеличения выигрыша. Например, если базовые станции принадлежат различным операторам связи, то они могут бороться за увеличение количества абонентов. Абонентами базовой станции будем считать тех игроков, которые выбрали данную станцию.

Пусть для каждого набора координат n станций b , упорядоченного по возрастанию, и стратегического набора порогов t выигрышем станции i является количество игроков, которые вы-

брали ее для соединения:

$$H_i^{BS}(b, t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (N+1)p(y)dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим набор координат станций b как переменные – стратегии владельцев станций. Считаем, что игра с полной информацией, т.е. каждому из владельцев станций известны стратегии остальных владельцев. Пороги $t = t(b)$ определяются как равновесное решение, зависящее от b , такое, что $t(b)$ является решением системы 1 для данного b . Функцией выигрыша владельца станции i является количество выбравших ее игроков $H_i(b) = H_i^{BS}(b, t(b))$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда возникает задача оптимального размещения базовых станций, которая рассматривается здесь в двух постановках. Если абоненты станций всегда ведут себя эгоистично, то владельцы станций могут либо сотрудничать, либо конкурировать между собой. В случае, когда станции принадлежат одному владельцу или владельцы сотрудничают между собой, они стремятся по возможности сравнять нагрузки на базовые станции. В условиях, когда владельцы конкурируют, каждый желает установить свою базовую станцию таким образом, чтобы получить наибольшее количество абонентов.

3.1. Социально-оптимальное поведение

Пусть базовые станции принадлежат одному владельцу или владельцы сотрудничают между собой. Тогда они стремятся сравнять нагрузки на базовые станции, по возможности равномерно распределив между ними абонентов, обеспечив таким образом покрытие территории связью с максимально равномерным значением отношения «сигнал к интерференции плюс шум».

Определение 3. Расположение базовых станций $b = (b_1, \dots, b_n)$ называется социально-оптимальным, если все станции обслуживают одинаковое число абонентов: $H_i(b) = H_j(b)$ для любых $i, j = 1, \dots, n$.

Для примера с равномерно распределенными игроками одно из очевидных решений: каждая станция b_i находится в центре отрезка $[t_{i-1}, t_i]$, где $t_i = T_0 + \frac{(T-T_0)*i}{n}$.

Определение социально-оптимального решения дает системе $n - 1$ уравнений на n неизвестных, т.е. система имеет множество решений. В случае, когда координата одной из станций фиксирована, система может дать однозначное решение.

Пример 4. В случае двух одинаковых базовых станций (все $c_i = 1, h_i = 1$) и $N + 1 = 11$ равномерно распределенных игроков на интервале $[0, 4]$ оптимальным решением будет любое расположение станций симметрично относительно центра интервала (в том числе $b_1 = 1, b_2 = 3$) с равновесным стратегическим порогом для абонентов $t_1 = 2$. •

Пример 5. Рассмотрим случай двух одинаковых базовых станций (все $c_i = 1, h_i = 1$), в котором вторая станция расположена в точке $b_2 = 2,5$. На числовой прямой $N + 1 = 11$ нормально распределенных игроков с параметрами $\sigma = 1, \mu = 1$ и интервалом $[0, 4]$, где устанавливается соединение. Оптимальным решением будет расположение первой станции в точке $b_1 \approx 0,437$ с равновесным стратегическим порогом для абонентов $t_1 \approx 1,445$. •

Пример 6. В случае трех одинаковых базовых станций (все $c_i = 1, h_i = 1$), когда местоположение третьей $b_3 = 3$, и $N + 1 = 11$ равномерно распределенных игроков на интервале $[0, 4]$ оптимальным решением будет расположение станций в точках $b_1 = 1/3$ и $b_2 = 7/3$ с равновесными стратегическими порогами для абонентов $t_1 = 4/3$ и $t_2 = 8/3$.

На рис. 4 видно, что владельцы станций получают одинаковый выигрыш в точках b_1, b_2, b_3 соответственно. При желании каждый владелец базовой станции мог бы увеличить значение своего выигрыша путем единоличного перемещения базовой станции. Также можно заметить, что функция выигрыша каждой базовой станции имеет разрывы в точках расположения других станций. Это происходит потому, что в этих точках меняется порядковый номер станции и она получает следующий по порядку интервал расположения абонентов. •

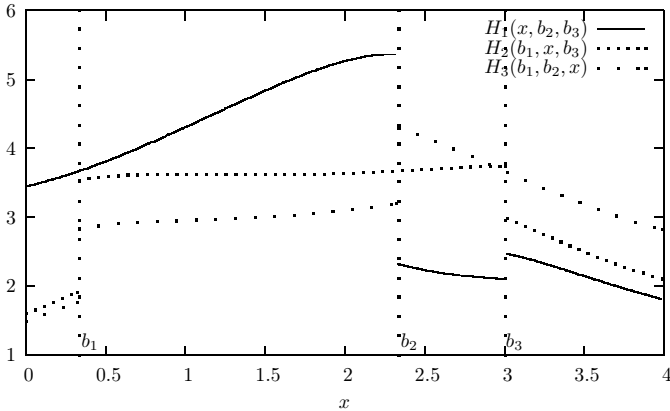


Рис. 4. Социально-оптимальный выигрыш владельцев станций

3.2. Конкуренция

Пусть базовые станции принадлежат различным операторам, которые конкурируют между собой. Цель каждого – получить по возможности наибольшее количество абонентов: $H_i(b) \rightarrow \max_{b_i}$.

Оптимальным решением будем считать равновесное по Нэшу b такое, что ни одному из владельцев не выгодно менять местоположение своей базовой станции.

Определение 4. Расположение базовых станций $b = (b_1, \dots, b_n)$ называется равновесием по Нэшу, если для каждой i -й станции $H_i(b) \geq H_i(b_1, \dots, b_{i-1}, b'_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$ для любого ее местоположения b'_i .

Пример 7. Рассмотрим случай двух одинаковых базовых станций (все $c_i = 1, h_i = 1$) и $N + 1 = 11$ равномерно распределенных игроков на интервале $[0, 4]$. На рис. 5 видно, что владелец каждой из двух станций может улучшить свой выигрыш путем единоличного сдвига своей станции в сторону центра интервала $[0, 4]$.

Равновесным расположением базовых станций является расположение станций в одной центральной точке отрезка $[T_0, T]$, т.е. $b_1 = b_2 = t_1 = (T - T_0)/2$ (рис. 6). •

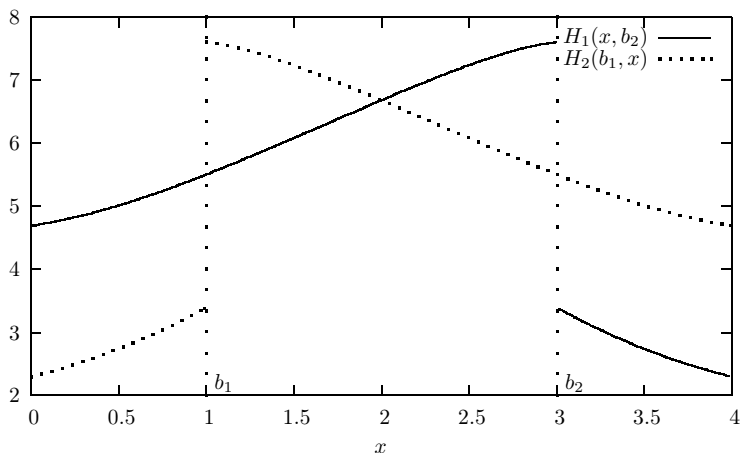


Рис. 5. Выигрыши владельцев станций для расположения $b_1 = 1, b_2 = 3$

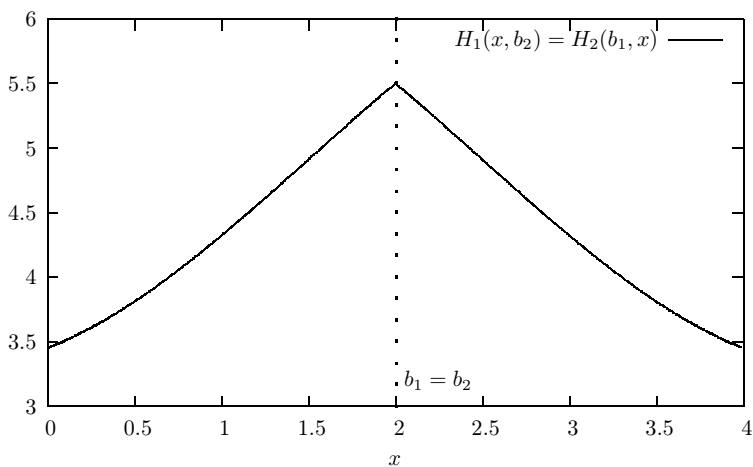


Рис. 6. Выигрыши владельцев станций для равновесного расположения $b_1 = b_2 = 2$

В приведенном примере задача решается путем численного построения и анализа графиков выигрышей. Аналогичным образом можно найти равновесное расположение двух базовых стан-

ций для других распределений игроков. Однако из-за невыпуклости и разрывности функций выигрыша не удастся найти метод решения для общего случая, а также сказать, существует ли и в каком случае равновесное расположение в случае трех или более базовых станций.

4. Задача пошагового размещения базовых станций

Рассмотрим ситуацию, когда базовые станции размещаются не сразу, а по очереди. При этом очередная станция устанавливается с учетом уже существующих, а ее владелец не имеет информации о том, сколько и какие базовые станции будут установлены в будущем после установки его станции.

Пусть, как и в предыдущем случае, для каждого набора координат n станций b , упорядоченного по возрастанию, и стратегического набора порогов t выигрышем станции i является количество игроков, которые выбрали ее для соединения:

$$H_i^{BS}(b, t) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (N + 1)p(y)dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть имеется $n - 1$ уже установленных базовых станций и необходимо определить, куда должна быть установлена новая дополнительная станция. В наборе координат станций b координаты уже установленных $n - 1$ станций будут фиксированными, а переменной будет координата новой станции. Причем порядковый номер i этой координаты будет зависеть от ее значения, так как при установке новой станции происходит перенумерация станций по порядку возрастания координат их размещения. Пороги $t = t(b)$ определяются как равновесное решение, зависящее от b , как и в предыдущей модели. Функцией выигрыша станции i является количество выбравших ее игроков $H_i(b) = H_i^{BS}(b, t(b))$.

Здесь также возможны два варианта поведения. В случае конкурентного поведения владелец очередной базовой станции стремится установить ее так, чтобы получить максимально возможное число абонентов, возможно, в ущерб уже имеющимся

станциям. В случае социально-оптимального поведения владелец очередной станции стремится установить ее таким образом, чтобы по-возможности сравнять нагрузки на станции и улучшить качество связи на территории $[T_0, T]$.

4.1. Конкурентное поведение

Допустим, что владельцы базовых станций устанавливают их по очереди, стараясь установить очередную станцию таким образом, чтобы получить наибольшее количество абонентов. В первый момент времени имеется одна установленная станция с некоторой координатой b_1 , с которой соединяются все игроки. Владелец этой станции имеет выигрыш, равный $N + 1$, т.е. всей численности населения рассматриваемой территории. Очередной оператор устанавливает новую станцию таким образом, чтобы максимизировать $H_i(b')$ по b'_i , где b' – новый набор координат, а $i = i(b)$ – порядковый номер, который получает его станция при установке.

4.2. Социально-оптимальное поведение

Допустим, что владельцы базовых станций устанавливают их по очереди, стараясь установить очередную станцию таким образом, чтобы сравнять нагрузки на станции и улучшить качество связи на территории $[T_0, T]$. Как и в предыдущем случае, в первый момент времени имеется одна установленная станция с некоторой координатой b_1 , с которой соединяются все игроки. Владелец этой станции имеет выигрыш, равный $N + 1$, т.е. всей численности населения рассматриваемой территории. Второй оператор устанавливает свою станцию таким образом, чтобы поделить всех абонентов поровну с уже имеющейся станцией, т.е. $H_1(b'_1, b'_2) = H_2(b'_1, b'_2)$. Далее очередной оператор k устанавливает свою станцию в точку t_{min} , где доступное отношение «сигнал к интерференции плюс шум» для игроков имеет наихудшее значение: $t_{min} = \arg \min_{t_i, i=1, \dots, k-1} SINR_{max}(t_i, t)$.

4.3. Сравнительные эксперименты

Рассмотрим примеры пошаговой установки станций по двум сценариям. В обоих случаях последовательно устанавливаются 3 одинаковые базовые станции единичной высоты и уровня шума, действующие на территории $[0, 4]$, на которой равномерно распределены координаты 11 игроков. Первая базовая станция установлена в точку $b_1 = 4$.

Пример 8. Конкурентное поведение.

Новая станция устанавливается в точку $b'_1 \approx 3,652$. Имевшаяся до этого станция становится второй по счету и находится в $b'_2 = 4$, порог переключения между станциями находится в точке $t_1 \approx 3,288$, выигрыши владельцев станций равны $H_1(b') \approx 9,04$ и $H_2(b') \approx 1,95$.

Следующая станция устанавливается в $b''_1 \approx 3,327$. Пороги переключения равны $t_1 \approx 2,895$, $t_2 \approx 3,563$, выигрыши владельцев станций равны $H_1(b'') \approx 7,962$, $H_2(b'') \approx 1,836$, $H_3(b'') \approx 1,201$.

Видно, что установка каждой новой станции значительно ухудшает выигрыш владельца станции, установленной на предыдущем шаге. Качество связи, выражаемое значением «сигнал к интерференции плюс шум», при установке новых станций по такому сценарию улучшается незначительно: остается по-прежнему низким в начале отрезка $[0, 4]$ (рис. 7). •

Пример 9. Социально-оптимальное поведение.

Новая станция устанавливается в точку $b'_1 = 0$. Имевшаяся до этого станция становится второй по счету и находится в $b'_2 = 4$, порог переключения между станциями находится в центральной точке $t_1 = 2$, станции поровну делят абонентов $H_1(b') = H_2(b') = 5,5$.

Следующая станция ставится в точку $b''_1 = 2$. Пороги переключения равны $t_1 \approx 1,172$, $t_2 \approx 2,827$, выигрыши владельцев станций равны $H_1(b'') = H_3(b'') \approx 3,22$, $H_2(b'') \approx 4,55$.

Видно, что установка каждой новой станции в меньшей степени, чем при агрессивном конкурентном поведении, ухудшает выигрыш владельца станции, установленной на предыдущем ша-

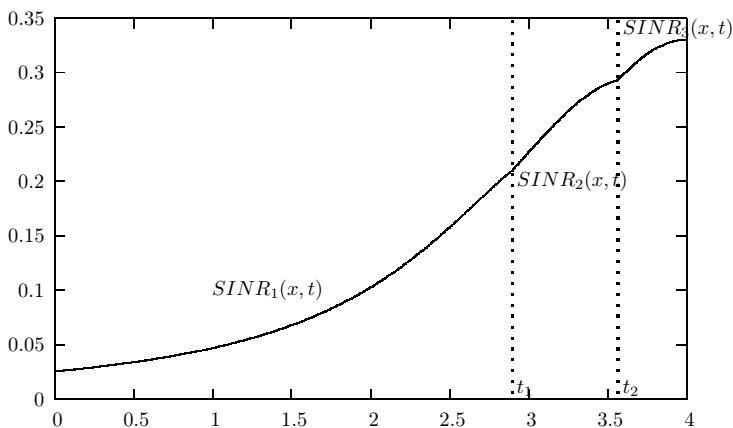


Рис. 7. Выигрыш абонентов для расположения станций
 $b_1 = 3,327, b_2 = 3,563, b_3 = 4$

ге. Кроме того, такой сценарий обеспечивает равномерное покрытие территории качественной связью (рис. 8). Здесь минимальное значение отношения «сигнал к интерференции плюс шум» около 0,12 в двух точках переключения между станциями, в то время как в предыдущем случае более чем на половине территории отношение «сигнал к интерференции плюс шум» меньше 0,12. •

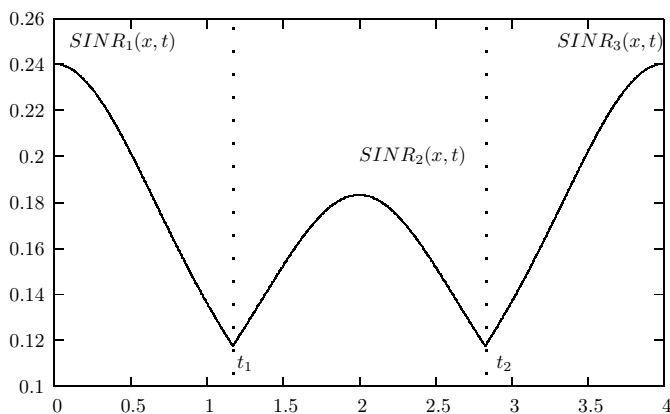


Рис. 8. Выигрыш абонентов для расположения станций
 $b_1 = 0, b_2 = 2, b_3 = 4$

5. Заключение

Рассмотрена модель эгоистичного выбора базовой станции в беспроводной сети в игровой постановке, где каждый игрок стремится увеличить свою величину отношения «сигнал к интерференции плюс шум». Для модели $N + 1$ игроков, распределенных на отрезке с некоторой плотностью, построена система интегральных уравнений, решение которой дает равновесные стратегии выбора базовых станций.

Исследована задача оптимального размещения базовых станций на отрезке, где владельцы базовых станций стремятся максимизировать число своих абонентов, ведущих себя согласно стратегиям в предыдущей модели. Рассмотрены два сценария размещения базовых станций. Первый – одновременное размещение, когда различные операторы в один момент времени решают строить свои станции на участке. При этом каждый владелец станции видит стратегии остальных. Второй – пошаговое размещение, когда базовые станции размещаются не сразу, а по очереди. При этом очередная станция устанавливается с учетом уже существующих, а ее владелец не имеет информации о том, сколько и какие базовые станции будут установлены в будущем после установки его станции. Для каждого сценария построены системы интегральных уравнений, решение которых дает стратегии размещения базовых станций для вариантов поведения владельцев станций: социально-оптимального и эгоистичного. Разработано программное обеспечение для численного нахождения и визуализации решений для данных моделей.

Литература

1. ГАЙДАМАКА Ю.В., САМУЙЛОВ А.К., БЕГИШЕВ В.О., КОВАЛЬЧУКОВ Р.Н., МОЛЧАНОВ Д.А. *Оценка характеристик интерференции при взаимодействии беспроводных устройств в смежных помещениях прямоугольной формы* // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2015. – Т. 9, №11. – С. 41–45.

2. ABUSUBAIIH M., WOLISZ A. *Interference-Aware Decentralized Access Point Selection Policy for Multi-rate IEEE 802.11 WirelessLANs* // Proc. of IEEE 19th Int. Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications: PIMRC. IEEE, 2008. – 2008. – P. 1–6. – DOI: 10.1109/PIMRC.2008.4699799.
3. ANDREWS M., DINITZ M. *Maximizing Capacity in Arbitrary Wireless Networks in the SINR Model: Complexity and Game Theory* // IEEE INFOCOM 2009, Rio de Janeiro, – 2009. – P. 1332–1340. – DOI: 10.1109/INFCOM.2009.5062048.
4. CESANA M., GATTI N., MALANCHINI I. *Game Theoretic Analysis of Wireless Access Network Selection: Models, Inefficiency Bounds, and Algorithms* // Proc. of the 3rd Int. Conf. on Performance Evaluation Methodologies and Tools. ICST, 2008. – 2008. – Article No. 6. – P. 1–10. – DOI: 10.4108/ICST.VALUETOOLS2008.4341.
5. CESANA M., MALANCHINI I., CAPONE A. *Modelling Network Selection and Resource Allocation in Wireless Access Networks with Non-Cooperative Games* // Proc. of 5th IEEE Int. Conf. on Mobile Ad Hoc and Sensor Systems. IEEE, 2008. – 2008. – P. 404–409 – DOI: 10.1109/MAHSS.2008.4660055.
6. HADDAD M., ELAYOUBI S., ALTMAN E., ALTMAN Z. *A Hybrid Approach for Radio Resource Management in Heterogeneous Cognitive Network* // Journal on Selected Areas in Communications. – 2011. – Vol. 29, No. 4. – P. 831–842.
7. HONG M., GARCIA A., ALVIAR J. *Joint Distributed Access Point Selection and Power Allocation in Cognitive Radio Networks* // Proc. of IEEE Int. Conf. on Computer Communications: INFOCOM, 2011.IEEE, 2011. – 2011. – P. 2516–2524. – DOI: 10.1109/INFCOM.2011.5935075.
8. LI Y., QUEVEDO D.E., DEY S., SHI L. *SINR-Based DoS Attack on Remote State Estimation: A Game-Theoretic Approach* // IEEE Trans. on Control of Network Systems, Sept. 2017. – 2017. – Vol. 4, No. 3. – P. 632–642. – DOI: 10.1109/TCNS.2016.2549640.

9. LIU H. *SINR-based multi-channel power schedule under DoS attacks: A Stackelberg game approach with incomplete information* // Automatica. – 2019. – Vol. 100. – P. 274–280.
10. LIYANAGE M., CHIRKOVA J.V., GURTOV A. *Access Point Selection Game for Mobile Wireless Users* // A World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM), 2014 IEEE 15th Int. Symposium on Autonomic and Opportunistic Communications, Sydney, Australia; 06/2014. – 2014. – P. 1–6.
11. MALANCHINI L., CESANA M., GATTI N. *Network Selection and Resource Allocation Games for Wireless Access Networks* // IEEE Trans. on Mobile Computing. – 2013. – Vol. 12, No. 12. – P. 2427–2440.
12. SOUTHWELL R., HUANG J. *Convergence Dynamics of Resource-Homogeneous Congestion Games* // Game Theory for Networks. GameNets 2011. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering. – Springer. – 2012. – Vol.75. – P. 281–293. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-30373-9_20.
13. TRESTIAN R., ORMOND O., MUNTEAN G. *Game Theory-Based Network Selection: Solutions and Challenges* // IEEE Communications Surveys Tutorials. – 2012. – Vol. 14, No. 4. – P. 1212–1231.
14. XU F., TAN C., LI Q., YAN G., WU J. *Designing a Practical Access Point Association Protocol* // Proc. of IEEE Int. Conf. on Computer Communications: INFOCOM. IEEE. – 2010. – P. 1–9. – DOI: 10.1109/INFOCOM.2010.5461909.
15. YANG G., LI B., TAN X., WANG X. *Adaptive power control algorithm in cognitive radio based on game theory* // IET Communications. – 2015. – Vol. 9, No. 15. – P. 1807–1811. DOI: 10.1049/iet-com.2014.1109.
16. YEN L., LI J., LIN C. *Stability and Fairness of AP Selection Games in IEEE 802.11 Access Networks* // IEEE Trans. on Vehicular Technology. – 2011. – Vol. 60, No. 3. – P. 1150–1160.

BASE STATIONS SELECTION AND PLACEMENT IN WIRELESS NETWORK

Julia Chirkova, IAMR KarRC RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc.
(julia@krc.karelia.ru).

Abstract: The paper considers a game-theoretic model of selfish base station selection in a wireless network, where each player tries to increase his signal-to-interference-plus-noise ratio. A system of integral equations is constructed for a model of n players distributed over a segment with a certain density. The solution of the system gives equilibrium strategies for choosing base stations. We also investigate the problem of optimal placement of base stations on a segment where the owners of base stations maximize the number of their subscribers, who act according to the strategies in the previous model. Systems of integral equations are constructed, the solution of which gives strategies for the placement of base stations for two scenarios: socially optimal and selfish behavior of station owners. Software has been developed for numerical finding and visualization of solutions for these models.

Keywords: wireless network, selfish routing, signal-to-interference-plus-noise ratio.

УДК 519.711.7

ББК 22.1

DOI: 10.25728/ubs.2020.87.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

Поступила в редакцию 31.07.2020.

Дата опубликования 30.09.2020.

О ЗАДАЧАХ УПАКОВОК НЕРАВНЫХ ШАРОВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

Казаков А. Л.², Лемперт А. А.³

(Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутский национальный
исследовательский технический университет, Иркутск)

Та Ч. Т.⁴

(Иркутский национальный исследовательский
технический университет, Иркутск)

Статья посвящена построению оптимальных упаковок набора шаров разных радиусов в трехмерное замкнутое множество: требуется найти такое расположение фиксированного числа шаров, чтобы их радиусы были максимальными. Данная проблема является NP-трудной. Для ее решения предложен вычислительный алгоритм, основанный на использовании оптико-геометрического подхода и метода бильярдного моделирования. Применение данного подхода позволяет решать задачи упаковки не только в евклидовом, но и в других метрических пространствах. Так, рассмотрена задача, в которой вместо расстояния между центрами шаров параметром оптимизации является минимальное время перемещения между ними. Подобные постановки нередко возникают при решении задач охраны периметра, когда время перемещения «нарушителя» до охраняемого объекта играет существенно более важную роль, чем пройденное при этом расстояние, а также в логистике, где время доставки имеет первостепенное значение. Алгоритм реализован в виде программного комплекса, с помощью которого проведены вычислительные эксперименты, причем в качестве множества-контейнера выбирались как выпуклые, так и невыпуклые множества. Результаты расчетов позволяют оценить работоспособность и эффективность предложенного алгоритма. Выполнена 3D-визуализация полученных результатов.

Ключевые слова: упаковка шаров разных типов, трехмерное пространство, оптико-геометрический подход, метод бильярдного моделирования, вычислительный алгоритм, неевклидова метрика.

¹ Исследование выполнено при поддержке РФФИ, проекты №18-07-00604, 20-010-00724.

² Александр Леонидович Казаков, д.ф.-м.н., профессор РАН (kazakov@icc.ru).

³ Анна Ананьевна Лемперт, к.ф.-м.н., доцент (lempert@icc.ru).

⁴ Чунг Тхань Та, аспирант (tatrungthanh@mail.ru).

1. Введение

Задача об упаковке шаров является классической проблемой вычислительной геометрии и относится к классу NP-трудных комбинаторных задач. Суть задачи заключается в размещении шаров в конечное число контейнеров предопределённой формы так, чтобы либо их количество, либо суммарный объём были максимальными [10]. В данной работе мы рассматриваем задачу с контейнером произвольной формы и заданным количеством шаров с разными, но связанными между собой определенными соотношениями радиусами. Цель оптимизации – максимизировать радиус элементов упаковки, и при этом все шары должны быть размещены.

Несмотря на то, что задача упаковки шаров имеет длинную историю, она до сих пор вызывает большой интерес из-за ее широкого применения в различных областях науки. Например, в медицине при планировании автоматизированного радиохирургического лечения [36], в материаловедении при изучении и моделировании структуры молекул вещества [21], в логистике [5], в информационных технологиях [1] и т.д. Получить аналитическое решение задачи упаковки удастся только в наиболее простых случаях, поэтому обычно используются численные методы.

Отметим, что в большинстве работ рассматривается задача в двумерном пространстве с евклидовой метрикой, а в качестве контейнера выбираются множества, граница которых состоит из отрезков и дуг окружностей, в частности, круг [18, 19], квадрат [28, 29], треугольник [15, 27]. Актуальные результаты можно найти на сайте [31], где они периодически обновляются венгерскими математиками.

Для задач в трехмерном пространстве литература не так обширна, хотя ясно, что математические формулировки могут быть легко расширены с двумерного на трехмерное пространство. Это связано в первую очередь с тем, что с увеличением размерности пространства как аналитическая, так и вычислительная сложность существенно возрастает.

Известно [20], что задача упаковки равных шаров в бесконечное пространство решена: оптимальными являются упаковки на основе гранецентрированной кубической или гексагональной плотноупакованной решеток [9]. Для случая ограниченного множества задача упаковки остается, вообще говоря, открытой, имеются только локальные результаты для контейнеров простой формы. Так, контейнеры в форме куба рассматриваются в работах [3, 17, 35], в форме параллелепипеда – в [11, 32], сферы – в [22, 25], цилиндра – в [12, 33] и в других подобных формах – в [8, 14, 34]. Таким образом, в большинстве опубликованных работ рассматриваются задачи упаковки шаров в выпуклый контейнер и при евклидовом расстоянии. Однако в ряде практических задач контейнер не является выпуклым. Также в некоторых случаях необходимо использовать неевклидовы метрики, в частности, подобные постановки возникают при решении задач охраны периметра [2], когда время перемещения «нарушителя» до охраняемого объекта играет существенно более важную роль, чем пройденное при этом расстояние.

Данная работа является продолжением предыдущих работ авторов [23, 24] и посвящена проблеме построения оптимальных упаковок шаров различных типов в замкнутое трехмерное множество. В отличие от известных работ, в настоящей статье рассматривается не только евклидова, но и специальная неевклидова метрика. Для отыскания решения предлагается численный метод, основанный на сочетании метода бильярдного моделирования и оптико-геометрического подхода, который позволяет заменить обычное расстояние между точками минимальным временем перемещения между ними. Данный подход был успешно применен для решения задач о покрытии и упаковке кругов в двумерном пространстве [4, 6, 7] и задачи размещения логистических центров [5, 26].

2. Постановка задачи

Пусть задано трехмерное метрическое пространство X , в котором расстояние между двумя точками a и b определяется следующей формулой:

$$(1) \quad \rho(a, b) = \min_{G \in G(a, b)} \int_G \frac{dG}{f(x, y, z)},$$

где $G(a, b)$ – множество непрерывных кривых, лежащих в X и соединяющих точки a и b ; $0 < \alpha \leq f(x, y, z) \leq \beta$ – непрерывная функция, определяющая мгновенную скорость движения в каждой точке пространства X . Отметим, что если $f(x, y, z) = 1$, то имеем обычное евклидово пространство.

Задано замкнутое ограниченное множество $P \subset X$ с произвольной границей ∂P . Необходимо найти расположение заданного числа шаров разных типов так, чтобы они полностью лежали в P , не пересекались друг друга и их радиусы были максимальными.

Перейдем к математической постановке. Пусть задано n шаров S_i с центрами $s_i(x_i, y_i, z_i)$ и радиусами $R_i, i = \overline{1, n}$, причем

$$R_j = \frac{R_{j-1}}{k}, j = \overline{2, n}, k \in Q^+. \text{ Необходимо найти такое расположение}$$

центров $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in P$, чтобы радиус первого шара R_1 (и, следовательно, все $R_j, j = \overline{2, n}$) достиг максимума. Шар с радиусом R_1 будем называть базовым. Тогда задачу можно записать как

$$(2) \quad R_1 \rightarrow \max,$$

$$(3) \quad R_i = \frac{1}{k^{i-1}} R_1, \quad k \in Q^+, \forall i = \overline{1, n},$$

$$(4) \quad \rho(s_i, s_j) \geq \left(\frac{1}{k^{i-1}} + \frac{1}{k^{j-1}} \right) R_1, \quad \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j,$$

$$(5) \quad \rho(s_i, \partial P) \geq \frac{1}{k^{i-1}} R_1, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

$$(6) \quad s_i \in P, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

где $\rho(s_i, \partial P)$ – расстояние от точки s_i до границы множества P .

Выражение (2) максимизирует радиус упаковываемых шаров, (3) задает отношение радиусов шаров. Отметим, что при $k = 1$ получается задача упаковки равных шаров. Соотношения

(4)–(6) гарантируют, что все шары полностью находятся внутри множества P и друг с другом не пересекаются.

3. Алгоритмы решения

При рассмотрении задачи в трехмерном пространстве авторы использовали сеточную аппроксимацию, предложенную ранее в [23]. Разработан алгоритм, который является обобщением алгоритма упаковки равных шаров [24] и основан на оптико-геометрическом подходе [5] и методе бильярдного моделирования [18]. Его идея заключается в следующем: каждый шар рассматривается как жесткий бильярдный шарик, который имеет возможность двигаться свободно внутри заданного замкнутого множества, причём радиус шаров увеличивается после каждого шага сдвига. При этом, поскольку при использовании неевклидовой метрики нахождение расстояния между точками требует решения задачи вариационного исчисления (см. (1)), для получения граничных точек элементов упаковки (например, при упаковке кругов – ограничивающих их окружностей) используется оптико-геометрический подход.

Начальное положение

Первоначальное расположение центров шаров получаем с помощью случайной генерации. Каждый центр нумеруется, центр с номером i относится к шару с радиусом R_i . Радиус базового шара определяется по формуле

$$(7) \quad R_i = \min\{k^{i-1}\rho(s_i, \partial P), (k^{i-1} + k^{j-1})\rho(s_i, s_j)\},$$

где $\forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Осуществляется построение всех шаров S_i с центрами s_i и радиусами $R_i, i = \overline{1, n}$. Для каждого i -го шара определяется множество точек касания M_i . При этом используется оптико-геометрический подход.

$$(8) \quad M_i = \{p : p \in \partial S_i, p \in \partial P\} \cup \{p : p \in \partial S_i, p \in \partial S_j\},$$

где $\forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Нетрудно видеть, что всегда существует хотя бы один шар, который касается либо другого шара, либо границы

множества P . Значит, найдется хотя бы один шар S_i , для которого $M_i \neq \emptyset$.

Для нахождения направления сдвига шаров авторы предлагают два алгоритма. Один из них предполагает сдвиг по заданным направлениям, второй – по произвольным. Если используется только первый алгоритм сдвига, то может возникнуть ситуация, что суммарный вектор равен нулю, и дальше шары не могут двигаться, но результат далек от оптимального. Например, если центры шаров и их точки касания друг друга и границы лежат на одной прямой. Если же применять только второй алгоритм, то время работы существенно возрастает. Последовательное же их применение позволяет повысить эффективность работы основного алгоритма.

Алгоритм 1 сдвига шаров по определенному направлению.

Пусть задано n шаров S_i с центрами s_i и разными радиусами r_i , $i = \overline{1, n}$. Радиус базового шара вычисляется по формуле (7). Будем перемешать шары внутри контейнера так, чтобы они не касались друг друга и границы ∂P . Другими словами, необходимо отталкивать шары как можно дальше друг от друга и от границы множества. После каждой итерации сдвига осуществляются увеличение радиусов и построение шаров с новыми радиусами.

Для определения направления перемещения шаров выполняются следующие шаги:

1. Выделяется множество шаров S^* , имеющих непустое множество точек касания:

$$S^* = \{S_i \mid M_i \neq \emptyset, i = \overline{1, n}\}.$$

2. Осуществляется сортировка множества S^* по убыванию значения радиуса.

3. Из множества S^* выделяется первый (самый большой) шар S_1^* и строятся векторы с началом в точке s_1^* и концами в точках $q \in M_1^*$. Определяется суммарный вектор

$$\vec{c}_1^* = \sum_{q \in M_1^*} \vec{s}_1^* q.$$

4. Осуществляется сдвиг центра s_1^* на расстояние h , направление сдвига противоположно вектору $\overline{c_1^*}$. Полученная точка после сдвига полагается новым временным центром шара S_1^* .

5. Вычисляется радиус базового шара $\overline{R_1}$ по формуле (7). Если $\overline{R_1} < R_1$, то переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S^*} = S^* \setminus S_1^*$; если $\overline{R_1} \geq R_1$, то находим множество $\overline{M_i}$ по формуле (8) и переходим к шагу 1.

Шаги 1–5 повторяются до тех пор, пока $\overline{S^*} \neq \emptyset$.

Алгоритм 2 случайного перебора.

Имеются n шаров с центрами s_i и разными радиусами R_i , $i = \overline{1, n}$. Значение радиуса базового шара R_1 вычисляется по формуле (7). На построенной равномерной сетке вокруг каждой точки, кроме точек на границе множества P , существуют 26 соседних. Шар может двигаться в любую точку из них:

1. Задается максимальное количество итераций, значение счетчика количества итераций полагается равным 1.

2. Определяется множество S^* из шаров, имеющих непустое множество точек касания:

$$S^* = \{S_i \mid M_i \neq \emptyset, i = \overline{1, n}\}.$$

Осуществляется сортировка множества S^* по убыванию значения радиуса.

3. Для первого (самого большого) шара S_1^* из множества S^* выделяется множество C из 26 соседних точек центра s_1^* . Осуществляется перемещение центра s_1^* в одну произвольную точку $c_i \in C$, выбранную случайным образом, и получается временный центр $\overline{s_1^*}$.

4. Определяется величина

$$d_{\min} = \min\{\rho(\overline{s_1^*}, \partial P), \rho(\overline{s_1^*}, s_j) - R_j\}, j = \overline{2, n}.$$

– если $d_{\min} \leq R_1^*$, то временный центр $\overline{s_1^*}$ сохраняется в качестве нового центра текущего шара S_1^* и переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S^*} = S^* \setminus S_1^*$;

– если $d_{\min} < R_1^*$, то осуществляется переход к шагу 3 с множеством $\overline{C} = C \setminus c_i$. Если $\overline{C} = \emptyset$, т.е. все 26 соседних точек были рассмотрены, то переходим к шагу 3 с множеством $\overline{S}^* = S^* \setminus S_1^*$. Исходный центр сохраняется.

Шаги 3–4 повторяются пока $\overline{S}^* \neq \emptyset$.

5. Вычисляется радиус базового шара $\overline{R}_1$ по формуле (7)

– если $\overline{R}_1 \geq R_1$, то значение $\overline{R}_1$ и координаты всех шаров сохраняются в качестве приближения решения задачи. Осуществляется переход к шагу 2.

– если $\overline{R}_1 < R_1$, то значение счётчика количества итерации увеличивается на единицу. Если это значение счётчика превосходит наперед заданной величины, то работа алгоритма завершается, иначе переходим к шагу 2.

Главный алгоритм.

Численный алгоритм решения задачи упаковки разных шаров в трехмерном пространстве имеет следующий вид:

1. Задается максимальное количество генерации случайных начальных точек, значение счетчика генерации *Iter* равно единице.

2. Методом случайной генерации задаем первоначальные координаты центров шаров. Центры нумеруются последовательными натуральными числами.

3. Вычисляется значение радиуса базового шара по формуле (7) и определяется множество точек касания каждого шара с другими шарами и с границами контейнера по формуле (8).

4. Осуществляется сдвиг центров шаров по определенному направлению (алгоритм 1).

5. Осуществляется сдвиг центров шаров направленным перебором соседних точек (алгоритм 2).

Шаги 4–5 повторяются до тех пор, пока радиус базового шара возрастает (или хотя бы не уменьшается). Если значение радиуса базового шара текущей итерации меньше, чем значение предыдущей, то в качестве приближения решения сохраняются

значения радиусов и положения центров, полученные на предыдущей итерации.

6. Число счетчика количества итерации *Iter* увеличивается на единицу. Если значение *Iter* достигло наперед заданной величины, то переходим к шагу 7, в противном случае осуществляется переход к шагу 2

7. Сравниваются все полученные приближенные решения и выбирается наилучшее из них.

4. Вычислительные эксперименты

Вычислительные эксперименты проведены с использованием ПК следующей конфигурации: Intel(R) Core(TM) i5-3570K (частота 3.4 ГГц, 8 Гб ОЗУ) и операционная система Windows 7. Алгоритм реализован на языке программирования C# с помощью пакета Visual Studio 2012.

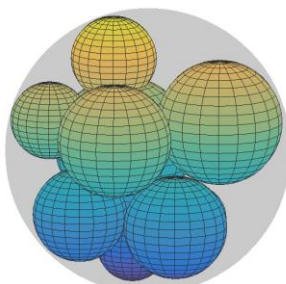
В таблицах n – число упаковываемых шаров; $D(\%)$ – плотность упаковки в процентах; $t_{executed}$ – время вычислений в секундах. При расчетах использована прямоугольная сетка с шагом $h = 0,001$.

Пример 1. В данном примере представлены результаты решения задачи упаковки разных шаров в единичный шар при евклидовом расстоянии, т.е. $f(x, y, z) = 1$. Коэффициент отношения радиусов шаров $k = 1,1$. В таблице 1 представлены наилучшие результаты для заданного числа шаров. На рис. 1 представлена визуализация некоторых результатов расчетов.

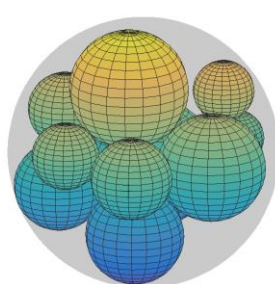
Для $k = 1$ имеем задачу упаковки равных шаров, результаты решения которой были опубликованы в работе [30]. Таблица 1 показывает, что плотность упаковки разных шаров, как правило, меньше, чем плотность упаковки равных шаров (кроме случая $n = 2$). С увеличением количества шаров значение радиуса базового шара уменьшается, а при количестве шаров $n > 9$ радиус базового шара почти не изменяется, однако растет плотность упаковки. Наилучшие решения задачи при $n = 9, 10, 15, 20$ показаны на рис. 1.

Таблица 1. Наилучшие результаты решения задачи упаковки шаров разных типов в единичный шар

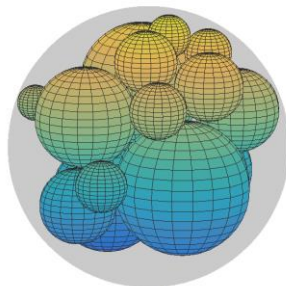
n	k = 1		k = 1,1		
	R_1	$D(\%)$	R_1	$D(\%)$	$t_{executed}$
2	0,5000	25,000	0,5227	25,01333	538
3	0,4641	29,989	0,5043	29,70559	715
4	0,4495	36,329	0,4951	33,25795	1147
5	0,4142	35,530	0,4904	35,62727	1573
6	0,4142	42,637	0,4896	38,70345	2047
7	0,3859	40,227	0,4889	40,65334	2574
8	0,3780	43,208	0,4852	41,27625	2778
9	0,3660	44,125	0,4826	41,75524	3276
10	0,3530	43,987	0,4826	42,61274	4118
15	0,3183	48,373	0,4815	44,27991	6795
20	0,2879	47,726	0,4815	44,31488	8977



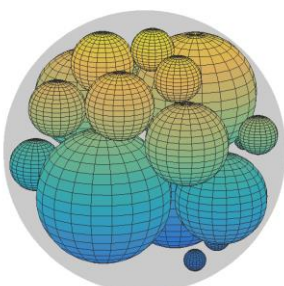
n = 9



n = 10



n = 15



n = 20

Рис. 1. Решения задачи упаковки разных шаров в единичный шар

Пример 2. Рассмотрим кубический контейнер и при евклидовой метрике. Результаты вычисления представлены в таблице 2 при изменении коэффициентов отношения радиусов от $k = 1$ до $k = 1,5$.

Таблица 2. Наилучшие результаты решения задачи упаковки шаров разных типов в единичный куб

n	$k = 1$	$k = 1,02$	$k = 1,05$	$k = 1,1$	$k = 1,2$	$k = 1,5$
	$D(\%)$	$D(\%)$	$D(\%)$	$D(\%)$	$D(\%)$	$D(\%)$
2	26,684	26,781	26,801	27,334	27,582	29,795
3	31,575	31,061	29,815	27,592	30,135	31,813
4	42,099	38,344	37,172	34,523	33,187	32,411
5	38,507	38,392	38,137	37,423	34,954	32,588
10	41,216	42,542	41,559	46,394	37,222	32,662
15	44,686	44,991	42,718	48,539	37,369	32,663
20	47,572	45,313	42,818	45,329	37,378	—
25	49,481	46,304	45,899	45,442	—	—

Из таблицы 2 можно сделать следующие выводы:

- в случае $n = 2$ плотность упаковки увеличивается с увеличением значения коэффициента отношения радиусов;
- если $n \geq 3$, то при одинаковом количестве шаров плотность упаковки уменьшается с увеличением значения коэффициента отношения радиусов;
- при заданном коэффициенте плотность увеличивается с увеличением количества упаковываемых шаров.

Некоторые наилучшие решения представлены на рис. 2.

Пример 3. В данном примере рассматривается задача упаковки шаров в невыпуклый контейнер при евклидовой метрике. Пусть множество P задано формулой $P = D \setminus B$, где

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x, y, z \leq 1\}.$$

Результаты решения при коэффициенте $k = 1,1$ представлены в таблице 3.

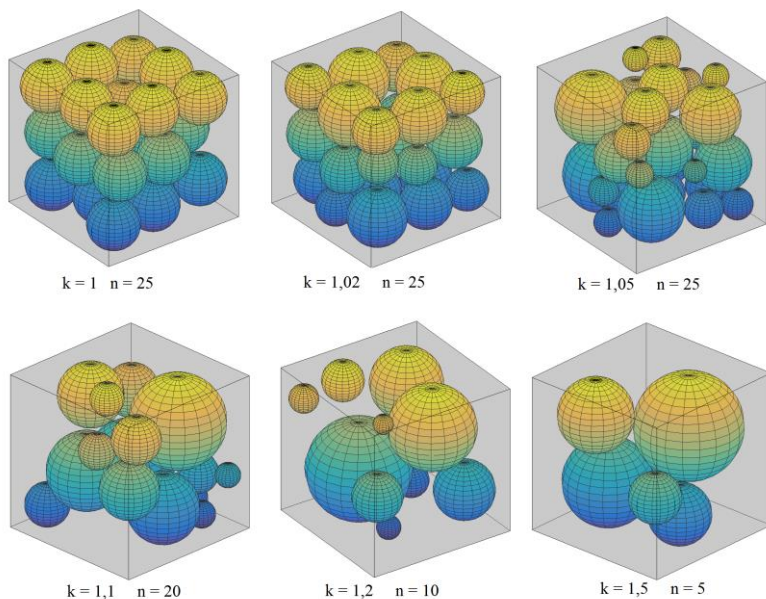


Рис. 2. Решения задачи упаковки шаров в единичный куб при евклидовой метрике

Таблица 3. Результаты решения задачи упаковки шаров в невыпуклое множество при евклидовой метрике

n	$k = 1$		$k = 1,1$		
	R_1	$D(\%)$	R_1	$D(\%)$	$t_{executed}$
2	0,47778	24,93	0.4906	23,63	180
3	0,41526	24,55	0,48028	30,34	376
4	0,41428	32,50	0,46881	32,27	588
5	0,41209	39,99	0,46486	35,11	1228
6	0,37776	36,97	0,46454	37,78	1449
7	0,35556	35,96	0,46000	38,69	1938
8	0,35157	39,73	0,45519	38,94	2863
9	0,33778	39,64	0,45403	39,73	3122
10	0,32064	37,67	0,45403	40,55	3779
15	0,27857	37,06	0,45403	42,42	4315

Результаты при $k = 1$ получены в работе [24]. Таблица 3 показывает, что, в отличие от задачи упаковки шаров в выпуклое множество, плотность упаковки шаров разных типов в невыпуклое множество во многих случаях значительно больше, чем плотность упаковки равных шаров. С увеличением количества шаров плотность упаковки разных шаров увеличивается, радиус базового шара уменьшается и достигает минимума при количестве шаров $n = 9$. Наилучшие решения представлены на рис. 3.

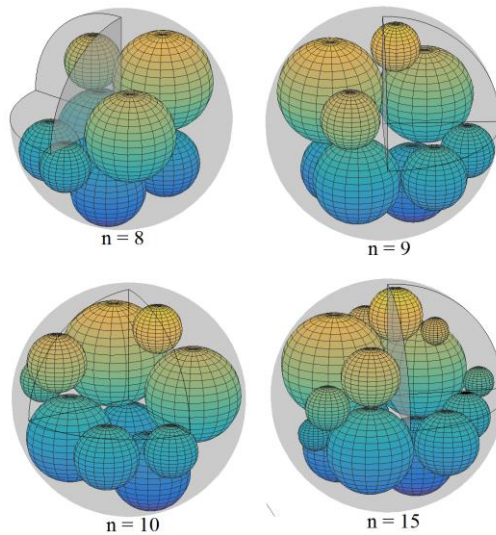


Рис. 3. Наилучшие решения задачи упаковки разных шаров в невыпуклое множество

Пример 4. Рассмотрим решения задачи упаковки при неевклидовой метрике, функция $f(x, y, z)$ задается формулой

$$f(x, y, z) = 0,1 + \frac{(x-0,2)^2 + (y-0,2)^2}{(x-0,2)^2 + (y-0,2)^2 + 1}.$$

Контейнер является сферическим цилиндром и описывается неравенством

$$P = \{(x, y, z) \in R^3 : (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 \leq 0,5^2; 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

График функции $f(x, y, z)$ изображен на рис. 4. Отметим, что в данном примере рассматривается неевклидова метрика и форма волнового фронта в трехмерном пространстве заранее неизвестна.

В таблице 4 представлены результаты вычислений при коэффициенте $k = 1,1$.

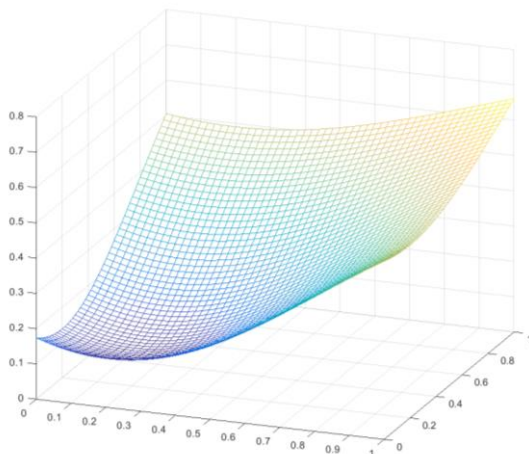


Рис. 4. Функция $f(x, y, z)$

Таблица 4. Результаты решения задачи упаковки шаров в цилиндр при неевклидовой метрике

n	R_1	$D(\%)$	$t_{executed}$
2	2,0615	24,96	195
3	1,6717	48,11	348
4	1,5998	35,41	567
5	1,5486	38,36	986
6	1,5249	31,23	1276
7	1,5080	27,93	1848
8	1,4963	37,38	2562
9	1,4824	34,85	2758
10	1,4732	33,73	3153
15	1,4619	39,98	4379

Из таблицы 4 видно, что плотность упаковки достигает максимальной величины при $n = 3$. Некоторые наилучшие решения представлены на рис. 5.

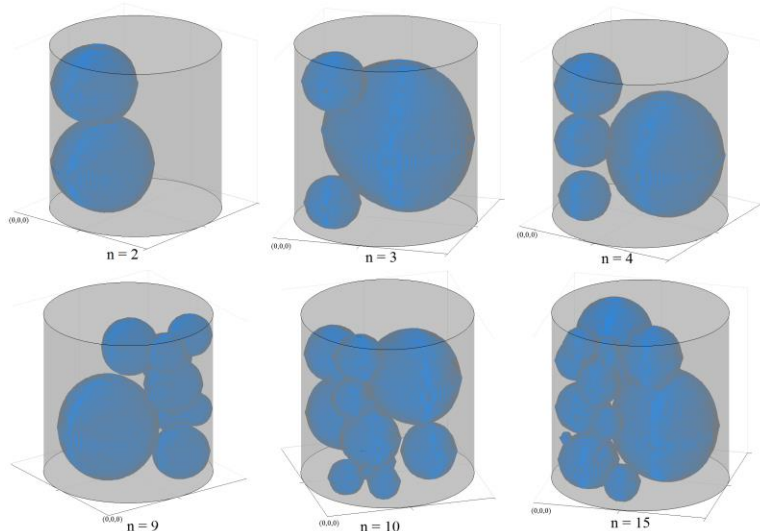


Рис. 5. Результаты решения задачи упаковки шаров в цилиндр при неевклидовой метрике

5. Заключение

В настоящей работе рассматривается проблема упаковки шаров разных типов в замкнутое множество произвольной формы в трехмерном пространстве со специальной неевклидовой метрикой. Для решения предложен новый метод, который основан на совместном применении бильярдного моделирования и оптико-геометрического подхода. Разработаны численные алгоритмы, которые реализованы в виде программного комплекса. Проведены вычислительные эксперименты, показывающие работоспособность предложенного метода и позволяющие установить некоторые свойства рассмотренных упаковок.

Дальнейшее развитие исследований в данном направлении могут заключаться в следующем: во-первых, целесообразно

усовершенствовать программно-алгоритмический аппарат, чтобы решать задачи упаковки при большем количестве шаров и их типов за короткое время; во-вторых, интерес представляет изучение более сложных постановок задачи и рассмотрение различных неевклидовых метрик и типов контейнеров, включая неодносвязные.

Литература

1. АКОПЯН А.В., КАБАТЯНСКИЙ Г.А., МУСИН О.Р. *Контактные числа, коды и сферические многочлены* // Математическое просвещение. – 2012. – Сер. 3, 16. – С. 57–74.
2. БАШУРОВ В.В. *Применение методов геометрической оптики к решению задач безопасности объекта* // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, №4. – С. 23–28.
3. БЕРЕЗОВСКИЙ О.А. *О задаче упаковки шаров в куб* // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Т. 50, №4. – С. 170–179.
4. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕБЕДЕВ П.Д. *Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости* // Вычислительные методы и программирование. – 2015. – Т. 16, №2. – С. 307–317.
5. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А. *Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Т. 72, №7. – С. 50–57.
6. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А., ЛЕ К.М. *О задачах построения многократных покрытий и упаковок в двумерном неевклидовом пространстве* // Управление большими системами. – 2019. – №81. – С. 6–25.
7. КАЗАКОВ А.Л., ЛЕМПЕРТ А.А., НГУЕН Г.Л. *Об одном алгоритме построения упаковки конгруэнтных кругов в неодносвязное множество с неевклидовой метрикой* // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2016. – Т. 17, №2. – С. 177–188.

8. ЛЕБЕДЕВ П.Д., ЛАВРОВ Н.Г. *Алгоритмы построения оптимальных упаковок шаров в эллипсоиды* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2018. – Т. 52. – С. 59–74.
9. СЛОЭН Н.Дж.А. *Упаковка шаров* // В мире науки. – 1984. – № 3. – С. 72–82.
10. ТОТ Л.Ф. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*. – М.: Физматлит, 1958. – 364 с.
11. ХЛУД О.М., СУББОТА И.А., РОМАНОВА Т.Е. *Математическая модель и метод решения задачи упаковки гомотетических одинаково ориентированных эллипсоидов* // Радиоэлектроника и информатика. – 2015. – №3. – С. 26–32.
12. ЯСЬКОВ Г.Н. *Упаковка большого числа конгруэнтных шаров в цилиндре* // Докл. НАН Украины. – 2009. – №12. – С. 45–48.
13. АКЕВ Н. *A Two-Stage Look-Ahead Heuristic for Packing Spheres into a Three-Dimensional Bin of Minimum Length* // Recent Advances in Computational Optimization: Results of the Workshop on Computational Optimization WCO 2014. – 2016. – P. 127–144.
14. ALKHANDARI A. *3D packing of balls in different containers by VNS* // Brunel University, School of Information Systems, Computing and Mathematics. – 2013. [Электронный ресурс]. – URL: <https://bura.brunel.ac.uk/handle/2438/8052>.
15. BIRGIN E.G., CSENDES T. *New and improved results for packing identical unitary radius circles within triangles, rectangles and strips* // Computers and Operations Research. – 2010. – Vol. 37, No. 7. – P. 1318–1327.
16. CHERNOV N., STOYAN YU., ROMANOVA T. *Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem* // Computational Geometry. – 2010. – Vol. 43, No. 5. – P. 535–553.
17. GENSANE T. *Dense packing of equal spheres in a cube* // The Electronic Journal of Combinatorics. – 2004. – Vol. 11. – P. 1–17.
18. GRAHAM R.L., LUBACHEVSKY B.D., NURMELA K.J., OSTERGARD P.R.J. *Dense packings of congruent circles in a circle* // Discrete Mathematics. – 1998. – Vol. 181. – P. 139–154.

19. GROSSO A., JAMALI A.R., LOCATELLI M., SCHOEN F. *Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container* // Journal of Global Optimization. – 2010. – Vol. 47, No. 1. – P. 63–81.
20. HALES T.C. *Cannonballs and honeycombs* // Notices of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 47. – P. 440–449.
21. HARRARY F., RANDOLPH W., MEZEY P.G. *A study of maximum unit-circle caterpillars—tools for the study of the shape of adsorption patterns* // Discrete Applied Mathematics. – 1996. – Vol. 67, No. 1–3. – P. 127–135.
22. HUANG W., YU L. *Serial symmetrical relocation algorithm for the equal sphere packing problem* // CoRR. – 2012. – Vol. abs/1202.4149.
23. KAZAKOV A.L., LEMPERT A.A., TA T.T. *The sphere packing problem into bounded containers in threedimension non-Euclidean space* // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No. 32. – P. 782–787.
24. KAZAKOV A.L., LEMPERT A.A., TA T.T. *On the algorithm for equal balls packing into a multi-connected set* // Advances in Intelligent Systems Research. – 2019. – Vol. 169. – P. 216–222.
25. KHLUD O.M., YASKOV G.N. *Packing homothetic spheroids into a larger spheroid with the jump algorithm* // Control, navigation and communication systems. – 2017. – Vol. 6, No. 46. – P. 131–135.
26. LEMPERT A.A., KAZAKOV A.L. *On Mathematical Models for Optimization Problem of Logistics Infrastructure* // Int. J. Artificial Intelligence. – 2015. – Vol. 13, No. 1. – P. 200–210.
27. LOPEZ C.O., BEASLEY J.E. *A Heuristic for the Circle Packing Problem with a Variety of Containers* // European Journal of Operation Research. – 2001. – Vol. 214, No. 3. – P. 512–525.
28. MARKOT M.C., CSENDES T.A. *A new verified optimization technique for the «packing circles in a unit square» problems* // SIAM Journal on Optimization. – 2005. – Vol. 16. – P. 193–219.
29. NURMELA K.J., OSTERGARD P.R.J. *Packing up to 50 equal circles in a square* // Discrete and Computational Geometry. – 1997. – Vol. 18. – P. 111–120.

30. PFOERTNER H. *Densest packings of n equal spheres in a sphere of radius 1.* – 2008. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.randomwalk.de/sphere/insphr/spisbest.txt> (дата обращения: 03.12.2019).
31. SPECHT E. *Packomania.* [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.packomania.com> (дата обращения: 13.03.2020).
32. STOYAN Y.G., YASKOV G. *Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped* // In: Bortfeldt A., Homberger J., Kopfer H., Pankratz G., Strangmeier R. (eds) *Intelligent Decision Support.* Gabler. – 2008. – P. 47–67.
33. STOYAN Y.G., YASKOV G. *Packing identical spheres into a cylinder* // *International Transactions in Operational Research.* – 2009. – Vol. 17. – P. 51–70.
34. SUTOU A., DAI Y. *Global Optimization Approach to Unequal Sphere Packing Problems in 3D* // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 2002. – Vol. 114, No. 3. – P. 671–694.
35. TATAREVIC M. *On Limits of Dense Packing of Equal Spheres in a Cube* // *The Electronic Journal of Combinatorics.* – 2015. – Vol. 22(1). – P. 35.
36. WANG J. *Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning* // *Journal of Combinatorial Optimization.* – 1999. – Vol. 3. – P. 453–463.

ON UNEQUAL BALLS PACKING PROBLEM IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Alexander Kazakov, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Doctor of Science, Professor (kazakov@icc.ru).

Anna Lempert, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Cand. Sc., Assistant Professor (lempert@icc.ru).

Trung Thanh Ta, Irkutsk National Research Technical University (Baikal School of BRICS), Irkutsk, PhD student (tatrungthanh@mail.ru).

Abstract: The article is devoted to the construction of optimal packings of unequal balls in a three-dimensional closed set. It is required to find such an arrangement of a fixed number of balls that their radii are maximal. This problem is NP-hard. To solve it, we propose a computational algorithm based on the optical-geometric approach and billiard modeling. Using this approach allows us to solve packing problems not only in Euclidean, but also in other metric spaces. We consider a problem in which, instead of the distance between the centers of the balls, the optimization parameter is the minimum traveling time between them. Such statements often arise if we consider problems of protecting the perimeter, in which the time of movement of the "intruder" to the protected object plays a much more significant role than the distance traveled, as well as in logistics, where the delivery time is paramount important. The algorithm was implemented, and computational experiments were performed. Both convex and non-convex sets were selected as container sets. The results of calculations allow us to positively assess the efficiency and effectiveness of the proposed algorithm. We performed a 3-D visualization of the results.

Keywords: unequal balls packing, three dimensional space, optical-geometric approach, billiard simulation method, computational algorithm, non-Euclidean metric.

УДК 514.174.2

ББК 22.19

DOI: 10.25728/ubs.2020.87.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 04.09.2020.
Опубликована 30.09.2020.*

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ КОМПЛЕКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НА ОСНОВЕ УНИТАРНОГО КОДА¹

Бурков В. Н.², Сергеев В. А.³, Коргин Н. А.⁴

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается проблема идентификации механизмов комплексного оценивания для заданного набора обучающих примеров. Предлагается подход к решению, основанный на унитарном кодировании. Формализуются основные понятия и определения, такие как: механизм комплексного оценивания с бинарным деревом и матрицами свертки, механизм комплексного оценивания с бинарным деревом для дискретных шкал, обучающий пример, обучающий набор (согласованный, полный, в единой шкале), монотонный обучающий набор. Задачи идентификации формулируются в виде задач реализации обучающего набора механизмом комплексного оценивания и аппроксимации. Предлагаемое унитарное представление механизма комплексного оценивания с использованием квадратичной формы иллюстрируется на нескольких примерах. Предъявляются правила кодирования механизмов комплексного оценивания. Показывается, что задача аппроксимации и задача реализации как ее частный случай могут быть сведены к задаче максимизации некоторого полинома, получаемого для заданных бинарного дерева и набора примеров с использованием унитарного кодирования. Формулируются и доказываются утверждения о свойствах данных полиномов для произвольного механизма комплексного оценивания. Приводятся примеры решения задачи идентификации механизма комплексного оценивания, реализующего пример через решение системы уравнений на основе унитарного кодирования. В заключение приводятся результаты численного эксперимента по аппроксимации всех булевых функций трех переменных механизмами комплексного оценивания.

Ключевые слова: идентификация и редукция модели; планирование и контроль производства; моделирование и принятие решений в сложных системах; комплексное оценивание; унитарное кодирование; унитарные функции.

¹ В.Н. Бурков благодарит за частичное финансирование грант РФФИ 18-07-01258, Н.А. Коргин – грант РФФИ 19-29-07525.

² Владимир Николаевич Бурков, д.т.н., проф. г.н.с. (burkov39@gmail.com).

³ Владимир Александрович Сергеев, м.н.с. аспирант (sergeev.bureau@gmail.com).

⁴ Николай Андреевич Коргин, д.т.н., доцент, г.н.с. (nkorgin@ipu.ru).

1. Введение

Механизмы комплексного оценивания (МКО) были введены в качестве многомерных систем оценки и ранжирования для управления и контроля в организационных и производственных системах в Советском Союзе в начале 80-х годов прошлого века (например, система АККОРД для электронной промышленности, см. [6, 8, 15]) и используются по сей день (см., например, [1, 2, 5, 14, 17, 20]). МКО могут быть отнесены к классу так называемых методов вербального анализа решений (ВАР) для неструктурированных проблем (см., например, [12, 22]) и предназначены для их структурирования, см., например, [7, 13, 16]. МКО предназначены для порядкового ранжирования (или классификации) с заранее определенным числом классов конечного набора многокритериальных альтернатив. Основные компоненты МКО – бинарное дерево и матрицы свертки, которые позволяют получать комплексное оценивание (КО) основанное на значениях нескольких параметров.

Основной подход к идентификации параметров КО предполагает итеративное взаимодействие с лицами, принимающими решения [5]. Однако в настоящее время существует запрос на разработку обучающих процедур для МКО, которые довольно обычны для алгоритмов идентификации задач в области искусственного интеллекта. Подобная задача исследовалась лишь для отдельных частных случаев, например, в [3, 11]. В этой работе мы покажем, что довольно популярный в настоящее время подход из области искусственного интеллекта – представление категориальных оценок на основе унитарного кодирования (см., например, [19, 24]) – позволяет создавать алгоритмы для идентификации МКО на основе обучающего набора примеров.

2. Основные понятия и определения

Пусть задан конечный набор индикаторов $L \subset \mathbb{N}$, $|L| = l$, на основе их значений должна быть произведена порядковая оценка некоторого объекта или ранжирование нескольких объектов. Для задачи идентификации МКО будем считать, что для каждого индикатора $i \in L$ задан конечный набор $K_i \subset \mathbb{N}$ его возмож-

ных значений $k_i \in K_i$, и вектор $k = (k_1, \dots, k_l)^T$ описывает любое возможное состояние оцениваемых объектов. Также есть конечный набор $K_L \subset \mathcal{M}$ возможных интегральных значений (рангов или классов) $k_L \in K_L$ для любого k .

Определение 1. МКО с бинарным деревом и свертками матриц – это отображение $w(\cdot): \prod_{i \in L} K_i \rightarrow K_L$, для которого индикаторы L являются листьями полного бинарного дерева – ориентированного графа $G = (V, E)$:

$$1. V = L \cup \hat{L}, \hat{L} = \{l+1, \dots, 2l-1\}.$$

$$2. E = \{e_{ij}\} \subseteq V \times V,$$

$$a. \forall i \in V \setminus \{2l-1\} \exists! j \in \hat{L} \setminus \{i\}: e_{ij} = 1, \forall t \in V \setminus j e_{it} = 0;$$

$$б. \forall j \in L \forall i \in V e_{ij} = 0;$$

$$в. \forall j \in \hat{L} \exists! \{r, c\} \in V \setminus \{j\} \times V \setminus \{j\}: e_{rj} = 1, e_{cj} = 1;$$

и $\forall j \in \hat{L}$ (внутренняя вершина дерева, включая вершину)

1) конечный набор $K_j \subset \mathcal{M}$ с возможными значениями $k_j \in K_j, K_{2l-1} = K_L$;

2) матрица свертки $M_j = [m_{jrc} \in K_j]_{r \in \{0, \dots, |K_j|-1\}, c \in \{0, \dots, |K_r|-1\}}$,

$\{r, c\} \in V \setminus \{j\} \times V \setminus \{j\}: e_{rj} = 1, e_{cj} = 1$ определены. $\square$

Потенциально данное определение может быть расширено на нечеткие [2, 16, 17] или непрерывные шкалы [7]; в рамках данной работы акцент сделан на работу именно с дискретными шкалами как индикаторов (показателей), так и значений, получаемых в узлах дерева свертки [4].

Имея некоторую МКО $w(\cdot)$, обозначим набор всех её матриц свертки как $M_w = \{M_j\}_{j \in L}$.

В этой работе мы ограничимся рассмотрением МКО с единой шкалой, таких что $\forall j \in V K_j = K_L$.

Для $L \subset \mathcal{M}$ обозначим $\Gamma_2(L)$ – набор всех бинарных деревьев с листьями из L ; $IRM_{L,2}$ – набор всех МКО для любого конкретного бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$; $IRM_{L,G} \subseteq IRM_{L,2}$ – набор всех МКО с таким деревом.

Для формализации задачи обучения обозначим $q = (k, k_M)$ отдельный обучающий пример, $Q \subset K \otimes K_L$ состоящей из значе-

ний оценок по каждому из индикаторов и интегральной оценки для данной совокупности значений индикаторов, $K = \prod_{i \in L} K_i$ – обучающий набор (из предоставленных примеров). Обучающий набор является *согласованным*, если $\forall \{q, \tilde{q}\} \subseteq Q \quad k \neq \tilde{k}$. Обучающий набор является *полным*, если $\forall k \in K \exists q \in Q: q = (k, k_L)$. Обучающий набор задан в *единой шкале*, если $\forall i \in L \quad K_i = K_L$.

Для произвольных $\{k, \tilde{k}\} \subseteq K$ обозначим $k \succ \tilde{k}$, если $\forall i \in L \quad \tilde{k}_i \leq k_i$.

Обучающий набор Q называется *монотонным* если $\forall \{q, \tilde{q}\} \subseteq Q$: если $k \succ \tilde{k}$, то $\tilde{k}_L \leq k_L$. В таком случае $q \succ \tilde{q}$.

Для некоторого произвольного $Q \subset K \otimes K_L$ можно определить следующие ключевые обозначения, касающиеся проблемы идентификации. Во-первых, можно формализовать задачу *реализуемости* обучающего набора:

Определение 2. $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует Q тогда и только тогда, когда $\forall q \in Q \quad w(k) = k_L$ □

Обозначим $IRM_{L,2}(Q)$ – множество всех МКО, которые реализуют Q , $IRM_{L,G}(Q)$ – множество всех МКО, которые реализуют Q и построены на основе двоичного дерева $G \in \Gamma_2(L)$. Тогда если $IRM_{L,2}(Q) \neq \emptyset$, то Q – *реализуема на основе* МКО, если $IRM_{L,G}(Q) \neq \emptyset$, тогда Q является *реализуемой на основе* МКО со структурой G .

Определение 2 также может быть сужено до одного конкретного обучающего примера: $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует некоторый пример $q \in Q$ тогда и только тогда, когда $w(k) = k_L$; так же определяются $IRM_{L,2}(q)$ и $IRM_{L,G}(q)$.

Если $IRM_{L,2}(Q) = \emptyset$ или $IRM_{L,G}(Q) = \emptyset$, то возможно поставить задачу *аппроксимации*. Для конкретного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ обозначим $Q_w = \{q \subseteq Q: w(k) = k_L\}$. Для любого произвольного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ обозначим $U_Q(w) = |Q_w| / |Q|$ – качество аппроксимации с максимумом в 1, если $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$. Тогда задача аппроксимации заключается в поиске $w^*(\cdot) \in \underset{w \in IRM_{M,2}}{\text{Arg max}} U_Q(w)$.

В случае если Q является *реализуемой на основе* МКО, любое

корректное решение проблемы аппроксимации должно определять $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$.

Для отдельного бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$ может быть сформулирована аналогичная задача – найти

$$w^*(\cdot) \in \underset{w \in IPM_{M,G}}{Arg \max} U_Q(w).$$

Вышеуказанные проблемы носят комбинаторный характер, и их может быть очень трудно решить $|\Gamma_2(L)| = (2l - 3)!!$. Но для определенного $G \in \Gamma_2(L)$ число переменных – количество ячеек всех матриц свертки – минимально по сравнению с любым сетевым представлением функции, которая реализует Q (см. например, [9]); для МКО с единой шкалой это $(l - 1)(|K_L| + 1)^2$, в то время как полное число ячеек таблицы представления отображения $\prod_{i \in L} K_i \rightarrow K_L$ равно $(|K_L| + 1)^l$.

Поэтому МКО может рассматриваться как самое экономное приближение некоторого дискретного отображения $\prod_{i \in L} K_i \rightarrow K_L$.

3. Унитарное представление механизмов комплексного оценивания

Для некоторого конечного набора $K \subset \mathbb{N}$ введем его *нормализованное* представление $\bar{K} = \{0, \dots, \kappa\}$, $\kappa = |K| - 1$. Тогда $\forall x \in \bar{K}$ введем унитарное представление как $\tilde{x} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$. В этой

работе мы ограничимся рассмотрением МКО с единой шкалой. Тогда для некоторой матрицы свертки $M = [m_{rc} \in K]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$ результат свертки для любой пары $\{x, y\} \in \{0, \dots, \bar{K}\}^2$, где x определяет выбор столбца матрицы и y – строки, описывается матричным уравнением $\tilde{y}^T M \tilde{x}$. Далее мы также будем использовать так называемую квадратичную форму представления $(M\tilde{x}, \tilde{y})$, упрощая её до $M\tilde{x}\tilde{y}$.

Пример 1. Рассмотрим $|L| = 3$. Любой МКО с единой шкалой может быть представлен как $(A, \tilde{b})$, $\tilde{b} = (B\cdot, \dots)$, где

$\{x, y, z\} \in \bar{K}^3$, $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ расположены на позициях $\dots$ произвольным образом, без повторов, и $A = [a_{rc} \in \bar{K}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, $B = [b_{rc} \in \bar{K}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$ – некоторые квадратные матрицы.

Мы также применяем операцию унитарного кодирования к матрицам свертки. Дана некоторая матрица свертки $M = [m_{rc} \in K]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, обозначим $\tilde{M} = [\tilde{m}_{rc}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, где $\tilde{m}_{rc}$ – унитарное представление m_{rc} в наборе K . Так что унитарная матрица – это матрица, в каждой ячейке которой стоит унитарный вектор. Тогда операция $\tilde{y}^T \tilde{M} \tilde{x}$ даст унитарный результат для операции $\tilde{y}^T M \tilde{x}$, описанной выше. Далее мы будем использовать её упрощенное квадратичное представление $\tilde{M} \tilde{x} \tilde{y}$.

Пример 2. Пусть $|K_L| = 2$, что можно трактовать как классическую бинарную логику. Тогда

$$\tilde{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{00}^0 \\ m_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{10}^0 \\ m_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

с дополнительными унитарными ограничениями: $\forall \{r, c\} \in \{0, 1\}^2 m_{rc}^0 + m_{rc}^1 = 1, \forall t \in \{0, 1\} m_{rc}^t \in \{0, 1\}$.

Например, результат $\tilde{M} \tilde{1} \tilde{0}$:

$$(1, 0) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{00}^0 \\ m_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{10}^0 \\ m_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 0) \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \\ m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix}. \square$$

Принимая во внимание тот факт, что любое полное двоичное дерево с l листьями должно иметь $l - 1$ внутренних узлов, включая корень, любой МКО может быть закодирован в форме «слова» с $2l - 1$ буквами в упрощенном квадратичном представлении; $l - 1$ буквами должны обозначаться матрицы свертки (внутренние узлы) и l – листья.

Мы предлагаем следующие правила для кодирования МКО:

1. Первая буква всегда должна обозначать матрицу свертки для корневого узла.

2. Если после буквы матрицы в слове есть только одна буква листа или другая буква матрицы, то запись описывает «спуск» вдоль ветви дерева. Если после некоторой буквы матрицы расположены две буквы листьев, то это «терминальная» матрица свертки в этой ветви дерева, после которой запись «поднимается» вдоль уже описанной ветви в поисках следующей ветви.

3. После любой буквы матрицы сперва должно быть закодировано «низкое» поддерево (с меньшей высотой) из двух, которые исходили из этого узла, а затем второе, «высокое».

Применение унитарного кода позволяет реализовать подход, в рамках которого любой МКО может быть рассмотрен как последовательность матричных операций с унитарно закодированными значениями листьев в соответствии со «словом», которое описывает соответствующий МКО. Результатом такой последовательности операций является унитарно закодированный результат МКО w , который также может быть обозначен как $\tilde{w}$.

4. Подходы к решению задач идентификации и аппроксимации с унитарным представлением механизмов комплексного оценивания

Унитарное кодирование может применяться к обучающим примерам так же, как это было описано в предыдущем разделе. Для некоторого обучающего примера $q = (k, k_L)$ мы будем обозначать унитарную версию как $\tilde{q} = (\tilde{k}, \tilde{k}_L)$, где $\tilde{k}_L$ – унитарное представление k_L и $\tilde{k}$ – кортеж k в унитарном представлении.

Если $w(\cdot) \in \text{IRM}_{L,2}$ реализует некоторый пример $q \in Q$, то $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{k}_L$. Из этого следует, что для того чтобы найти МКО, который реализует некоторый обучающий пример, необходимо решить систему уравнений, полученных на основе унитарного представления этого МКО с дополнительными ограничениями, вытекающими из унитарного представления.

Пример 3. Рассмотрим $|L| = 3$ $|K_L| = 2$ и обучающий пример $q = ((0, 0, 0), 0)$, унитарное представление представлено в таблице 1.

Таблица 1. Унитарное представление обучающего примера для примера 3

	$\tilde{k}_0$	$\tilde{k}_1$	$\tilde{k}_2$	$\tilde{k}_L$
$\tilde{q}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Если МКО имеет структуру $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{A}\tilde{k}_0\tilde{B}\tilde{k}_1\tilde{k}_2$, то необходимо решить систему уравнений

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} b_{00}^0 & b_{01}^0 \\ b_{10}^0 & b_{11}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^T \left[\begin{pmatrix} a_{00}^0 & a_{01}^0 \\ a_{10}^0 & a_{11}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с унитарными условиями: $\forall \{i, j\} \in \{0, 1\}^2 \quad a_{ij}^0 + a_{ij}^1 = 1, \quad b_{ij}^0 + b_{ij}^1 = 1, \quad \forall t \in \{0, 1\} \quad a_{ij}^t \in \{0, 1\}, \quad b_{ij}^t \in \{0, 1\}.$

Уравнения (1) могут быть упрощены:

$$b_{00}^0 \begin{pmatrix} a_{00}^0 \\ a_{01}^0 \end{pmatrix} + b_{00}^1 \begin{pmatrix} a_{10}^0 \\ a_{11}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

И наконец имеем:

$$b_{00}^0 a_{00}^0 + b_{00}^1 a_{10}^0 = 1,$$

$$b_{00}^0 a_{01}^0 + b_{00}^1 a_{11}^0 = 0.$$

Подойдут например, любые матрицы A и B такие, что $\tilde{a}_{00} = \tilde{b}_{00} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, — это означает, что будет достаточно определить

$a_{00} = b_{00} = 0$ для реализации $q = ((0, 0, 0), 0)$ в МКО с унитарным представлением $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{A}\tilde{k}_0\tilde{B}\tilde{k}_1\tilde{k}_2$. $\square$

Приведенный выше пример также иллюстрирует первое из двух основных положений этой статьи. Для произвольного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$ обозначим $P(w, q)$ — функцию, которая нахо-

дится в левой части уравнения с правой частью, равной 1. Вследствие унитарного подхода есть только одна такая функция для любого q .

Утверждение 1. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$, МКО с единой шкалой $w(\cdot) \in \text{IRM}_{L,2}(Q)$ и любого возможного q в единой шкале: $P(w, q)$ – однородный полиномом степени $l-1$, который может быть представлен как сумма k^{l-2} уникальных компонент:

$$P(w, q) = \sum_{j=1}^{k^{l-2}} p_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, k^{l-2}\} \quad p_j = \prod_{i=1}^{l-1} m_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, l-1\},$$

m_i – одна компонента кортежа в некоторой ячейке унитарно закодированной матрицы $\tilde{M}_i$; $\{\tilde{M}_i\}_{i \in \{1, \dots, l-1\}}$ – набор всех унитарно закодированных матриц свертки МКО w ,

$$P(w, q) \in \{0, 1\};$$

$$P(w, q) = \tilde{w}(\tilde{k})^T \tilde{k}_L;$$

$$\text{IRM } w \text{ реализует } q \Leftrightarrow P(w, q) = 1. \square$$

Доказательство утверждения 1 приведено в приложении.

Следствие 1. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$, и любого возможного q в единой шкале $\text{IRM}_{L,2}(q) = \text{Arg max}_{w \in \text{IRM}_{L,2}} P(w, q). \square$

Доказательство следствия 1 приведено в приложении.

В дополнение к следствию, указанному выше, из утверждения 1 следует, что для идентификации $\text{IRM}_{L,G}(q)$ для некоторого бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$ достаточно рассмотреть релаксированную проблему оптимизации:

$$(2) \quad \max_{w \in \text{IRM}_{L,G}} P(w, q)$$

при ограничениях:

$$(3) \quad \forall \{\tilde{M}_i\}_{i \in \{1, \dots, l-1\}}, \forall \tilde{m} \in \tilde{M}_i, \tilde{m} \in [0; 1]^l, |\tilde{m}| = 1,$$

и любое решение этой задачи должно обеспечивать значение $P(w, q) = 1$.

Чтобы аппроксимировать некоторый обучающий набор $Q \subset K \otimes K_L$ по критерию, представленному в разделе 2, необходимо найти такой МКО, который реализует максимальное число обучающих примеров из этого набора. С учетом (2) и (3) можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ и любого возможного $Q \subset K^{l+1}$ с единой шкалой решение задачи аппроксимации МКО с единой шкалой состоит в решении задачи максимизации:

$$(4) \quad \max_{w \in \text{IPM}_{M,G}} \sum_{q \in Q} P(w, q)$$

при ограничениях:

$$(5) \quad \forall \{M_i\}_{i \in \{1, \dots, l-1\}}, \forall \tilde{m} \in \tilde{M}_i \quad \tilde{m} \in [0; 1]^l, \quad |m| = 1. \square$$

Доказательство утверждения 2 приведено в приложении.

Следствие 2. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ любой $Q \subset K^{l+1}$ с единой шкалой может быть реализован с помощью МКО с единой шкалой тогда и только тогда, когда существует $w \in \text{IRM}_{L,2}(Q)$, такое что $\sum_{q \in Q} P(w, q) = |Q|$. $\square$

Доказательство следствия 2 вытекает очевидным образом из определений задач реализуемости и аппроксимации.

Проиллюстрируем, как результаты разработанного подхода могут быть реализованы в отдельных случаях. Как уже упоминалось ранее, мы ограничимся рассмотрением примеров с двоичной логикой.

5. Примеры идентификации

Начнем с типичного примера проверки подходов к обучению ИИ – реализации XOR (см., например, [23]).

Пример 4. Булева функция XOR $f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$. $|I| = 2$ и $|K| = 2$, полный набор обучающих примеров (его таблица истинности) в унитарной форме представлен в таблице 2.

Таблица 2. Обучающий набор в унитарном представлении для примера 6

	$\tilde{x}_1^T$	$\tilde{x}_2^T$	$\tilde{f}^T$
q^1	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)
q^2	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)
q^3	(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)
q^4	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)

Существует только одна допустимая структура МКО – $\tilde{A}\tilde{x}_1\tilde{x}_2$. Необходимо решить систему уравнений в матричной форме $\forall q \in Q$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_2^0(q) \\ \tilde{x}_2^1(q) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{00}^0 \\ \tilde{a}_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{a}_{01}^0 \\ \tilde{a}_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{a}_{10}^0 \\ \tilde{a}_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^0 \\ \tilde{a}_{11}^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^0(q) \\ \tilde{x}_1^1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}^0(q) \\ \tilde{f}^1(q) \end{pmatrix}.$$

Из нее следует, что $\forall w(\cdot) \in IRM_{L,2} \quad P(w, q^1) = a_{00}^0, \quad P(w, q^2) = a_{11}^0, \quad P(w, q^3) = a_{10}^1, \quad P(w, q^4) = a_{01}^1$. Так что существует только одно допустимое решение с $\sum_{q \in Q} P(w, q) = 4$, для него

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такая матрица A соответствует функции XOR.

Пример 5. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$. $|M| = 3$ и $|K| = 2$, полный набор обучающих примеров представлен в таблице 3.

Решение задач (4), (5) для этого набора достигают два МКО со значением (4) равным 8 – обе реализуют этот набор.

Таблица 3. Обучающий набор для примера 7

	x_1	x_2	x_3	f
q^1	0	0	0	0
q^2	0	0	1	0
q^3	0	1	0	0
q^4	1	0	0	0
q^5	1	1	0	1
q^6	1	0	1	0
q^7	0	1	1	1
q^8	1	1	1	1

Оба решения имеют похожие структуры – $\tilde{A}\tilde{x}_1\tilde{B}\tilde{x}_2\tilde{x}_3$. Оптимизационный функционал (4) для этой структуры:

$$(\tilde{b}_{00}^0 + \tilde{b}_{10}^0 + \tilde{b}_{01}^0 + \tilde{b}_{11}^0)\tilde{a}_{00}^0 + (\tilde{b}_{00}^1 + \tilde{b}_{10}^1 + \tilde{b}_{01}^1 + \tilde{b}_{11}^1)\tilde{a}_{10}^0 + \\ + \tilde{b}_{00}^0\tilde{a}_{01}^0 + (\tilde{b}_0^0 + \tilde{b}_{10}^0 + \tilde{b}_{11}^0)\tilde{a}_{01}^1 + \tilde{b}_{00}^1\tilde{a}_{11}^0 + (\tilde{b}_{01}^1 + \tilde{b}_{10}^1 + \tilde{b}_{11}^1)\tilde{a}_{11}^1$$

Матрицы свертки для первого решения:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы в точности соответствуют функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$. Матрицы свертки для второго МКО:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы соответствуют другому представлению той же функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (\overline{x_2 \wedge x_3})$. □

Пример 6. Изменяя значение f для обучающего примера q^7 в таблице 6 с 0 на 1 получается обучающий набор для другой булевой функции: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3)$. Оптимизационный функционал (4) $\forall IRM \in IRM_{M,2}$ для такого обучающего набора:

$$(\tilde{b}_{00}^0 + \tilde{b}_{10}^0 + \tilde{b}_{01}^0)\tilde{a}_{00}^0 + \tilde{b}_{11}^0\tilde{a}_{00}^1 + (\tilde{b}_{00}^1 + \tilde{b}_{10}^1 + \tilde{b}_{01}^1)\tilde{a}_{10}^0 + \tilde{b}_{11}^1\tilde{a}_{10}^1 + \\ + \tilde{b}_{00}^0\tilde{a}_{01}^0 + (\tilde{b}_{01}^0 + \tilde{b}_{10}^0 + \tilde{b}_{11}^0)\tilde{a}_{01}^1 + \tilde{b}_{00}^1\tilde{a}_{11}^0 + (\tilde{b}_{01}^1 + \tilde{b}_{10}^1 + \tilde{b}_{11}^1)\tilde{a}_{11}^1.$$

Решение задач (4), (5) дает максимальное значение 7 – это значит, что невозможно реализовать как минимум один из обучающих примеров. В частности, оба МКО, которые реализуют набор обучения для примера 5, достигают такого значения для целевой функции – реализуют все примеры обучения, кроме измененного примера q^7 . □

Примеры 5 и 6 являются иллюстрацией для пары конкретных функций из класса булевых функций трех переменных. Всего таких функций 256, из которых только 20 являются неубывающими. Все они могут быть описаны с помощью таблицы истинности, например, как таблица 6. Мы провели вычислительный эксперимент, чтобы определить для каждой функции, можно ли реализовать ее с помощью МКО, определяя параметры соответствующего ей МКО.

В случае нереализуемой функции мы нашли МКО, который является наилучшим приближением для нее, и вычислили качество приближения.

Получилось, что среди всех 256 булевых функций трех переменных 152 реализуются через МКО и 56 из них – с любой из трех возможных древовидных структур. Оказалось, что нет такой булевой функции, которая была реализована в двух из трех возможных структур. Для всех 94 нереализуемых функций качество аппроксимации составляет $7/8$, т.е. только одна строка из его таблицы истинности не реализуется путем аппроксимации МКО. Из 20 неубывающих функций только одна не реализуема – это функция из примера 8. Остальные 19 неубывающих функций представимы в древовидной структуре, т.е. являются *бесповторными* [10, 21].

6. Заключение

В статье представлены первые результаты возможного решения проблемы идентификации МКО на основе унитарного кодирования. Основной проблемой, которую еще предстоит решить, является комбинаторный характер проблемы выбора структуры бинарных деревьев для МКО. Однако предложенный подход предоставляет возможности для реализации в новом направлении процедур обучения ИИ, что позволяет заранее определять структуру нейронных сетей [18]. Также необходимо упомянуть, что множество рассмотренных в этой статье случаев было сужено до бинарной логики, но переход на многозначную логику не вызывает дополнительных трудностей при реализации предложенного подхода. В случае двоичной логики мы предложили новый подход к идентификации так называемых *бесповторных функций* (см., например, [10, 21]).

Приложение

Доказательство утверждения 1. В рамках введенной унитарной записи операция в рамках МКО с отдельным набором значений индикаторов $\tilde{w}(\tilde{k})$ представляет из себя последовательность $l - 1$ матричных операций $\tilde{y}^T \tilde{M} \tilde{x}$, где векторы $\tilde{x}, \tilde{y}$ имеют размерность $k + 1 \in \mathbb{N}$, матрица $\tilde{M}$ – размерность $(k + 1) \times (k + 1)$. Очевидно, что каждая такая операция представима в виде полинома

$$\tilde{y}^T \tilde{M} \tilde{x} = \sum_{r \in \{0, \dots, \kappa\}} \tilde{y}^r \sum_{c \in \{0, \dots, \kappa\}} \tilde{x}^c \tilde{m}_{rc}.$$

Соответственно, если во всех ячейках матрицы стоят векторы размерности $k + 1$, то результатом операции будет также вектор размерности $k + 1$, а любая его компонента $i \in \{0, \dots, k\}$ будет записываться как

$$\sum_{r \in \{0, \dots, \kappa\}} \tilde{y}^r \sum_{c \in \{0, \dots, \kappa\}} \tilde{x}^c \tilde{m}_{rc}^i.$$

То есть итоговым значением операции $\tilde{w}(\tilde{k})$ будет также вектор размерности $k + 1$. При этом каждая компонента этого вектора будет представима однородным полиномом степени $2l - 1$, определяемым $2l - 2$ операциями типа $\tilde{y}^T \tilde{x}$, т.е. иметь k^{2l-2} . Учитывая, что значения всех листьев заданы унитарными векторами, то итоговая степень полинома будет $l - 1$ – в нем сохранятся только те слагаемые, которые не умножаются на нулевые значения компонент векторов листьев, и каждое слагаемое будет иметь вид $\prod_{i=1}^{l-1} m_i$, m_i – одна компонента кортежа в некоторой ячейке унитарно закодированной матрицы $\tilde{M}_i$. При этом количество ненулевых слагаемых будет уже определяться $2l - 2 - 1$ операциями типа $\tilde{y}^T \tilde{x}$, т.е. их будет всего k^{l-2} . Уникальность каждого слагаемого также следует из сути описанной операции.

Учитывая, что в ячейках всех матриц должны стоять унитарные вектора, получаем, что каждая компонента вектора,

определяемого операцией $\tilde{w}(\tilde{k})$, может принимать значения либо 0, либо 1.

Соответственно, то, что МКО реализует отдельно взятый пример, означает, что $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{k}_L$. Так как Вектор $\tilde{k}_L$ является унитарным, то у вектора $\tilde{w}(\tilde{k})$ только одна компонента должна быть равна 1 – та же, что и у вектора $\tilde{k}_L$, все остальные должны быть равны 0. То есть $\tilde{w}(\tilde{k})^T \tilde{k}_L = 1$.

Поэтому, обозначив через $P(w, q)$ полином, соответствующий компоненте вектора, определяемой $\tilde{w}(\tilde{k})$ и которая должна равняться 1, получаем все совокупность пунктов данного утверждения. $\square$

Доказательство следствия 1. Из утверждения 1 следует, что для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ и любого возможного q в единой шкале для любой МКО w $P(w, q) \in \{0; 1\}$, а то, что некоторый МКО $\tilde{w}$ реализует q , означает, что $P(\tilde{w}, q) = 1$. Отсюда следует, что $IRM_{L,2}(q) = \underset{w \in IRM_{L,2}}{\text{Arg max}} P(w, q)$. $\square$

Доказательство утверждения 2. Так как задача аппроксимации в рамках данной статьи определена как реализация как можно большего числа примеров из обучающего набора, то из записи оптимизационной задачи для реализации отдельного примера в виде (2), (3) следует, что запись (4), (5) соответствует данной формулировке задачи аппроксимации. $\square$

Литература

1. АКИНФЕЕВ В.К., ЦВИРКУН А.Д. Программный комплекс «ТЭО-ИНВЕСТ» // Проблемы управления инвестициями. – 2013. – №4. – С. 32–40.
2. АЛЕКСЕЕВ А.О. и др. Алгоритмические основы нечеткой процедуры комплексного оценивания объектов различной природы // Фундаментальные исследования. – 2014. – №3-3. – С. 469–474.

3. БЛАЧЕВ Р.Н. Особенности процедуры бинарной агрегации многокритериальных экспертных оценок // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №5. – С. 126–132.
4. БУРКОВ В.Н., ГОРЕЛИКОВ Н.И., ЧЕРКАШИН А.М. Методические основы комплексной оценки результатов деятельности предприятий с учетом их прогрессивности в ВПО «Союзэлектроприбор» // Приборы и системы управления. – 1982. – №11. – С. 21.
5. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. Механизмы управления эколого-экономическими системами / Под ред. академика С.Н. Васильева. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2008. – 244 с.
6. БУРКОВ В.Н., ТЕСАРЖ И., ТРУБКА Я., ЦЫГАНОВ В.В., ЧАМСКИ Б., ЧЕРКАШИН А.М. Проектирование систем комплексной оценки инноваций и принятия решений / В кн.: Моделирование и идентификация производственных систем. – М.: ИПУ, 1988. – С. 49–55.
7. ГЛЮТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. Векторная стратификация. – М.: Наука, 1984. – 132 с.
8. ГОРЕЛИКОВ Н.И. Проблемы совершенствования отраслевого механизма управления разработкой и производством новой продукции // Автоматика и телемеханика. – 1984. – №5. – С. 63–70.
9. ГУБКО М.В. Математические модели формирования рациональных организационных иерархий // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №9. – С. 114–139.
10. ГУРВИЧ В.А. О неповторных булевых функциях // Успехи математических наук. – 1977. – Т. 32, №1 – С. 183–184.
11. КАЗАКОВА Е.А., КУРОЧКА П.Н., ПОЛОВИНКИНА А.И. Автоматизированное построение матричных процедур комплексного оценивания на основе оптимизационного подхода // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – №10.
12. ЛАРИЧЕВ О.И. Вербальный анализ решений. – М.: Наука, 2006.

13. ПОДИНОВСКАЯ О.В., ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Анализ иерархических многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев* // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 2–8.
14. ПУЛИКОВСКИЙ К.Б., ЩЕПКИН А.В. *Комплексная оценка соответствия опасных производственных объектов требованиям безопасности* // Безопасность труда в промышленности. – 2007. – №4. – С. 2–7.
15. ТРАПЕЗНИКОВ В.А., ГОРЕЛИКОВ Н.И., БУРКОВ В.Н., ЗИМОХА В.А., ТОЛСТЫХ А.В., ЧЕРКАШИН А.М., ЦЫГАНОВ В.В. *Комплексный подход к управлению научно-техническим прогрессом в отрасли* // Вестник АН СССР. – 1983. – №3. – С. 33–43.
16. ХАРИТОНОВ В.А., БЕЛЫХ А.А. *Технологии современного менеджмента* – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. 190 с.
17. ALEKSEEV A., GALIASKAROV E., KOSKOVA K. *Application of the Matrix Rating Mechanisms and System Cognitive Analysis Methods at the Task of Residential Real Estate Conceptual Designing*. // IEEE 21st Conference on Business Informatics (CBI) – 2019. – Vol. 2. – P. 111–116.
18. GARNELO M., SHANAHAN M. *Reconciling deep learning with symbolic artificial intelligence: representing objects and relations* // Current Opinion in Behavioral Sciences 29. – 2019. – P. 17–23.
19. HARRIS D., HARRIS S. *Digital design and computer architecture*. – Morgan Kaufmann, 2010.
20. KORGIN N.A., ROZHDESTVENSKAYA S.M. *Concordant Approach for R&D Projects' Evaluation and Ranking for Formation of Programs* // IEEE 11th Int. Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). – 2017. – P. 1–5.
21. KOZACHINSKIY A. *Recognizing Read-Once Functions from Depth-Three Formulas* // Theory of Computing Systems. – 2020. – Vol. 64(1). – P. 3–16.

22. LARICHEV O.I., MOSHKOVICH H.M. *Verbal decision analysis for unstructured problems* // Springer Science & Business Media – 2013. – Vol. 17.
23. NITTA T. *Solving the XOR problem and the detection of symmetry using a single complex-valued neuron* // Neural Networks. – 2003. – Vol. 16(8). – P. 1101–1105.
24. OKADA S., OHZEKI M., TAGUCHI S. *Efficient partition of integer optimization problems with one-hot encoding* // arXiv preprint arXiv:1906.07385. – 2019.

ONE-HOT APPROACH TO IDENTIFICATION OF INTEGRATED RATING MECHANISMS

Vladimir. Burkov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, D.E.Sc., full professor, principal researcher (burkov39@gmail.com).

Vladimir Sergeev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, research assistant, postgraduate (sergeev.bureau@gmail.com).

Nikolay Korgin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, D.E.Sc., associate professor, principal researcher. (Tel: +7495-335-60-37; nkorgin@ipu.ru).

Abstract: The problem of identifying the integrated rating mechanisms for a given set of training examples is considered. An approach to the solution based on one-hot encoding is proposed. Basic concepts and definitions are formalized, such as: an integrated rating mechanism with a binary tree and convolution matrices, an integrated rating mechanism with a binary tree for discrete scales, a training example, a training set (consistent, complete, uniform scaled), a monotone training set. Identification tasks are formulated in the form of tasks for the implementation of the training set by the integrated rating mechanism and approximation. The proposed one-hot representation of the complex estimation mechanism using the quadratic form is illustrated with several examples. The rules for coding the integrated rating mechanisms are presented. It is shown that the problem of approximation and the problem of implementation as its particular case can be reduced to the problem of maximizing a certain polynomial obtained for a given binary tree and a set of examples using one-hot encoding. Assertions about the properties of these polynomials for an arbitrary integrated rating mechanism are formulated and proved. Examples of solving the problem of identification of an integrated rating mechanism

are given, which implements an example through solving a system of equations based on one-hot encoding. In conclusion, the results of a numerical experiment on the approximation of all Boolean functions of three variables by the integrated rating mechanism are presented.

Keywords: identification and model reduction; production planning and control; modelling and decision making in complex systems; integrated assessment; one-hot encoding; read-once functions.

УДК 519

ББК 32.81

DOI: 10.25728/ubs.2020.87.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольниковым.*

Поступила в редакцию 06.07.2020.

Опубликована 30.09.2020.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ КОРРУПЦИИ¹

Мальсагов М. Х.²

(Ингушский государственный университет, Назрань)

Угольницкий Г. А.³, Усов А. Б.⁴

(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

В теоретико-игровой постановке исследована модель взаимодействия преподавателя и студента с учетом возможной коррумпированности преподавателя. Формализация модели проведена в виде игры двух лиц в развернутой форме с совершенной информацией. Предполагается, что студенты бывают только высокой и низкой квалификации. При этом коррупция будет проявляться в виде попустительства в случае студента низкой квалификации и вымогательства – для студентов с высокой квалификацией. Решение проводится методом обратной индукции с помощью алгоритма Куна анализа игры в развернутой форме по значениям выигрышей субъектов управления методом обратной индукции. Приводится алгоритм построения решения. Проведено имитационное моделирование по значениям выигрышей субъектов управления. Приведены результаты численных экспериментов, дан их анализ. На основе анализа результатов проведенных имитационных экспериментов в случае студента высокой и низкой квалификации сделаны содержательные выводы. Основным является вывод о том, что в случае студентов высокой квалификации одного снижения их моральных затрат при подаче жалоб на коррупционное поведение преподавателя достаточно для искоренения коррупции в системе «преподаватель – студент». В случае же студента низкой квалификации искоренить коррупцию сложнее. Здесь необходим комплексный подход, предполагающий значительное увеличение размера наказания преподавателя за взятку, а также его выигрыша в бескоррупционном случае и повышение вероятности обнаружения факта взятки путем усиления административного контроля над преподавателем.

Ключевые слова: имитационное моделирование, коррупция, динамические игры с полной информацией.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-01-00053).

² Мухарбек Хасанович Мальсагов, к.ф.-м.н., доцент (mmm1956@bk.ru).

³ Геннадий Анатольевич Угольницкий, д.ф.-м.н., профессор (ougoln@mail.ru).

⁴ Анатолий Борисович Усов, д.т.н., доцент (tol151968@yandex.ru).

1. Введение

Коррупция относится к числу важнейших социально-экономических явлений, оказывающих негативное влияние на развитие общества. Теоретическое исследование коррупции было начато С. Роуз-Аккерман в работе [12]. Вслед за Г. Беккером она предположила, что борьба с коррупцией эффективна, если выгоды от ее ограничения превышают затраты. Количество работ по математическому моделированию коррупции очень велико: обзоры можно найти в [4, 10] и ряде других публикаций. Так, в статье [9] приводится классификация видов коррупции; авторы [11] проводят стратегический анализ бытовой коррупции. Среди российских исследователей следует отметить работы [1, 2, 7, 8] и целый ряд других.

Авторская концепция моделирования коррупции в иерархических системах управления [3] отличается от экономического подхода Г. Беккера и С. Роуз-Аккерман. Именно, борьба с коррупцией считается успешной, если выполняются определенные требования к управляемой системе, обеспечивающие ее устойчивое развитие. В частности, даны специфические определения попустительства и вымогательства как видов коррупции.

Настоящая статья развивает подход, предложенный в работе [6]. Там взаимодействие преподавателя и студента на экзамене с возможной коррупционной составляющей формализовано как динамическая игра с совершенной информацией и конкретными значениями выигрышей. В настоящей работе предполагается возможность произвольных значений выигрышей, поэтому анализ производится посредством имитационного моделирования. Основной замысел заключается в исследовании зависимости решения от различных параметров модели. Поскольку по понятным причинам идентификация модели по реальным данным вызывает большие затруднения, то использовались экспертные оценки значений параметров. Имитационное моделирование обеспечивает возможность учёта достаточно большого количества значений в содержательно разумных диапазонах и тем самым возможность экспериментально обоснованных выводов.

2. Постановка задачи

Исследуем в теоретико-игровой постановке модель, описывающую взаимодействие преподавателя (P) и студента (S) на экзамене. Во время экзамена преподаватель P выясняет объективный уровень знаний студента S и, как следствие, какую оценку он заслуживает. Для простоты предполагается, что студенты бывают только высокой и низкой квалификации. Допускается, что преподаватель P может быть коррумпированным, т.е. стараться получить от студента S взятку. При этом коррупция будет проявляться в виде попустительства в случае студента низкой квалификации (L) и вымогательства – для студентов с высокой квалификацией (H). Значения L или H выбирает на первом шаге природа N .

Поясним смысл вымогательства и попустительства [3, 9, 10]. Если студент имеет высокую квалификацию, то преподаватель может быть:

а) честным по отношению к нему и поставить ему заслуженную им оценку при отсутствии взятки (h – *honest*) или

б) коррумпированным, т.е. вымогать у студента взятку, угрожая неудовлетворительной оценкой (e – *extortion*), несмотря на знания студента.

Если студент имеет низкую квалификацию (знает предмет на неудовлетворительную оценку), то преподаватель вновь может быть:

а) честным по отношению к нему и поставить ему заслуженно неудовлетворительную оценку при отсутствии взятки (h) или

б) коррумпированным, т.е. зависить студенту объективную оценку при наличии взятки (c – *capture*).

Если преподаватель честный, то игра заканчивается сразу: студент высокой квалификации получает высокую оценку, а студент низкой квалификации идет на пересдачу. В этом случае выигрыш преподавателя равен некоторой положительной величине v_1 , учитывающей его моральное удовлетворение от честно выполненной работы. Выигрыш студента высокой квалификации при этом равен w_1 , а низкой

квалификации – w_2 . Если преподаватель предлагает студенту коррупционную схему сдачи экзамена (берет взятки), то студент может согласиться и дать преподавателю взятку (b – *bribe*) либо подать на него жалобу (a – *appeal*) в вышестоящий орган (например, в деканат). Предполагается, что если преподаватель коррумпирован, а студент подает жалобу, то преподавателя наказывают: порицают, штрафуют либо увольняют (его выигрыш равен v_2 в случае студента высокой квалификации и v_3 – низкой). Вымогательство опаснее для общества, чем попустительство, поэтому $v_2 \leq v_3$. Сам студент при этом получает заслуженную им оценку минус некоторые моральные затраты: студент высокой квалификации в этом случае имеет выигрыш w_3 , а низкой – w_4 . Если же преподаватель коррумпирован и студент дает ему взятку, то выигрыш преподавателя равен v_4 в случае студента высокой квалификации и v_5 – в случае студента низкой квалификации. Понятно, что $v_4 \leq v_5$. Выигрыш студента высокой квалификации при этом есть w_5 , а низкой w_6 .

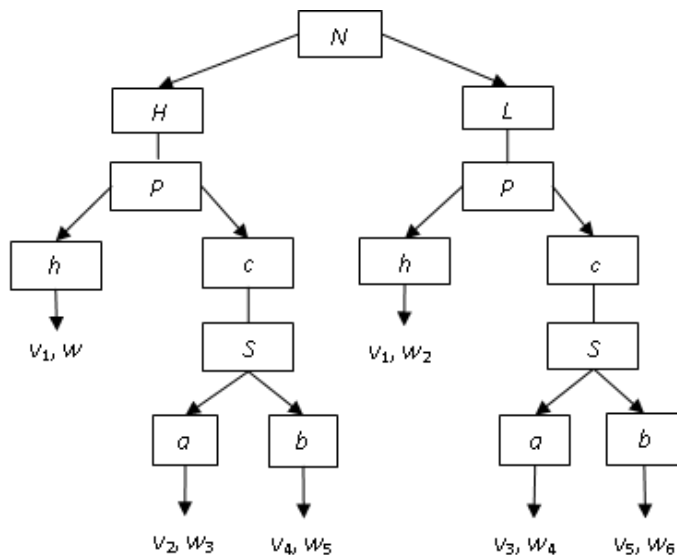


Рис. 1. Модель взаимодействия преподавателя и студента как игры в развернутой форме с совершенной информацией

Опишем данную модель в виде игры в развернутой форме с совершенной информацией [5]. Итоговые величины выигрышей и дерево игры показаны на рис. 1.

3. Метод решения

Итак, имеется конечная игра в развернутой форме с совершенной информацией (рис.1). Решение игры находится методом обратной индукции с помощью алгоритма Куна [5]. Рассмотрение начинается с анализа терминальных вершин дерева игры, для которых определены выигрыши игроков. Решение, принимаемое игроком в такой вершине, является простой задачей выбора максимального выигрыша из множества достижимых. Затем рассматриваются вершины предпоследнего уровня дерева игры и находится оптимальное решение в них. При этом, естественно, учитывается выбор, который будет сделан в терминальной вершине. Процесс повторяется до тех пор, пока не доберемся до корня дерева.

Алгоритм Куна анализа игры «преподаватель – студент» в развернутой форме (рис. 1) по значениям выигрышей субъектов управления методом обратной индукции приведем в случае студента высокой квалификации. Алгоритм состоит в следующем:

1. Студентом анализируются варианты выигрыша w_3 или w_5 на нижнем уровне принятия решения. Им выбирается стратегия (a) или (b) (та из них, которая принесет ему больший выигрыш).

2. Преподавателем проводится сравнение своих выигрышей при варианте (h) и при выборе лучшего для студента из рассмотренных в п. 1 алгоритма.

3. Лучший для преподавателя из определенных в п. 2 алгоритма вариантов и есть решение игры (совершенное по подыграм равновесие).

Основной замысел работы заключается в исследовании зависимости решения, получаемого по описанному алгоритму, от соотношения выигрышей игроков, показанных на рис. 1 в общем виде. Очевидно, выбор оптимальной стратегии зависит от данного соотношения. Непосредственная идентификация значе-

ний выигрышей по историческим данным или в результате опросов для данной предметной области по понятным причинам вызывает большие трудности. Например, анкетирование преподавателей и студентов по теме коррупции и само по себе затруднено, и достоверность ответов трудно гарантировать даже на условиях анонимности.

Поэтому далее предложена экспертная оценка зависимости выигрышей от значений параметров модели, основанная на правдоподобных соображениях. Поскольку в настоящей работе использовались оценочные данные, то числовая идентификация модели носит тестовый характер и обеспечивает разумное соотношение размерностей величин для приемлемых качественных выводов по сравнительному анализу результатов численного моделирования.

Фактически имитационное моделирование здесь выступает как специфический метод идентификации модели, позволяя рассмотреть большое значение допустимых значений параметров.

При проведении имитационных экспериментов логично учитывать следующие две возможные ситуации:

1. Велика вероятность жалобы студента на преподавателя при попытке получить от него взятку. При этом необходимо учесть два варианта: наказание за взятку значительное (например, увольнение) или незначительное (выговор, маленький штраф).

2. Малая вероятность жалобы со стороны студента и вновь два случая – сильное или слабое наказание за взятку.

Введем следующие предположения:

$$v_1 = \omega; w_1 = r_1; w_2 = r_2; v_2 = -p_1 S; v_3 = -p_2 S; v_4 = \Delta; v_5 = \alpha \Delta;$$

$$w_3 = w_1 - \beta; w_4 = w_2 - \beta; w_5 = w_1 - \gamma \Delta; w_6 = w_2 + k \alpha \Delta.$$

Здесь ω – постоянная, выражающая удовлетворение преподавателя от честно выполненной работы в бескоррупционном случае; r_1 – выигрыш студента высокой квалификации в бескоррупционном случае; r_2 – выигрыш студента низкой квалификации. Ясно, что $r_1 > r_2$.

Кроме того, p_1 – вероятность подачи в коррупционной схеме жалобы на преподавателя со стороны студента высокой квалификации, а p_2 – студента низкой квалификации; S – величина наказания за взятку; Δ – размер взятки для студента высокой квалификации, $\alpha > 1$ – масштабирующий коэффициент взятки для студента низкой квалификации, β – параметр, учитывающий моральные издержки студента при подаче жалобы на коррумпированное поведение преподавателя; k – показатель эффективности взятки для студента низкой квалификации; γ – показатель потерь студента высокой квалификации при даче взятки. Студент высокой квалификации при коррупционном поведении преподавателя в любом случае получает меньший выигрыш, чем в бескоррупционном случае.

4. Численные расчеты

Приведем несколько примеров численных расчетов в случае студентов высокой и низкой квалификации.

Пример 1 (студент высокой квалификации). Пусть $\alpha = 2$; $p_1 = 0,7$; $s = 6$ у.е.; $p_2 = 0,3$; $r_1 = 10$ у.е.; $r_2 = 0$ у.е.; $k = 0,5$. Здесь у.е. – условные единицы, выражающие выигрыши преподавателя и студента. В случае студента высокой квалификации результаты имитационных экспериментов помещены в таблицу 1. При проведении имитационных экспериментов менялись следующие входные параметры модели:

1. Величина взятки Δ изменялась от 5 у.е. до 20 у.е.
2. Параметр β , учитывающий моральные издержки студента при подаче жалобы на коррумпированное поведение преподавателя. Он менялся от 0 у.е. до 8 у.е.
3. Параметр γ – показатель потерь студента высокой квалификации при даче взятки изменялся от 0,1 до 0,5.
4. Параметр ω , выражающий удовлетворение преподавателя от честно выполненной работы в бескоррупционном случае. Он изменялся от 0 у.е. до 40 у.е.

В пятом столбце таблицы 1 показано, какую схему поведения выбирает преподаватель при указанных входных данных:

коррупционной схеме соответствует знак «+», а бескоррупционной – знак «–». Отметим, что выигрыши преподавателя и студента высокой квалификации не зависят от изменения вероятности подачи жалобы на коррупционное поведение преподавателя со стороны студента p_1 и от величины наказания за взятку S . Если преподаватель считает, что в случае вымогательства взятки от студента высокой квалификации тому будет выгодно подать на него жалобу и преподавателя накажут, то он отказывается от коррупционной схемы поведения и ведет себя честно.

Таблица 1. Результаты анализа выигрышей преподавателя и студента высокой квалификации

Δ	β	γ	ω	Коррупция	Выигрыш (у.е.)	
					Преподаватель	Студент
5	3	0,3	1	+	5	8,5
5	3	0,3	5	+	5	8,5
10	3	0,3	3	+	10	7
15	3	0,3	3	–	3	10
1	3	0,3	3	–	3	10
20	3	0,3	3	–	3	10
7	3	0,3	3	+	7	7,9
10	1	0,3	3	–	3	10
10	2	0,1	3	+	10	9
10	2	0,5	3	–	3	10
10	0	0,3	3	–	3	10
10	4	0,3	3	+	10	7
10	0	0,1	3	–	3	10
15	3	0,3	0	–	0	10
10	0	0,3	0	–	0	10
10	2	0,1	11	+	11	10
7	3	0,3	10	–	10	10

Пример 2 (студент низкой квалификации). Расчеты проводились для входных данных примера 1. Варьировались величины Δ , β , γ и ω . Результаты имитационных экспериментов с эти-

ми входными данными в случае студента низкой квалификации помещены в таблицу 2.

Таблица 2. Результаты анализа выигрышей преподавателя и студента низкой квалификации

Δ	β	γ	ω	Коррупция	Выигрыш (у.е.)	
					Преподаватель	Студент
5	3	0,3	1	+	10	5
5	3	0,3	5	+	10	5
10	3	0,3	3	+	20	10
15	3	0,3	3	+	30	15
1	3	0,3	3	—	3	0
20	3	0,3	3	+	40	20
7	3	0,3	3	+	14	7
10	1	0,3	3	+	20	10
10	2	0,1	3	+	20	10
10	2	0,5	3	+	20	10
10	0	0,3	3	+	20	10
10	8	0,3	3	+	20	10
10	0	0,1	3	+	20	10
15	3	0,3	0	+	30	15
15	3	0,3	40	—	40	0
10	2	0,1	30	—	30	0
20	3	0,3	40	—	40	0

В этом случае, как и в примере 1, выигрыши преподавателя и студента низкой квалификации не зависят от изменения вероятности подачи жалобы со стороны студента p_2 и от величины наказания за взятку S . Если преподаватель считает, что в случае попустительства, студенту низкой квалификации будет выгодно подать на него жалобу, то он отказывается от коррупционной схемы поведения.

5. Заключение

Предложена и в игровой постановке исследована модель взаимодействия преподавателя и студента с учетом возможной коррумпированности преподавателя. Модель представляется конечной игрой двух лиц в развернутой форме с совершенной информацией. Алгоритм исследования модели основан на методе обратной индукции (алгоритме Куна). Проведено имитационное моделирование по значениям выигрышей субъектов управления, выраженных через параметры модели. На основе анализа результатов проведенных имитационных экспериментов в случае студента высокой и низкой квалификации сделаны следующие выводы.

1. Так как преподавателю известны возможные выигрыши студента, то он путём обратной индукции может предугадать его действия, а именно, определить, будет ли студент подавать на него жалобу в случае выбора коррупционной схемы поведения. Как следствие, преподаватель может избежать наказания за взятки, отказавшись от коррупционной схемы поведения, если это наказание достаточно велико.

2. Если величина взятки мала по сравнению с наказанием и выигрышем в бескоррупционном случае, то преподаватель отказывается от коррупционной схемы поведения. Аналогично, если величина взятки будет чересчур высокой для студента (ему невыгодно ее давать и выгоднее подать жалобу на коррупционное поведение преподавателя), то преподаватель также выбирает бескоррупционный вариант своего поведения. В случае студента высокой квалификации минимальный размер взятки, которую преподаватель готов принять, выше, чем для студента низкой квалификации. Это связано с тем, что вероятность подачи жалобы на коррупционное поведение преподавателя со стороны студента высокой квалификации выше, чем со стороны студента низкой квалификации и, как следствие, наказание существеннее.

3. Максимальный размер взятки, которую студент высокой квалификации готов дать преподавателю, существенно ниже, чем максимальный размер взятки, предлагаемый преподавателю

студентом низкой квалификации. Если взятка будет слишком велика, то студенту станет невыгодно ее давать, а будет выгоднее написать жалобу на коррупционное поведение преподавателя. Поэтому в случае большой величины взятки преподаватель выбирает бескоррупционную схему поведения.

4. Очевидно, что если при данных значениях выигрышей студент имеет высокую квалификацию, то преподавателю в большинстве случаев выгодна честность, а если низкую, то наоборот, для преподавателя в большинстве случаев выгодна коррупционная форма поведения. Для студента высокой квалификации при любых входных данных невыгодна коррупционная схема поведения преподавателя. В этом случае при ряде входных данных ему выгоднее дать взятку преподавателю, чем жаловаться на него. Но в любом случае его выигрыш не увеличивается по сравнению с бескоррупционным случаем. Для студента низкой квалификации, наоборот, коррупционная схема поведения преподавателя в большинстве случаев более выгодна, чем бескоррупционная. Давая взятку, он получает больший выигрыш, чем в бескоррупционном случае.

5. Если моральные затраты студента высокой квалификации при подаче жалобы на коррупционное поведение преподавателя малы, то преподаватель понимает, что при вымогательстве взятки на него будет подана жалоба и его накажут. В результате преподавателю выгодно оставаться честным, отказываясь от вымогательства взятки. Повышение моральных затрат студента при подаче жалобы на коррупционное поведение преподавателя приводит к коррупции, как в случае студента низкой, так и высокой квалификаций. В случае студента низкой квалификации понижение его моральных затрат при подаче им жалобы на коррупционное поведение преподавателя не приводит к бескоррупционной схеме проведения экзамена. Студенту низкой квалификации и в этом случае выгодно дать взятку и, в результате, получить больший выигрыш, чем при подаче жалобы на преподавателя. К экзамену студент не готов, поэтому при отказе от дачи взятки ему придется идти на пересдачу. Преподаватель путём обратной индукции

предугадывает действия студента низкой квалификации и выбирает коррупционную схему поведения.

6. Значительное увеличение величины удовлетворения преподавателя от честно выполненной работы в бескоррупционном случае (его выигрыша в бескоррупционном случае) приводит к его отказу от взяток. Причем в случае студента низкой квалификации величина выигрыша преподавателя в бескоррупционном случае, при которой он отказывается от взяток, в 4–6 раз выше, чем в случае студента высокой квалификации.

Для успешной борьбы с коррупцией в модели взаимоотношений преподавателя и студента необходимо учитывать сделанные выше выводы. Преподаватель сам устанавливает размер взятки за успешную сдачу экзамена, поэтому при отсутствии продуманной политики борьбы со взятками ему всегда будет выгодно коррупционная схема поведения (первый и третий выводы). Успешно бороться со взяточничеством можно, комбинируя три фактора, которыми управляют вышестоящие субъекты управления (руководство ВУЗа, административные органы управления): величину моральных издержек студента при подаче им жалобы на коррупционное поведение преподавателя, размер наказания преподавателя за взятку и выигрыш преподавателя в бескоррупционном случае (выводы 2, 4–6).

В случае студентов высокой квалификации одного снижения их моральных затрат при подаче жалоб на коррупционное поведение преподавателя достаточно для искоренения коррупции в системе «преподаватель – студент». В случае студента низкой квалификации искоренить коррупцию сложнее. Такой студент всегда будет заинтересован в даче взятки, если только ее размер не будет уж совсем большим (но величиной взятки управляет сам преподаватель!). Здесь необходим комплексный подход, предполагающий значительное увеличение размера наказания преподавателя за взятку, а также его выигрыша в бескоррупционном случае и повышение вероятности обнаружения факта взятки путем усиления административного контроля за преподавателем.

Имитационное моделирование представляется перспективным методом исследования теоретико-игровых моделей. В настоящей статье этот метод использован для анализа зависимости решения игры от параметров модели. Однако для более сложных динамических игр имитация может применяться как численный метод получения решения в целом.

Литература

1. ВАСИН А.А., КАРТУНОВА П.А., УРАЗОВ А.С. *Модели организации государственных инспекций и борьбы с коррупцией* // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, №4. – С. 67–89.
2. ВАСИН А.А., НИКОЛАЕВ П.В., УРАЗОВ А.С. *Механизмы подавления коррупции* // Журнал новой экономической ассоциации. – 2011. – №10. – С. 10–30.
3. ГОРБАНЕВА О.И., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Модели коррупции в иерархических системах управления* // Проблемы управления. – 2015. – №1. – С. 2–10.
4. ЛЕВИН М.И., ЛЕВИНА Е.А., ПОКАТОВИЧ Е.В. *Лекции по экономике коррупции*. – М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2011. – 360 с.
5. МАЗАЛОВ В.В. *Математическая теория игр и приложения*. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
6. МАЛЬСАГОВ М.Х. *Модель коррупции как игра в развернутой форме* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №4. – URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5381>.
7. МИХАЙЛОВ А.П., ЛАНКИН Д.Ф. *Моделирование оптимальных стратегий ограничения коррупции* // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, №12. – С. 115–124.
8. САВВАТЕЕВ А.В. *Оптимальные стратегии подавления коррупции* // Экономика и математические методы. – 2003. – Т. 39, Вып. 1. – С. 62–75.
9. HINDRIKS J., KEEN M., MUTHOO A. *Corruption, extortion and evasion* // J. of Public Econ. – 1999. – No. 74(3). – P. 395–430.

10. *International Handbook on the Economics of Corruption* / Ed.: S. Rose-Ackerman. – Cheltenham, UK; Northampton, USA: Edward Elgar, 2006. – 656 p.
11. LAMBERT-MOGILIANSKY A., MAJUMDAR M., RADNER R. *Strategic analysis of petty corruption: Entrepreneurs and bureaucrats* // J. of Development Economics. – 2007. – Vol. 83. – P. 351–367.
12. ROSE-ACKERMAN S. *The economics of corruption* // J. of Public Economics. – 1975. – No. 4. – P. 187–203.

DYNAMIC MODEL OF EVALUATION WITH CORRUPTION

Mukharbeck Malsagov, Ingush State University, Nazran, Cand. Sc., Associate Professor (mmm1956@bk.ru).

Guennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Sc., Professor (ougoln@mail.ru).

Anatoly Usov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Sc., Professor (tol151968@yandex.ru).

Abstract: A model of interaction between a professor and a student with possible corruption is studied in the game-theoretic setting. The model is formalized as a two-person game in extended form with perfect information. It is assumed that students have high or low qualification only. At the same time, corruption will manifest itself in the form of capture in the case of a low qualified student and in the form of extortion for students with high qualification. The decision is made by the method of backward induction using the Kuhn algorithm for analyzing the game in an extended form. This algorithm is based on analysis of the values of payoffs of the control subjects by the method of backward induction. An algorithm for constructing the solution is given. Simulation modeling is carried out based on the values of the payoffs of the control subjects. The results of numerical experiments are presented and analyzed. The meaningful conclusions are made on the base of the analysis of the results of simulation experiments in the case of a student of high and low qualification. The main conclusion is as follows. In the case of highly qualified students, one reduction in their moral costs when filing complaints about corrupt behavior of a professor is enough to eliminate corruption in a professor – student system. In the case of a low qualified student, it is more difficult to eradicate corruption. This requires a comprehensive approach that involves a significant increase in the amount of the professor's punishment for a bribe, as well as his payoffs in a non-corrupt case, and increasing the probability of detecting the fact of a bribe

by strengthening administrative control over a professor.

Keywords: computer simulation, corruption, dynamic games with complete information.

УДК 512.8

ББК 22.14+22.19я73

DOI: 10.25728/ubs.2020.87.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко.*

Поступила в редакцию 21.04.2020.

Опубликована 30.09.2020.

ВВЕДЕНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИСТОГРАММНОГО КОЭФФИЦИЕНТА КАК ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ЯВЛЕНИЯ СВЕРХДОВЕРИЯ В СРЕДЕ ЭКСПЕРТОВ

Калмыков Н. С.^{1а}, Сидельников Ю. В.^{2а,б}

*(^а ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

(^б Московский авиационный институт, Москва)

Введен гистограммный коэффициент, который является интегральной оценкой степени уверенности экспертов в своих оценках. При этом, ими оцениваются тестовые вопросы, представленные в виде задачи. Предложены экспериментальные исследования тестовых вопросов на основе этого коэффициента в качестве инструмента изучения явления сверхдоверия среди экспертов. Предложена и обоснована гипотеза о взаимосвязи между степенью уверенности эксперта в своей оценке и апостериорной оценкой его точности. Для данного исследования были использованы существующие тестовые вопросы и массив оценок, описанные ранее в монографии одного из авторов. Выявлены факторы, от которых зависит корректность выводов настоящего экспериментального исследования. Даны пояснения описания факторов, от которых зависит корректность выводов, полученных в этих исследованиях. Введены требования к форме и виду тестовых вопросов. Также, предложены и экспериментально обоснованы гипотезы, характеризующие динамику изменений значений гистограммного коэффициента, от размера выборки и подтверждения их состоятельность. Проведено исследование динамики интегральной оценки уверенности экспертов в своих оценках. Выявлены факторы, от которых зависят сами выводы экспериментальных исследований. Показано, что гистограммный коэффициент является не только интегральной оценкой степени уверенности экспертов в своих оценках, но и аналогом любого дискретного показателя ошибки конкретного эксперта при оценке им отдельного вопроса.

Ключевые слова: экспертные оценки, тестовый вопрос, гистограммный коэффициент.

¹ Никита Сергеевич Калмыков, м.н.с. (kalmikov-nik@bk.ru).

² Юрий Валентинович Сидельников, д.т.н., г.н.с. (sidelnikovy@mail.ru).

1. Введение

Обычно теоретические исследования, тематически связанные с повышением точности экспертных оценок, идут по двум основным направлениям. В рамках первого предлагаются новые экспертные методы или технологии [14, 26], в рамках второго (гораздо реже) проводятся экспериментальные тестовые исследования различных видов экспертных оценок и их точности [13, 19]. В российской научной литературе чрезвычайно мало экспериментальных исследования эффекта сверхдоверия, который заключается в том, что степень уверенности эксперта в своей оценке часто бывает чрезмерной [12, с. 140–141]. И нет экспериментальных исследований, связанных с интегральной оценкой степени уверенности экспертов в своих оценках самого тестового вопроса в качестве задачи. А это будет чрезвычайно полезно в случае, если подтвердить следующую **гипотезу №1**: «Существует взаимосвязь между степенью уверенности эксперта в своей оценке и апостериорной оценкой его точности».

По сути, такая гипотеза, и не только в психологии, рассматривается давно. Но в качестве темы исследования «каково соотношение степени уверенности экспертов и его точности» она пока не получила своего окончательного решения.

Подобные исследования проводились Марком Альпертом и Ховардом Раиффа, но они акцентировали внимание на принятии решений ЛПР в условиях неопределенности [1, с. 337–350]. При этом использовалось 10 тестовых вопросов для изучения эффекта. Например: «Количество иностранных автомобилей, импортируемых в США в 1967 году, выраженное в тысячах» или «Пошлина, собранная на Панамском канале в 1967 году, выраженное в миллионах долларов». Именно эффект сверхдоверия был продемонстрирован в этих тестовых экспериментальных исследованиях. Так, среди 1000 построенных экспертами 98-процентных доверительных интервалов лишь 574 содержали истинное значение оцененного параметра. Аналогичный результат, но уже для гистограммных оценок, был получен одним из авторов данной статьи [12, с. 140–141].

Обычно в таких исследованиях используются тестовые вопросы. Так, например, Стюарт Оскамп еще в 1965 году в журна-

ле «The Journal of Consulting Psychology» опубликовал обзор таких исследований под общим названием «Чрезмерная уверенность в суждениях, основанная на конкретных примерах» [35, с. 261–265]. Среди авторов, оценивающих «степень уверенности экспертов в своих оценках тестового вопроса», Даниэль Канеман (Daniel Kahneman) – лауреат Нобелевской премии по экономике 2002 года «за применение психологической методики в экономической науке, в особенности – при исследовании формирования суждений и принятия решений в условиях неопределённости» (совместно с В. Смитом). Детально это описано, например, в монографии [10, с. 327].

И на сегодняшний день данная тема является актуальной. К примеру, в статье 2020 года авторов А. Боннаркоси, Р. Апреда, Г. Фантони [27] описаны предубеждения и их влияние на экспертные оценки, а также предложен ряд мер, позволяющих снизить уровень влияния экспертных предубеждений в области технологического прогнозирования.

Цель экспериментального исследования: введение и экспериментальное исследование гистограммного коэффициента как инструмента для изучения явления сверх доверия.

Данную цель можно декомпозировать на нижеследующую совокупность задач:

1. Пояснить или определить основные понятия, используемые в исследовании.
2. Использовать для исследования и анализа, существующие тестовые вопросы и массив экспертных оценок, описанные в монографии [13].
3. Выявить факторы, от которых зависит корректность выводов, базирующихся на экспериментальных исследованиях, в рамках нашей тематики.
4. Разработать и предложить требования к вопросам специального типа как тестовым задачам для участников.
5. Предложить и обосновать гипотезы, характеризующие динамику изменений значений гистограммного коэффициента.
6. Исследовать, на основе введенного коэффициента, интегральную оценку степени уверенности экспертов в своих оценках.

7. Обозначить дальнейшие исследования по рассматриваемой теме.

2. Пояснения или определения основных понятий, используемых в исследовании

Среди понятий, которые необходимо пояснить рассмотрим следующие понятия:

1. Вопрос. 2. Корректный вопрос. 3. Тестовый корректный вопрос. 4. Объективная сложность задачи, сформулированной в виде тестового корректного вопроса.

Поясним или определим при необходимости каждое понятие из этого списка. Понятие вопроса является ключевым в данном исследовании. В упрощенном варианте «под вопросом понимают мысль о желании восполнить свои знания недостающей информацией» [7, с. 47]. Возможно, приведенная трактовка понятия «вопрос» не является лучшим вариантом. Но, по крайней мере, она не противоречит нашему **Постулату № 1** о том, что не каждый вопрос является задачей и не каждую задачу можно без потерь переформулировать в виде вопроса.

Поясним этот постулат. Рассмотрим следующий вопрос: «Сколько весит круглый квадрат?». На наш взгляд, такой вопрос не является задачей. Кроме того, любой риторический вопрос по определению не подразумевает ответ и в этом смысле также не является задачей. Ранее трактовки понятия вопроса и понятия задачи были близки. Например, рассмотрим нижеследующие трактовки понятия «задача», взятые из широко известных источников середины прошлого века:

- «Вопрос, требующий разрешения, то, что задано для решения, разрешения» [18]
- «Вопрос, требующий решения на основании определённых знаний и размышления [5].

В настоящее время ситуация изменилась. В рамках формального подхода к трактовке понятия вопросов можно обратиться к мнению д.ф.н. Бориса Ивановича Федорова: «существуют различные подходы к построению формальных систем эротетической логики и, соответственно, к трактовке понятия вопросов среди логиков. Условно эти направления можно обо-

значить в зависимости от того, каким образом разные авторы рассматривают сам вопрос в качестве самостоятельного познавательного средства.

1. Одни отождествляют вопросы с особым рода суждениями или с классом особого рода суждений, к примеру, это описано у Д. Харра [32]. Данное направление польский логик Т. Кубиньский справедливо назвал «логикой вопросов без вопросов» [34].

2. Другие считают вопросы эпистемологическими требованиями.

3. Третьи признают вопросами правильно построенные формулы некоторого формализованного языка, содержащего вопросные операторы.

4. Представители четвертого направления усматривают возможность развития логики вопросов в рамках некоторой лингвистической теории» [21].

Необходимо обратить внимание читателей, что в любом из рассматриваемых направлений нет отсылки на понятие задачи.

Второе из списка понятий – «корректный вопрос». Подход к пояснению понятия корректный вопрос основан на такой неклассической логике, как эротетическая (интеррогативная). Точнее, по мнению Виктора Финна и Владимира Смирнова, «существует два подхода к построению формальной теории вопросов, которые можно весьма условно назвать лингвистическим и компьютерным. Согласно первому подходу материалом для уточнения вопросов, т.е. для построения их формальных имитаций, служат реально существующие вопросы естественного языка с произвольной, неспециализированной семантикой. В рамках этого подхода строится перевод вопроса на формальный язык, в котором изучается соответствующий этому вопросу интеррогатив, если он, разумеется, существует, т.е. если ответ на него может быть точно описан» [3, с. 6]. Именно в рамках такой логики и лингвистического подхода к ней мы будем рассматривать понятие «корректный вопрос». Сама логика вопросов и ответов зародилась в конце девятнадцатого века. Возможно, одним из первых авторов по данной теме был Ричард Уэйтли [38]. В середине тридцатых годов XX века в мировом научном сообществе возникла новая волна интереса и соответствующие работы. Среди первых авторов на этом этапе был польский ло-

гик Казимир Айдукевич [24]. В этот же период в развитии эротической логики принимал участие также Евгений Сперэнция [37]. В пятидесятых годах прошлого века вышла одна из ключевых работ по данной теме – исследование Артура и Мэри Прайор [36], а также работы Чарльза Хемблина [31] и Тадеуша Кубиньского [34]. Среди работ шестидесятых годов прошлого века необходимо упомянуть статью Дэвида Харра [32], а также финского учёного Яакко Хинтиikka (1962 г.) применившего эпистемическую логику для исследования вопросов [33]. А среди работ семидесятых годов прошлого века необходимо выделить монографию Нуэля Белнапа и Томаса Стила [28], переведённую на русский язык [3]. Среди современных зарубежных работ можно отметить исследование Анджея Вишневого [39] и Роберта Ауманна [25]. В отечественной литературе нам известны работы Владимира Беркова [4, 5], Евгения Войшвилло и Юрия Петрова [8], а также работы Бориса Федорова [20, 21]. По мнению Нуэля Белнапа и Томаса Стила: «Предлагая экспликацию понятия точного вопроса и исследуя до конца его природу, мы тем самым значительно углубляем свое представление о том, что делает неточные вопросы неточными и что нужно для их превращения в точные вопросы» [3, с. 23]. Конечно, не любой вопрос, выраженный в естественном языке, можно уточнить с помощью формальной теории вопросов. По мнению В.А. Смирнова и В.К. Финна, авторов предисловия к монографии [3], «от формальной теории вопросов нельзя требовать того, чего она не в состоянии дать, – уточнений любого вопроса, выраженного в естественном языке».

Третье понятие из списка, которое мы поясним, это «тестовый вопрос». Понятно, что не каждый вопрос может быть тестовым. В следующем разделе данной статьи мы сформулируем требования к вопросам как тестовым задачам для участников.

Поясняя четвертое сложное понятие, данное в виде высказывания «объективная сложность задачи, сформулированной в виде вопроса», необходимо сначала пояснить ряд понятий входящих в состав этого высказывания, а затем для ключевого понятия дать его формальную трактовку. В рамках данного исследования мы рассматриваем лишь понятие «сложность задачи

оценивания». В работах одного из авторов данной статьи были формально введены понятия уровней сложности для экспертных задач оценивания [15]. В данном исследовании мы рассматриваем задачи лишь второго или третьего уровня сложности, представленные в виде вопроса. Кратко поясним условия для определения уровня сложности оценочной задачи лишь для указанных уровней.

Так, для задач второго уровня сложности:

1. Способ решения неизвестен, но варианты решений можно вычлениить.

2. Задачу можно решить исходя из текущих представлений о рассматриваемом объекте большинства представителей научного сообщества, базирующихся на уже имеющихся парадигмальных основаниях.

3. Полный перебор вариантов решения задачи возможен.

Для задач третьего уровня сложности первые два условия совпадают со вторыми, а третье формулируется следующим образом: полный перебор вариантов невозможен или варианты решений невозможно вычлениить.

3. Факторы, от которых зависит корректность выводов экспериментальных исследований в рамках нашей тематики

Прежде чем формулировать постулаты, гипотезы и соответствующие выводы на основе экспериментальных исследований, рассмотрим вышеуказанные факторы.

ПОСТУЛАТ № 2. В рамках экспериментальных исследований мы полагаем, что существуют следующие факторы, от которых зависит корректность выводов, полученных в этих исследованиях:

1. Форма и вид тестовых вопросов как задач для участников и инструкция по проставлению оценок экспертам.

2. Вид (форма) оценки, которые дает эксперт.

3. Вид коэффициентов, которые используются для анализа и обработки экспертных оценок.

4. Совокупность вопросов как единого целого для тестовых задач для участников и их общее число.

5. Массив испытуемых.

6. Массив данных, полученных по результатам опроса испытуемых.

Кроме того, чтобы повысить уровень правдоподобности полученных выводов, необходимо:

- разработать и предложить условия, определяющие требования к форме и виду тестовых вопросов;
- варьировать вышеуказанные факторы, например: вид коэффициента с тем, чтобы сопоставлять полученные результаты.

Кратко поясним эти факторы, и при необходимости детально рассмотрим некоторые из них.

I. Первый в списке факторов: «Форма и вид тестовых вопросов как задач для участников и инструкция по проставлению оценок экспертам».

Введем требования к форме и виду тестовых вопросов.

Полагаем, что при конструировании тестовых вопросов, должны учитываться следующие требования и условия к их форме и виду:

1. Это не просто вопрос, а задача, сформулированная в виде вопроса.

2. Наличие лишь одного истинного значения ответа на вопрос. (Не только числовое).

3. Вопрос должен быть осмыслен.

4. Вопрос может быть обращен к участнику только как к эксперту¹, а не как к респонденту. Причина заключается в том, что мы выявляем у опрашиваемого профессиональные знания, а не его личную позицию или мнение. Именно это может дать возможность обеспечить межэкспертную воспроизводимость.

5. Вопрос должен быть сформулирован таким образом, чтобы избежать когнитивных искажений. Например, вопрос не должен быть связан с оценкой вероятности редких событий или явлений, дабы избежать так называемых «ловушек сверхдоверия» [10, с. 328–329].

¹ Мы рассматриваем трактовку понятия эксперта на основе статьи одного из авторов [16].

6. Вопрос должен быть корректным. Понятие корректного вопроса рассматривалось выше, а также исследовалось ранее в статье [17].

7. Мы рассматриваем лишь такие тестовые вопросы, которые являются задачами второго или третьего уровня сложности [15].

Кроме того, для пояснения этого первого фактора желательно обратиться к постулату № 1.

Инструкция для экспертов по проставлению оценок была разработана одним из авторов и использована в статье [12].

Поясним в качестве некоторых требований следующие факторы, от которых зависит корректность выводов, полученных в этих исследованиях.

Для пояснения второго требования из списка при описании постулата № 2: «Вид (форма) оценки, которые дает эксперт» необходимо напомнить, что участники, отвечая на тестовый вопрос, дают одновременно две качественно различные по форме оценки истинного значения, указанного в вопросе параметра: точечную (числовую) и гистограммную.

Выбор гистограммных оценок обусловлен тем, что такие виды экспертных оценок пока слабо изучены по сравнению с оценками первого рода, но используются все чаще и в ряде ситуаций доказали свою полезность. Это было показано в работах Ю.В. Киселева [11], Ю.И. Алимова [2] и одного из авторов данной статьи [13].

Именно сопоставление по качественно различным по форме видам экспертных оценок может обеспечить корректность выводов, полученных в этих исследованиях.

Напомним читателям понятие гистограммной оценки как один из видов графического представления экспериментальных данных. В данном исследовании гистограмма строится следующим образом. «Весь диапазон наблюдаемых значений $X_1, X_2, \dots, X_n$ некоторой случайной величины X делится на k интервалов группировки (обычно равных) точками $x_1, \dots, x_{k+1}$; подсчитывается число наблюдений m_i , приходящихся на интервал $[x_i, x_{i+1})$ и определяется частота $h_i = m_i/n$. На оси абсцисс отмечаются точки $x_1, \dots, x_{k+1}$, и отрезки x_i, x_{i+1} , $i = 1, \dots, k$, принима-

ются за основания прямоугольников с высотами, равными $h_i / (x_{i+1} - x_i)$ ». [23, с. 1012].

Поясним третье требование из списка при описании постулата №1: «Вид коэффициентов, которые используются для анализа и обработки экспертных оценок». Для того чтобы уменьшить потенциальную возможность зависимости рассматриваемого вывода от вида коэффициентов, необходимо ввести и в дальнейшем апробировать два качественно различных коэффициента, характеризующих сложность j -го вопроса как тестовой задачи для участников. В случае если результат не будет зависеть от вида двух качественно различных коэффициентов или будет зависеть, но незначительно, вывод будет более правдоподобен.

Следующим образом введем первый коэффициент $KH^j(N^j, N^j)$, который является интегральной оценкой степени уверенности экспертов в своих оценках j -го тестового вопроса, рассмотренного в качестве задачи. При расчете данного гистограммного коэффициента мы используем информацию, полученную от участников, давших гистограммные оценки. Для пояснения рассмотрим выписку из «Инструкции для проставления оценок» [16, с. 308]. Эта оценка проставляется экспертом следующим образом: «Отмечается четкими вертикальными штрихами отрезок шкалы, в который, по Вашему мнению, практически со стопроцентной уверенностью попадает оцениваемая величина (в качестве левого и правого конца отрезка используются числа, фигурирующие под линией шкалы). Распределяются 100% Вашей уверенности между линиями шкалы, попавшими в этот отрезок. Полученные числа пишутся над соответствующими делениями (в итоге более вероятному делению приписывается относительно большая доля и т.д.)».

Коэффициент представлен как функция следующим образом:

$$KH^j(N^j, N^j) = [1 - (N^j / N^j)] 100\%,$$

где

N^j – количество тех участников, ответивших на j -й вопрос, у которых точечная оценка истинного значения тестового вопроса принадлежит гистограммному отрезку, как части оси абс-

цисс X , при построении гистограммной оценки этими участниками. (Пояснить трактовку гистограммного отрезка можно как объединение всех непустых равных интервалов группировки);

N^j – общее число участников ответивших на j -й вопрос, $j = 1, 2, \dots, K$, K – общее число вопросов.

Так как значение параметра N^j может изменяться от 0 до N^j , то область значения коэффициента $KH^j(N^j, N^j)$ как функции принимает значения в отрезке от 0 до 1, а в процентах – от 0 до 100. Кроме того, если $N^j = N^j$, а это означает, что все оценки истинного значения тестового вопроса принадлежат гистограммному отрезку, то $KH^j(N^j) = 0$.

Таким образом, полагаем, что чем ближе значение коэффициента $KH^j(N^j, N^j)$ к нулю, тем точнее усредненная экспертная оценка j -го вопроса, определяемая с помощью этого коэффициента. По сути, этот коэффициент является аналогом любого дискретного показателя ошибки конкретного эксперта при оценке им отдельного вопроса. Для дискретных показателей ошибки при совпадении истинного значения искомого параметра и его оценки экспертом мы всегда имеем нулевое значение этого показателя.

Полагаем, что нам необходимо выяснить устойчивость полученных выводов, базирующихся на результатах расчетов по этим коэффициентам, относительно числа опрашиваемых участников.

Устойчивость полученных выводов, базирующихся на результатах расчетов по качественно различным коэффициентам, относительно числа опрашиваемых участников мы далее проверим экспериментально.

В данном исследовании мы уйдем от использования статистического аппарата, так как здесь он при оценке минимально необходимого количества участников будет содержать слабо обоснованные допущения. Вместо него мы предложим и используем следующий прием:

Рассмотрим для каждого j -го вопроса упорядоченную совокупность из m случайных выборок $\{N^j_1, N^j_2, \dots, N^j_m\}$. При этом $N^j_1, N^j_2, \dots, N^j_m$ – объемы выборок (число ответов) на j -й во-

прос из общего числа N^j участников, где $N^{j_1} < N^{j_2} < \dots < N^{j_m} < N^j$, $i = 1, 2, \dots, m_j$; $j = 1, 2, \dots, K$; K – общее число вопросов.

В дальнейшем, рассчитаем значения гистограммного коэффициента $KH^j(N^{j_i}, N^j)$ по каждой выборке.

Поясним четвертое требование из списка при описании постулата №1: «Совокупность вопросов как единое целое для тестовых задач для участников и их общее число».

Исходным эмпирическим материалом для последующего анализа служит массив оценок, полученных в качестве ответов на 9 различных, независимых по своему содержанию следующих тестовых вопросов.

В данном исследовании мы предлагали экспертам следующие тестовые вопросы с заведомо известными нам истинными значениями ответов:

1. Какое количество времени электропоезд метрополитена в Москве затрачивал на проезд по кольцу (в минутах) в 1979 году?

2. Сколько вагонов в составе электропоезда метрополитена в Москве на линии Беляево – Медведково было в 1979 году?

3. Каким было население Африки в 1975 году (в миллионах)?

4. Какова была в Москве доля мужчин (в процентном соотношении) в 1970 г.?

5. Каким было население Филиппин в 1970 году?

6. Продолжительность жизни Н.Г. Чернышевского (в годах)?

7. Какое количество времени электропоезд метрополитена в Москве затрачивал на проезд от станции Киевская до станции Щелковская (в минутах) в 1979 году?

8. Какова длина корпуса люминесцентных ламп в вашей рабочей комнате (в см.)?

9. Сколько граммов весит предложенная вам для оценки деревянная вазочка?

Возможно, для некоторых читателей такие тестовые вопросы и их использование необычны, и им непонятно, что могут выяснить подобного рода вопросы к экспертам.

Поясним это. Примеров использования тестовых вопросов, обращенных не к респондентам или исследователям, а именно к экспертам, немало в зарубежной научной литературе. Среди

них, например, статьи авторов дельфийской процедуры и её разновидностей «Дельфи II» Брайана Бернеса Брауна, Сэмюэля Кохрана и Нормана Делки из корпорации RAND [29]. А также такие известные ученые как Д. Канеман, П. Словик, А. Тверски и А. [10]. Подобные тестовые вопросы экспертам помогают исследователям выяснить, какая из методик лучше и в каком случае. Так, в вышеуказанной статье проводится экспериментальное сопоставление методик Делфи и Делфи II на основе тестовых вопросов. Аналогично в статье Дэвида Форда из Принстонского Университета при сопоставлении своей методики и Делфи II [30].

Как уже было сказано в начале нашей статьи, таких работ в СССР и России мало. Кроме тех, на которые мы уже ссылались, можно добавить исследование и обзор научного сотрудника ИПУ РАН М.В. Шнейдермана в журнале «Автоматика и телемеханика» за 1988 год. [22]. Как указывает М. Шнейдерман: «Прежде всего, отметим, что ниже рассматриваются специальным образом поставленные эксперименты, предпринятые для изучения определенного вопроса с учетом требований «чистоты» эксперимента. Дело в том, что имеются десятки работ, в которых экспериментально опробуется какая-то процедура, не отвечающих этой формулировке. В специальных экспериментах обычно испытуемым-экспертам предъявляется серия тестовых вопросов, ответы на которые исследователь заранее знает. Основным критерием качества процедур служит точность оценок экспертов – их близость к истинным значениям. Кроме того, учитываются степень субъективной уверенности экспертов в своих ответах, затраты времени на реализацию процедуры, трудоемкость ее проведения для экспертов и исследователя, оценка самими экспертами качества процедур».

Для подробного пояснения пятого и шестого требования из списка при описании постулата №1: «Массив испытуемых и массив данных, полученных по результатам опроса испытуемых», необходимо обратиться к монографии одного из авторов [13, с. 206], где описывается большая часть этих экспериментальных данных. В рамках данного экспериментального исследования были использованы оценки

ста сорока шести участников, а общее число оценок как ответов от опрашиваемых участников – 2146 (1073 гистограммных и столько же точечных оценок).

Опрос проводился в 10 различных организациях Москвы (в четырех научно-исследовательских институтах и в шести высших учебных заведениях). Это позволило разнообразить состав опрашиваемых. В частности, он включал экономистов, инженеров, математиков, физиков, историков, философов, психологов.

4. Гипотезы, характеризующие динамику изменений значений гистограммного коэффициента

Рассмотрим четыре гипотезы, характеризующие динамику изменения значений гистограммного коэффициента $KH^j(N^j, N^j)$ в зависимости от изменения объемов выборок из N^j выбранных случайным образом ответов экспертов, где $i = 1, 2, \dots, m^j$, m^j – количество выборок для j вопроса, а $N^j_i < N^j$, i – номер выборки.

Гипотеза №1. Полагаем, что для любого j -го тестового вопроса найдутся такое количество участников опроса K_1 и значения $N^{j_{i1}}$ объема выборок, что при расчете гистограммного коэффициента по выборкам N^j_i значение $\min KH^j_i(N^j, N^j)$ как функции будет монотонно возрастать с увеличением объема этих выборок, начиная со значения $N^{j_{i1}}$, и стремиться к значению KH^j для всей совокупности для j вопроса.

Гипотеза №2. Полагаем, что для любого j -го тестового вопроса найдутся такое количество участников тестового опроса K_2 и значения $N^{j_{i2}}$ объемов выборок, что при расчете гистограммного коэффициента по выборкам N^j_i значение $\max KH^j_i(N^j, N^j)$ как функции будет монотонно убывать с увеличением объема этих выборок, начиная со значения $N^{j_{i2}}$, и стремиться к значению KH^j для всей совокупности для j вопроса.

Гипотеза №3. Полагаем, что для любого j -го тестового вопроса найдутся такое количество участников тестового опроса K_3 и такое значение $N^{j_{i3}}$ объема выборок, что диапазон разброса значений гистограммного коэффициента $[\min KH^j_i(N^j, N^j),$

$\max KH^j_i(N^j, N^j)$] как функции будет строго монотонно убывать с увеличением объема i -й выборки, начиная со значения N^j_{13} , а в предельном случае – стремиться к нулю для всей совокупности для j вопроса.

Гипотеза №4. Полагаем, что для любого j -го тестового вопроса найдется такое количество участников тестового опроса K_4 , что медиана ряда значений коэффициента $KH^j_i(N^j, N^j)$ с увеличением объема этой выборки будет хаотично, но устойчиво стремиться к значению KH^j для всей совокупности для j вопроса, где $N^j_i(KH_j(N^j_i)) < N_i$, i – номер выборки.

При этом под механизмом получения случайной выборки объемом N^j_i из генеральной совокупности, состоящей из N^j ответов экспертов на j -й вопрос, мы предлагаем следующую процедуру:

1. По каждому j -му вопросу случайным образом из натуральных чисел от 1 до N составляется i -я выборка без возвращения объемом N^j_i , где N соответствует количеству участников, ответивших на данный вопрос, $i = 1, 2, \dots, m_j$, m_j – количество выборок для j вопроса. Данные выборки были созданы при помощи функции `lotto` на языке программирования Visual Basic, возвращающей псевдослучайные числа без повторов по заданным верхней границе интервала, нижней границе и количеству псевдослучайных чисел, которые отбираются из заданного интервала, соответствующего количеству экспертов, ответивших на конкретный вопрос [9].

2. Каждое из полученных псевдослучайных натуральных чисел соответствует порядковому номеру эксперта и сопоставляется со значением ответа данного эксперта.

3. Данная процедура повторяется 999 раз для создания новых выборок для каждого j -го вопроса и каждой i -й выборки объемом N^j_i .

Если гипотезы 1–4 будут подтверждены экспериментально, то, базирясь на них, можно получить информацию, характеризующую динамику изменений значений гистограммного коэффициента и правдоподобное обоснование утверждения относительно минимально необходимого числа опрашиваемых участников путем выявления характера изменения вида гистограмм

ного коэффициента $KH_j(N^{j_i})$ не используя статистические методы.

5. Экспериментальное обоснование гипотез на основе апробации гистограммного коэффициента

Приступим к обоснованию гипотез 1–4, рассчитав значения гистограммного коэффициента на большом массиве данных, полученных при ответах экспертов на 9 тестовых вопросов и представив полученную информацию в таблицах 1–9 для гистограммного коэффициента $KH^j(N^{j_i})$.

Рассмотрим таблицу 1 значений гистограммного коэффициента $KH^j_i(N^{j_i}, N^j)$.

Рассмотрим и проанализируем поясняющий пример для вопроса № 1. Для каждого фиксированного j -го вопроса, размера общей совокупности и объема выборки, например, для первого вопроса: $N^1_1 = 20, N^1_2 = 30, N^1_3 = 40, N^1_4 = 50, N^1_5 = 60, N^1_6 = 70, N^1_7 = 80, N^1_8 = 90, N^1_9 = 100, N^1_{10} = 110, N^1_{11} = 120, N^1_{12} = 130, N^1_{13} = 140$, и общего количества ответов $N^1 = 146$ рассчитаем значения гистограммного коэффициента $KH^j_i(N^{j_i}, N^j)$ для 100 различных случайных вариантов внутри каждой выборки и найдем числовой отрезок с границами от минимального до максимального значений этого коэффициента – $[L^j_k, U^j_k]$, где k – объем выборки – последовательно принимает значения 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140. Выясним, как изменяется длина интервала разброса в зависимости от изменения объема выборки.

Для подтверждения представленных гипотез мы произвели расчет гистограммного коэффициента $KH^j_i(N^{j_i}, N^j)$ путем случайного отбора ответов экспертов по выборкам фиксированного объема при помощи разработанного нами и описанного выше механизма получения случайной выборки.

Ниже для иллюстрации приведено два графических представления результатов расчета коэффициента $KH^j_i(N^{j_i}, N^j)$ на разных случайных выборках N^1_i по первому вопросу.

На оси абсцисс каждого графика указаны дисконтированные значения объемов выборок (количество ответов экспертов),

$i = 20, \dots, 140$, на первый вопрос из общего числа N_i ответов экспертов по выборке из N^1_i ответов случайным образом выбранных экспертов.

По оси ординат каждого графика указаны процентные значения гистограммного коэффициента $KH^1_i(N^1, N^1_i)$ по выборке из N^1_i ответов случайным образом выбранных экспертов.

Для иллюстрации закономерности динамики изменения коэффициента $KH^1_i(N^1, N^1_i)$ в зависимости от объемов выборок на двух рисунках были проведены три ломаные линии, представляющие из себя три отдельных графика, соединяющих точки, обозначающие максимальные, медианные и минимальные значения коэффициента $KH^1_i(N^1, N^1_i)$ для первого вопроса для каждого отдельно взятого значения объема выборок.

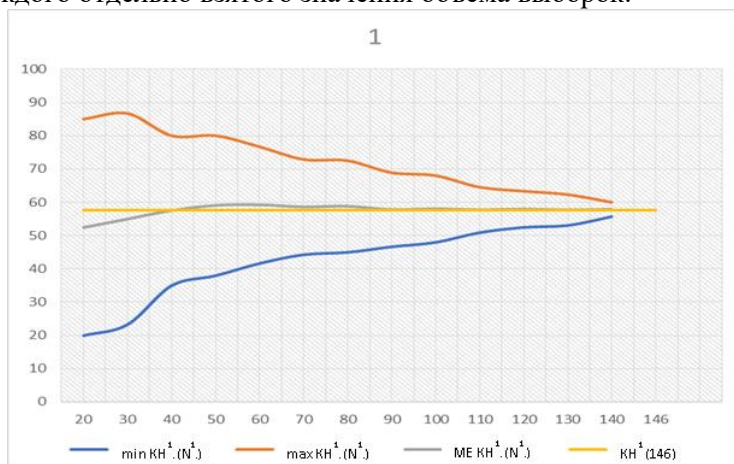


Рис. 1. Графическое представление результатов расчета коэффициента $KH^1_i(N^1_i)$ по вопросу №1

На рис. 2 наглядно видно, что медиана ряда значений коэффициента $KH^1_i(N^1, N^1_i)$ по i -й выборке после сильного хаотического изменения на начальных объемах выборок ($i_{20}, \dots, i_{80}$) устойчиво стремится к значению KH^1 для всей совокупности, отмеченной на данном графике желтой горизонтальной линией. Подобный результат – сходимость ряда медианных значений на графике расчета коэффициента $KH^1_i(N^1_i)$ к точке, являющейся значением гистограммного коэффициента KH^1_i , характеризую-

щего сложность j -го вопроса как тестовой задачи, на основе всех ответов на j -й вопрос наблюдается для всех рассматриваемых в данной статье вопросов. Результаты расчетов по всем вопросам представлены в таблицах 1–9 в Приложении.

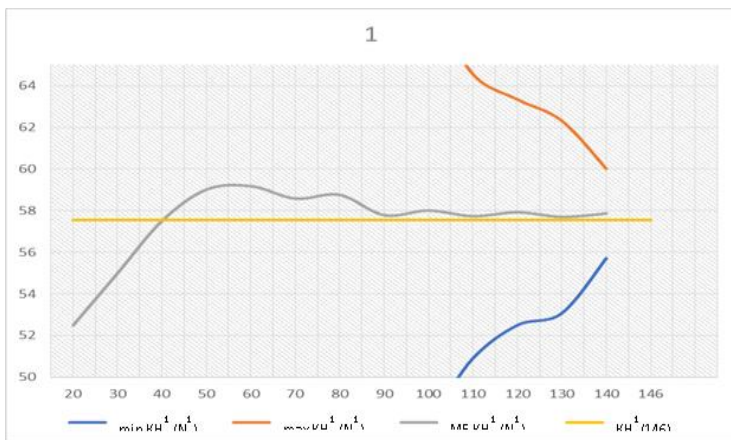


Рис. 2. Графическое представление результатов расчета коэффициента $KН^1_i(N^1_i)$ по вопросу №1 (в увеличенном масштабе)

6. Обоснование предложенных гипотез и соответствующие заключения

Рассмотрим результаты, подтверждающие гипотезы 1–4, исходя из данных таблиц 1–9.

Гипотеза № 1 подтверждается, так как для любого j -го тестового вопроса нашлось такое количество участников тестового опроса K_1 и значение N^j_{i1} объема выборок, что при расчете гистограммного коэффициента по выборкам (N^j_i) значение $\min KН^j_i(N^1, N^j_i)$ как функции с увеличением объема выборок, начиная со значения N^j_{i1} , монотонно возрастает для всех вопросов. Кроме того, значение $\min KН^j_i(N^1, N^j_i)$ как функции стремится к значению $KН^j_i$ для всей совокупности для j вопроса.

Для дальнейших исследований и выдвижения новых гипотез рассмотрим этот результат более детально.

Так, для вопросов 1–7 и вопроса 9 значение $\min KH^j_i(N'^1, N^j_i)$ как функции с увеличением объема выборок строго монотонно возрастает. При этом начало монотонного роста с увеличением объема выборки для вопросов: №1 – начиная с $i = 20$; №2 – начиная с $i = 80$; №3 – начиная с $i = 90$; №4 – начиная с $i = 90$; №5 – начиная с $i = 90$; №6 – начиная с $i = 90$; №7 – начиная с $i = 60$; №8 – начиная с $i = 35$; №9 – начиная с $i = 10$.

Гипотеза № 2 подтверждается, так как для любого j -го тестового вопроса нашлось такое количество участников тестового опроса K_2 и значение N^j_{i2} объема выборок, что при расчете гистограммного коэффициента по выборкам (N^j_i) значение $\max KH^j_i(N'^1, N^j_i)$ как функции с увеличением объема выборок, начиная со значения N^j_{i2} , монотонно убывает для всех вопросов. А для вопросов 2, 3 и 5–9 – строго монотонно убывает. Кроме того, значение $\max KH^j_i(N'^1, N^j_i)$ как функции стремится к значению KH^j_i для всей совокупности для j вопроса.

Для дальнейших исследований и выдвижения новых гипотез рассмотрим этот результат более детально.

Отдельно отметим, что значение $\max KH^j_i(N'^1, N^j_i)$ как функции с увеличением объема выборки монотонно убывает, начиная с минимального объема выборки для вопросов №2, №5, №8 и №9. Относительно других вопросов, начало монотонного убывания $\max KH^j_i(N'^1, N^j_i)$ как функции с увеличением объема выборки начинается: для №1 – с $i = 30$; для №3 – с $i = 100$; №4 – с $i = 70$; №6 – с $i = 100$; №7 – с $i = 90$.

Гипотеза № 3 подтверждается, так как для любого j -го тестового вопроса нашлось такое количество участников тестового опроса K_3 и такое значение N^j_{i3} объема выборок, что диапазон разброса значений гистограммного коэффициента $KH^j_i(N'^1, N^j_i)$ $[\min_i KH^j_i(N'^1, N^j_i), \max_i KH^j_i(N'^1, N^j_i)]$ как функция, начиная со значения N^j_{i3} монотонно убывает с увеличением объема i -й выборки для всех вопросов, а в предельном случае стремится к нулю, по всей совокупности для j -го вопроса.

Для дальнейших исследований и выдвижения новых гипотез рассмотрим этот результат более детально.

При этом диапазон разброса значений гистограммного коэффициента как функции строго монотонно убывает, начиная с минимального объема выборки для вопросов №1 и №2, а также №4–9. А для вопроса № 3 начало строго монотонного убывания этой функции с увеличением объема выборки начинается с $i = 90$.

Гипотеза №4 подтверждается, так как для любого j -го тестового вопроса нашлось такое количество участников тестового опроса K_4 , что медиана ряда значений гистограммного коэффициента $KN^j_i(N^{i1}, N^j_i)$ с увеличением объема выборок хаотично, но устойчиво стремится к значению KN^j для всей совокупности для j вопроса.

Для пояснения можно обратиться к рис. 1 и 2.

Таким образом, гипотезы №1–4, характеризующие динамику изменений значений гистограммного коэффициента, подтвердились.

7. Возможные направления дальнейших разработок

I. Для подтверждения правдоподобности выводов необходимо варьировать вид коэффициента, и, тем самым, выявить устойчивость полученных выводов, базирующихся на результатах расчетов по двум качественно различным коэффициентам относительно числа опрашиваемых участников. Для этого необходимо предложить и исследовать качественно новый коэффициент на основе имеющейся статистики. Предложить и проверить гипотезы, характеризующие динамику изменений на основе этого нового коэффициента.

II. Необходимо на основе опроса участников и анализа полученных результатов сопоставить результирующие ранжирования ответов на тестовые вопросы исходя из значений каждого из двух качественно различающихся коэффициентов и, в случае их совпадения или близости, выдвинуть правдоподобные гипотезы.

III. Для подтверждения правдоподобности выводов необходимо провести дополнительные экспериментальные исследования на другом массиве испытуемых и массиве данных, полученных по результатам опроса. Тем самым, варьировать эти массивы как факторы, от которых зависит уровень правдоподобности

гипотез и соответствующих выводов, с тем чтобы сопоставлять полученные результаты и выводы.

IV. Полагая, что сам вид экспертной оценки в виде гистограммы дает информацию о степени уверенности эксперта в своей оценке, необходимо провести дополнительные исследования относительно соотношения между уровнем сложности тестовых задач и значениями гистограммных коэффициентов $KN^j(N', N^j)$ для любого j -го тестового вопроса.

V. Необходимо выдвижение новых гипотез на основе более детального исследования результатов полученных при анализе таблиц 1-9.

VI. Необходимо выявить взаимосвязь между степенью уверенности эксперта в своей оценке и апостериорной оценкой его точности.

8. Заключение

Введен и экспериментально исследован гистограммный коэффициент как инструмент для изучения явления сверхдоверия.

1. Выявлены факторы, от которых зависит корректность выводов, базирующихся на экспериментальных исследованиях в рамках нашей тематики.

2. Разработаны требования к форме и виду тестовых вопросов как задачам для участников.

3. Предложены и экспериментально обоснованы гипотезы №1–4, характеризующие динамику изменений значений гистограммного коэффициента, и подтверждена их состоятельность.

4. Исследована динамика интегральной оценки степени уверенности экспертов в своих же оценках.

5. Предложен план дальнейших исследований по данной теме.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Результаты расчета коэффициентов KH^j_i по вопросу №1

Номер вопроса 1	Дисконтированные значения объемов выборок на первый вопрос N^1_i													
	Общее число ответов: 146													
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	Значение KH^{146}_i
$\min KH^1_i$	20,00	23,33	35,00	38,00	41,67	44,29	45,00	46,67	48,00	50,91	52,50	53,08	55,71	57,53
МЕ значений ряда оценок KH^1_i	52,50	55,00	57,50	59,00	59,17	58,57	58,75	57,78	58,00	57,73	57,92	57,69	57,86	
$\max KH^1_i$	85,00	86,67	80,00	80,00	76,67	72,86	72,50	68,89	68,00	64,55	63,33	62,31	60,00	
Диапазон: $\max KH^1_i - \min KH^1_i$	65,00	63,33	45,00	42,00	35,00	28,57	27,50	22,22	20,00	13,64	10,83	9,23	4,29	

Таблица 2. Результаты расчета коэффициентов KH^j_i по вопросу №2

Номер вопроса 2	Дисконтированные значения объемов выборок на второй вопрос N^2_i											
	Общее число ответов: 123											
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	Значение KH^{123}_{123}
$\min KH^2_i$	15,00	20,00	20,00	28,00	28,33	34,29	32,50	35,56	37,00	40,00	43,33	44,72
МЕ значений ряда оценок KH^2_i	45,00	45,00	42,50	45,00	43,33	45,00	43,13	43,89	44,50	44,55	44,58	
$\max KH^2_i$	75,00	70,00	65,00	62,00	58,33	55,71	53,75	52,22	52,00	49,09	45,83	
Диапазон: $\max KH^2_i - \min KH^2_i$	60,00	50,00	45,00	34,00	30,00	21,43	21,25	16,67	15,00	9,09	2,50	

Таблица 3. Результаты расчета коэффициентов KH^j_i по вопросу №3

Номер вопроса 3	Дисконтированные значения объемов выборок на третий вопрос №3												Значение KH^3_{140}
	Общее число ответов: 140												
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	67,14
$\min KH^3_i$	30,00	46,67	47,50	52,00	53,33	55,71	57,50	55,56	57,00	60,00	62,50	64,62	
ME значений ряда оценок KH^3_i	62,50	68,33	65,00	68,00	67,50	67,86	67,50	66,11	67,50	67,73	67,50	67,31	
$\max KH^3_i$	95,00	90,00	82,50	84,00	81,67	80,00	77,50	76,67	78,00	75,45	72,50	70,00	
Диапазон: $\max KH^3_i - \min KH^3_i$	65,00	43,33	35,00	32,00	28,33	24,29	20,00	21,11	21,00	15,45	10,00	5,38	

Таблица 4. Результаты расчета коэффициентов KH^j_i по вопросу №4

Номер вопроса 4	Дисконтированные значения объемов выборок на четвертый вопрос N^4_i												
	Общее число ответов: 141												
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	Значение KH^4_{141}
$\min KH^4_i$	25,00	23,33	30,00	32,00	33,33	35,71	36,25	35,56	38,00	38,18	38,33	41,54	
ME значений ряда оценок KH^4_i	47,50	43,33	46,25	46,00	45,00	46,43	45,00	43,33	44,00	44,09	43,75	44,23	
$\max KH^4_i$	70,00	63,33	62,50	60,00	56,67	57,14	53,75	51,11	50,00	50,00	49,17	46,92	
Диапазон: $\max KH^4_i - \min KH^4_i$	45,00	40,00	32,50	28,00	23,33	21,43	17,50	15,56	12,00	11,82	10,83	5,38	

Таблица 5. Результаты расчета коэффициентов KH^j_i по вопросу №5

Номер вопроса 5	Дисконтированные значения объемов выборок на пятый вопрос №5													
	Общее число ответов: 146													Значение KH^5_{146}
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	
$\min KH^5_i$	15,00	23,33	27,50	28,00	30,00	32,86	33,75	33,33	34,00	38,18	41,67	43,85	45,71	47,95
МЕ значений ряда оценок KH^5_i	47,50	48,33	47,50	46,00	46,67	47,14	46,25	45,56	45,50	47,27	48,75	48,08	47,86	
$\max KH^5_i$	80,00	73,33	67,50	64,00	63,33	61,43	58,75	57,78	57,00	56,36	55,83	52,31	50,00	
Диапазон: $\max KH^5_i - \min KH^5_i$	65,00	50,00	40,00	36,00	33,33	28,57	25,00	24,44	23,00	18,18	14,17	8,46	4,29	

Таблица 6. Результаты расчета коэффициентов KH^j_i по вопросу №6

Номер вопроса 6	Дисконтированные значения объемов выборок на шестой вопрос №6												
	Общее число ответов: 141												
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	Значение KH^{6}_{141}
$\min KH^{6}_i$	15,00	26,67	27,50	32,00	36,67	37,14	38,75	37,78	41,00	42,73	44,17	46,15	49,65
МЕ значений ряда оценок KH^{6}_i	47,50	51,67	50,00	50,00	50,83	50,00	50,00	48,33	50,00	49,55	50,00	49,62	
$\max KH^{6}_i$	80,00	76,67	72,50	68,00	65,00	62,86	61,25	58,89	59,00	56,36	55,83	53,08	
Диапазон: $\max KH^{6}_i - \min KH^{6}_i$	65,00	50,00	45,00	36,00	28,33	25,71	22,50	21,11	18,00	13,64	11,67	6,92	

Таблица 7. Результаты расчета коэффициентов KH^j_i по вопросу №7

Номер вопроса 7	Дисконтированные значения объемов выборок на седьмой вопрос N^7_i												
	Общее число ответов: 144												Значение KH^7_{144}
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	
$\min KH^7_i$	25,00	36,67	37,50	42,00	41,67	44,29	47,50	48,89	50,00	51,82	52,50	54,62	58,33
МЕ значений ряда оценок KH^7_i	57,50	60,00	58,75	60,00	59,17	57,86	58,13	58,89	58,00	58,18	57,92	58,85	
$\max KH^7_i$	90,00	83,33	80,00	78,00	76,67	71,43	68,75	68,89	66,00	64,55	63,33	63,08	
Диапазон: $\max KH^7_i - \min KH^7_i$	65,00	46,67	42,50	36,00	35,00	27,14	21,25	20,00	16,00	12,73	10,83	8,46	

Таблица 8. Результаты расчета коэффициентов KH^j_i по вопросу №8

Номер вопроса 8	Дисконтированные значения объемов выборок на восьмой вопрос N^8_i							
	Общее число ответов: 44							Значение KH^8_{44}
	10	15	20	25	30	35	40	
$\min KH^8_i$	0,00	13,33	15,00	16,00	23,33	22,86	30,00	36,36
МЕ значений ряда оценок KH^8_i	40,00	40,00	40,00	36,00	38,33	34,29	35,00	
$\max KH^8_i$	80,00	66,67	65,00	56,00	53,33	45,71	40,00	
Диапазон: $\max KH^8_i - \min KH^8_i$	80,00	53,33	50,00	40,00	30,00	22,86	10,00	

Таблица 9. Результаты расчета коэффициентов KH_i^j по вопросу №9

Номер вопроса 9	Дисконтированные значения объемов выборок на девятый вопрос N^9_i Общее число ответов: 42							Значение KH^{9}_{42}
	10	15	20	25	30	35	40	
$\min KH^9_i$	20,00	26,67	30,00	36,00	43,33	48,57	52,50	57,14
ME значений ряда оценок KH^9_i	55,00	56,67	55,00	56,00	58,33	58,57	56,25	
$\max KH^9_i$	90,00	86,67	80,00	76,00	73,33	68,57	60,00	
Диапазон: $\max KH^9_i - \min KH^9_i$	70,00	60,00	50,00	40,00	30,00	20,00	7,50	

Литература

1. АЛЬПЕРТ М., РАЙФФА Х. *Сообщение о процессе обучения оцениванию вероятности* // В Сб.: Канеман Д. Словик П. Тверски А. *Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения*. – Харьков: Издательство Институт прикладной психологии «Гуманитарный центр», 2005. – 632 с. Англ.: D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. – New York: Cambridge University Press, 2001.
2. АЛИМОВ Ю.И. *Альтернатива методу математической статистики*. – М.: Знание, 1980.
3. БЕЛНАП Н., СТИЛ Д. *Логика вопросов и ответов*. – М.: Прогресс, 1981. – 290 с.
4. БЕРКОВ В.Ф. *Вопрос как форма мысли*. – Мн.: Изд-во БГУ, 1972. – 182 с.
5. БЕРКОВ В.Ф. *Философия и методология науки: учеб. пособие*. – М.: Новое знание, 2004. – 336 с.
6. *Большая советская энциклопедия*. – М.: Советская энциклопедия, 1969–1978.
7. БОЧАРОВ В.А., МАРКИН В.И. *Введение в логику: учебник*. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2008. – 560 с.
8. ВОЙШВИЛЛО Е.К., ПЕТРОВ Ю.А. *Язык и логика вопросов* // В сб. «Логика и методология научного познания» / Под ред. А.А. Старченко. – М.: Изд-во Московского университета, 1974. – С. 147–158.
9. *Генерация псевдослучайных чисел в среде Visual Basic [Электронный ресурс]* // Случайная выборка. – URL: <https://www.planetaexcel.ru/techniques/2/94/> (дата обращения: 15.12.2019).
10. КАНеман Д., СЛОВИК П., ТВЕРСКИ А. *Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения*. – Харьков: Издательство Институт прикладной психологии «Гуманитарный центр», 2005. – 632 с.
11. КИСЕЛЕВ Ю.В. *Метод экспертных оценок* // Экономика и мат. методы. – 1967. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 391–396.

12. ПЕТРОВСКИЙ С.А., СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Об одном эмпирическом исследовании свойств вероятностных экспертных оценок* // Тезисы докладов 1-го Всесоюз. совещ. по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации. – М., Алма-Ата: Ротапринт ВНИИСИ, 1981. – С. 140–141.
13. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Системный анализ технологии экспертного прогнозирования*. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ «МАИ», 2007. – 348 с.
14. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Четырехэтапная мозговая атака* // Проблемы управления. – 2014. – №1. – С. 36–44.
15. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В., САЛТЫКОВ С.А. *Процедура установления соответствия между задачей и методом* // Экономические стратегии. – 2008. – №7. – С. 102–109.
16. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Формирование понятийно-терминологического аппарата экспертологии* // Проблемы управления. – 2017. – №5. – С. 18–30.
17. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В., КАЛМЫКОВ Н.С. *Методы постановки экспертных задач и их корректировки* // Экономика и управление в машиностроении». – 2017. – №5. – С. 59–64.
18. *Толковый словарь русского языка* / Под ред. Д.Н. Ушакова. – М.: Гос. ин-т «Сов. энцикл.»; ОГИЗ; Гос. изд-во иностр. и нац. слов., 1935–1940 (4 т.).
19. ТЮРИН Ю.Н., ВАСИЛЕВИЧ А.П. *К проблеме обработки рядов ранжировок* // Статистические методы анализа экспертных оценок. – М.: Наука, 1977. – С. 96–111.
20. ФЕДОРОВ Б.И. *Логика вопросов* // В кн.: «Символическая логика: Учебник» (глава XIV) / Под ред. Я.А. Слинина, Э.Ф. Караваева, А.И. Мигунова. – СПб, 2005. – С. 477–492
21. ФЕДОРОВ Б.И. *О классификации научных вопросов* [Электронный ресурс] – URL: <http://ecsocman.hse.ru> (дата обращения: 15.12.2019).
22. ШНЕЙДЕРМАН М.В. *Процедуры коллективного экспертного опроса и их экспериментальное исследование* // Автоматика и телемеханика. – 1988. – Вып. 5. – С. 3–16.
23. ЧУГУЕВА В.Н. *Математическая энциклопедия* / Ред. коллегия: И.М. Виноградов (гл. ред.) и др. Т.1 – М.: «Советская энциклопедия», 1977. – С. 1012.

24. AJDUKIEWICZ K. *Logiczne podstawy nauczania*. – Nasza Księgarnia, 1934. – 75 p.
25. AUMANN R. J. *Interactive epistemology* // I: Knowledge, Int J Game Theory. – 1999. – Vol. 28. – P. 263–300.
26. BEEBE S.M., PHERSON R.H. *Cases in Intelligence Analysis: Structured Analytic Techniques in Action*. – Washington, DC: CQ Press College, 2011. – 241 p.
27. BONNARCOSI A., APREDA R., FANTONI G. *Expert biases in technology foresight. Why they are a problem and how to mitigate them* // Technological Forecasting and Social Change. – February 2020. – Vol. 151.
28. BELNAP N., STEEL T. *The logic of questions and answers*. – Yale University Press, 1976, — 209 p.
29. BROWN B., COCHRAN S., DALKEY N. *The Delphi Method II: structure of experiments*. Memorandum RM – 5957 – PR, The Rand Corporation, Santa Monica, California, June, 1969.
30. FORD D.A. *Shang Inquiry as an alternative to Delphi: some experimental findings* // Technol. Forecast. and Soc. Change. – 1975. – Vol. 7, No. 2. – P. 139–164.
31. HAMBLIN C.L. *Questions* // Australasian Journal of Philosophy. – 1958. – Vol. 36. – P. 158–159.
32. HARRAH D. *A logic of questions and answers* // Philosophy of Science. – 1961. – Vol. 28. – P. 40–46.
33. HINTIKKA J. *Knowledge and belief. An introduction to the logic of the two notions*. – Cornell University Press, Ithaca, N.Y., 1962. – 179 p.
34. KUBINSKI T. *An Essay in Logic of Questions* // In: «Atti del XII Congresso Inter, do Filosofia». – Venezia, 1958, Bd. 5.
35. OSKAMP S. *Overconfidence in case-study judgments* // Journal of Consulting Psychology. – 1965. – Vol. 29, Iss. 3. – P. 261–265.
36. PRIOR A., PRIOR M. *Erotetic logic* // Philosophical Review. – 1955. – Vol. 64. – P. 43–59.
37. SPERANTIA E. *Remarques sur les propositions interrogatives* // Projet d'une "Logique du problème" // In: Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VII Logique, Paris 1936. – P. 18–28.
38. WHATELY R. *Elements of Logic*. 9th Edition. – London: Longman, Greens and Co., 1875.

39. WI'SNIEWSKI A. *Erotetic Search Scenarios, Problem-Solving, and Deduction* // *Logique & Analyse*. – 2004. – No. 185–188. – P. 139–166.

EXPERIMENTAL STUDIES ON THE TEST QUESTIONS BASED ON THE HISTOGRAM RATIO

Nikita Kalmykov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher (kalmikov-nik@bk.ru).

Yuri Sidelnikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow Aviation Institute, Moscow, chief scientific officer (sidelnikovy@mail.ru).

Abstract: The article proposes a histogram ratio as a tool of an integral assessment of the degree of confidence of experts in their estimates. Herewith, the experts evaluate test questions presented in the form of a problem. Experimental studies of test questions based on this ratio are proposed as a tool for studying the phenomenon of over-confidence among experts. A hypothesis about the correlation between the degree of confidence of an expert in his assessment and a posteriori assessment of his accuracy is proposed and substantiated. Explanations of the factors that determine the correctness of the conclusions obtained in these studies are provided. Requirements for the form and type of test questions have been introduced. Also, hypotheses that characterize the dynamics of changes in the values of the histogram ratio from the sample size are proposed and experimentally substantiated, and their consistency is confirmed. The dynamics of the integral assessment of experts' confidence in their assessments were studied. The factors on which the conclusions of experimental studies depend are revealed. It is shown that the histogram ratio is not only an integral assessment of the degree of confidence of experts in their estimates, but also an analogue of any discrete indicator of the error of a particular expert when evaluating a particular question.

Keywords: expert appraisals, test question, histogram ratio.

УДК 303.833.5+303.832.32

ББК 65.054. 3+ 16.23+ 87.256.643

DOI: 10.25728/ubs.2020.87.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.*

Поступила в редакцию 31.08.2020.

Опубликована 30.09.2020.