ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ КОМПЛЕКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НА ОСНОВЕ УНИТАРНОГО КОДА[1]

Бурков В. Н.[2], Сергеев В. А.[3], Коргин Н. А.[4]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматривается проблема идентификации механизмов комплексного оценивания для заданного набора обучающих примеров. Предлагается подход к решению, основанный на унитарном кодировании. Формализуются основные понятия и определения, такие как: механизм комплексного оценивания с бинарным деревом и матрицами свертки, механизм комплексного оценивания с бинарным деревом для дискретных шкал, обучающий пример, обучающий набор (согласованный, полный, в единой шкале), монотонный обучающий набор. Задачи идентификации формулируются в виде задач реализации обучающего набора механизмом комплексного оценивания и аппроксимации. Предлагаемое унитарное представление механизма комплексного оценивания с использованием квадратичной формы иллюстрируется на нескольких примерах. Предъявляются правила кодирования механизмов комплексного оценивания. Показывается, что задача аппроксимации и задача реализации как ее частный случай могут быть сведены к задаче максимизации некоторого полинома, получаемого для заданных бинарного дерева и набора примеров с использованием унитарного кодирования. Формулируются и доказываются утверждения о свойствах данных полиномов для произвольного механизма комплексного оценивания. Приводятся примеры решения задачи идентификации механизма комплексного оценивания, реализующего пример через решение системы уравнений на основе унитарного кодирования. В заключение приводятся результаты численного эксперимент по аппроксимации всех булевых функций трех переменных механизмами комплексного оценивания.

Ключевые слова: идентификация и редукция модели; планирование и контроль производства; моделирование и принятие решений в сложных системах; комплексное оценивание; унитарное кодирование; унитарные функции.

---

[1] *В.Н. Бурков благодарит за частичное финансирование грант РФФИ 18-07-01258, Н.А. Коргин – грант РФФИ 19-29-07525.*
[2] *Владимир Николаевич Бурков, д.т.н., проф. г.н.с.* (burkov39@gmail.com).
[3] *Владимир Александрович Сергеев, м.н.с. аспирант* (sergeev.bureau@gmail.com).
[4] *Николай Андреевич Коргин, д.т.н., доцент, г.н.с.* (nkorgin@ipu.ru).

1. Введение

Механизмы комплексного оценивания (МКО) были введены в качестве многомерных систем оценки и ранжирования для управления и контроля в организационных и производственных системах в Советском Союзе в начале 80-х годов прошлого века (например, система АККОРД для электронной промышленности, см. [6, 8, 15]) и используются по сей день (см., например, [1, 2, 5, 14, 17, 20]). МКО могут быть отнесены к классу так называемых методов вербального анализа решений (ВАР) для неструктурированных проблем (см., например, [12, 22]) и предназначены для их структурирования, см., например, [7, 13, 16]. МКО предназначены для порядкового ранжирования (или классификации) с заранее определенным числом классов конечного набора многокритериальных альтернатив. Основные компоненты МКО – бинарное дерево и матрицы свертки, которые позволяют получать комплексное оценивание (КО) основанное на значениях нескольких параметров.

Основной подход к идентификации параметров КО предполагает итеративное взаимодействие с лицами, принимающими решения [5]. Однако в настоящее время существует запрос на разработку обучающих процедур для МКО, которые довольно обычны для алгоритмов идентификации задач в области искусственного интеллекта. Подобная задача исследовалась лишь для отдельных частных случаев, например, в [3, 11]. В этой работе мы покажем, что довольно популярный в настоящее время подход из области искусственного интеллекта – представление категориальных оценок на основе унитарного кодирования (см., например, [19, 24]) – позволяет создавать алгоритмы для идентификации МКО на основе обучающего набора примеров.

2. Основные понятия и определения

Пусть задан конечный набор индикаторов $L \subset \mathbb{N}$, $|L| = l$, на основе их значений должна быть произведена порядковая оценка некоторого объекта или ранжирование нескольких объектов. Для задачи идентификации МКО будем считать, что для каждого индикатора $i \in L$ задан конечный набор $K_i \subset \mathbb{N}$ его возможных значений $k_i \in K_i$, и вектор $k = (k_1, \ldots, k_l)^{\mathrm{T}}$ описывает любое возможное состояние оцениваемых объектов. Также есть конечный набор $K_L \subset \mathbb{N}$ возможных интегральных значений (рангов или классов) $k_L \in K_L$ для любого k.

Определение 1. МКО с бинарным деревом и свертками матриц – это отображение $w(\cdot): \prod_{i \in L} K_i \to K_L$, для которого индикаторы L являются листьями полного бинарного дерева – ориентированного графа $G = (V, E)$:

1. $V = L \cup \hat{L}$, $\hat{L} = \{l+1, \ldots, 2l-1\}$.
2. $E = \{e_{ij}\} \subseteq V \times V$,

   а. $\forall i \in V \setminus \{2l-1\}\ \ \exists!\, j \in \hat{L} \setminus \{i\}:\ e_{ij} = 1,\ \forall t \in V \setminus j\ \ e_{it} = 0$;

   б. $\forall j \in L\ \ \forall i \in V\ \ e_{ij} = 0$;

   в. $\forall j \in \hat{L}\quad \exists! \{r, c\} \in V \setminus \{j\} \times V \setminus \{j\}: e_{rj} = 1, e_{cj} = 1$;

и $\forall j \in \hat{L}$ (внутренняя вершина дерева, включая вершину)

1) конечный набор $K_j \subset \mathbb{N}$ с возможными значениями $k_j \in K_j$, $K_{2l-1} = K_L$;

2) матрица свертки $M_j = [m_{jrc} \in K_j]_{r \in \{0, \ldots, |K_l - 1|\}, c \in \{0, \ldots, |K_r - 1|\}}$, $\{r, c\} \in V \setminus \{j\} \times V \setminus \{j\}: e_{lj} = 1, e_{rj} = 1$ определены. □

Потенциально данное определение может быть расширено на нечеткие [2, 16, 17] или непрерывные шкалы [7]; в рамках данной работы акцент сделан на работу именно с дискретными шкалами как индикаторов (показателей), так и значений, получаемых в узлах дерева свертки [4].

Имея некоторую МКО $w(\cdot)$, обозначим набор всех её матриц свертки как $M_w = \{M_j\}_{j \in L}$.

В этой работе мы ограничимся рассмотрением МКО с единой шкалой, таких что $\forall j \in V\ K_j = K_L$.

Для $L \subset \mathbb{N}$ обозначим $\Gamma_2(L)$ – набор всех бинарных деревьев с листьями из L; $IRM_{L,2}$ – набор всех МКО для любого конкретного бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$; $IRM_{L,G} \subseteq IRM_{L,2}$ – набор всех МКО с таким деревом.

Для формализации задачи обучения обозначим $q = (k, k_M)$ отдельный обучающий пример, $Q \subset K \otimes K_L$ состоящей из значений оценок по каждому из индикаторов и интегральной оценки для данной совокупности значений индикаторов, $K = \prod_{i \in L} K_i$ – обучающий набор (из предоставленных примеров). Обучающий набор является *согласованным*, если $\forall \{q, \tilde{q}\} \subseteq Q \quad k \neq \tilde{k}$. Обучающий набор является *полным*, если $\forall k \in K \ \exists q \in Q : q = (k, k_L)$. Обучающий набор задан в *единой шкале*, если $\forall i \in L\ K_i = K_L$.

Для произвольных $\{k, \tilde{k}\} \subseteq K$ обозначим $k \succ \tilde{k}$, если $\forall i \in L$ $\tilde{k}_i \leq k_i$.

Обучающий набор Q называется монотонным если $\forall \{q, \tilde{q}\} \subseteq Q$: если $k \succ \tilde{k}$, то $\tilde{k}_L \leq k_L$. В таком случае $q \succ \tilde{q}$.

Для некоторого произвольного $Q \subset K \otimes K_L$ можно определить следующие ключевые обозначения, касающиеся проблемы идентификации. Во-первых, можно формализовать задачу *реализуемости* обучающего набора:

Определение 2. $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует Q тогда и только тогда, когда $\forall q \in Q\ w(k) = k_L$□

Обозначим $IRM_{L,2}(Q)$ – множество всех МКО, которые реализуют Q, $IRM_{L,G}(Q)$ – множество всех МКО, которые реализуют Q и построены на основе двоичного дерева $G \in \Gamma_2(L)$. Тогда если $IRM_{L,2}(Q) \neq \varnothing$, то Q – *реализуема на основе* МКО, если $IRM_{L,G}(Q) \neq \varnothing$, тогда Q является *реализуемой на основе* МКО со структурой G.

Определение 2 также может быть сужено до одного конкретного обучающего примера: $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует некоторый пример $q \in Q$ тогда и только тогда, когда $w(k) = k_L$; так же определяются $IRM_{L,2}(q)$ и $IRM_{L,G}(q)$.

Если $IRM_{L,2}(Q) = \varnothing$ или $IRM_{L,G}(Q) = \varnothing$, то возможно поставить задачу *аппроксимации*. Для конкретного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ обозначим $Q_w = \{q \subseteq Q : w(k) = k_L\}$. Для любого произвольного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ обозначим $U_Q(w) = |Q_w| / |Q|$ – качество аппроксимации с максимумом в 1, если $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$. Тогда задача аппроксимации заключается в поиске $w^*(\cdot) \in \underset{w \in IRM_{M,2}}{Arg \max} U_Q(w)$. В случае если Q является *реализуемой на основе* МКО, любое корректное решение проблемы аппроксимации должно определять $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$.

Для отдельного бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$ может быть сформулирована аналогичная задача – найти

$$w^*(\cdot) \in \underset{w \in \mathrm{IPM}_{M,G}}{Arg \max} U_Q(w) .$$

Вышеуказанные проблемы носят комбинаторный характер, и их может быть очень трудно решить $|\Gamma_2(L)| = (2l - 3)!!$. Но для определенного $G \in \Gamma_2(L)$ число переменных – количество ячеек всех матриц свертки – минимально по сравнению с любым сетевым представлением функции, которая реализует Q (см. например, [9]); для МКО с единой шкалой это $(l - 1)(|K_L| + 1)^2$, в то время как полное число ячеек таблицы представления отображения $\prod_{i \in L} K_i \to K_L$ равно $(|K_L| + 1)^l$.

Поэтому МКО может рассматриваться как самое экономное приближение некоторого дискретного отображения $\prod_{i \in L} K_i \to K_L$.

3. Унитарное представление механизмов комплексного оценивания

Для некоторого конечного набора $K \subset \mathbb{N}$ введем его *нормализованное* представление $\bar{K} = \{0, ..., \kappa\}$, $\kappa = |K| - 1$. Тогда $\forall x \in \bar{K}$ введем унитарное представление как $\tilde{x} = (\underbrace{0, ..., 0}_{x}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{\kappa - x})^{\mathrm{T}}$. В этой работе мы ограничимся рассмотрением МКО с единой шкалой. Тогда для некоторой матрицы свертки $M = [m_{rc} \in K]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$ результат свертки для любой пары $\{x, y\} \in \{0, ..., \bar{K}\}^2$, где x определяет выбор столбца матрицы и y – строки, описывается матричным уравнением $\tilde{y}^{\mathrm{T}} M \tilde{x}$. Далее мы также будем использовать так называемую квадратичную форму представления $(M\tilde{x}, \tilde{y})$, упрощая её до $M\tilde{x}\tilde{y}$.

Пример 1. Рассмотрим $|L| = 3$. Любой МКО с единой шкалой может быть представлен как $(A\cdot, \tilde{b})$, $b = (B\cdot\cdot, \cdots)$, где

$\{x, y, z\} \in \bar{K}^3$, $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ расположены на позициях $\cdot, \cdot\cdot, \cdots$ произвольным образом, без повторений, и $A = [a_{rc} \in \bar{K}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, $B = [b_{rc} \in \bar{K}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$ – некоторые квадратные матрицы.

Мы также применяем операцию унитарного кодирования к матрицам свертки. Дана некоторая матрица свертки $M = [m_{rc} \in K]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, обозначим $\tilde{M} = [\tilde{m}_{rc}]_{\{r,c\} \in \bar{K}^2}$, где $\tilde{m}_{rc}$ – унитарное представление m_{rc} в наборе K. Так что унитарная матрица – это матрица, в каждой ячейке которой стоит унитарный вектор. Тогда операция $\tilde{y}^{\mathrm{T}} \tilde{M} \tilde{x}$ даст унитарный результат для операции $\tilde{y}^{\mathrm{T}} M \tilde{x}$, описанной выше. Далее мы будем использовать её упрощенное квадратичное представление $\tilde{M} \tilde{x} \tilde{y}$.

Пример 2. Пусть $|K_L| = 2$, что можно трактовать как классическую бинарную логику. Тогда

$$\tilde{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{M} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{00}^0 \\ m_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{10}^0 \\ m_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

с дополнительными унитарными ограничениями: $\forall \{r, c\} \in \{0, 1\}^2 \ m^0_{rc} + m^1_{rc} = 1$, $\forall t \in \{0, 1\} \ m^t_{rc} \in \{0, 1\}$.

Например, результат $\tilde{M} \tilde{1} \tilde{0}$:

$$(1,0) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{00}^0 \\ m_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{10}^0 \\ m_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,0) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{11}^0 \\ m_{11}^1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{01}^0 \\ m_{01}^1 \end{pmatrix}. \square$$

Принимая во внимание тот факт, что любое полное двоичное дерево с l листьями должно иметь $l - 1$ внутренних узлов, включая корень, любой МКО может быть закодирован в форме «слова» с $2l - 1$ буквами в упрощенном квадратичном представлении; $l - 1$ буквами должны обозначаться матрицы свертки (внутренние узлы) и l – листья.

Мы предлагаем следующие правила для кодирования МКО:

1. Первая буква всегда должна обозначать матрицу свертки для корневого узла.
2. Если после буквы матрицы в слове есть только одна буква листа или другая буква матрицы, то запись описывает «спуск» вдоль ветви дерева. Если после некоторой буквы матрицы расположены две буквы листьев, то это «терминальная» матрица свертки в этой ветви дерева, после которой запись «поднимается» вдоль уже описанной ветви в поисках следующей ветви.
3. После любой буквы матрицы сперва должно быть закодировано «низкое» поддерево (с меньшей высотой) из двух, которые исходили из этого узла, а затем второе, «высокое».

Применение унитарного кода позволяет реализовать подход, в рамках которого любой МКО может быть рассмотрен как последовательность матричных операций с унитарно закодированными значениями листьев в соответствии со «словом», которое описывает соответствующий МКО. Результатом такой последовательности операций является унитарно закодированный результат МКО w, который также может быть обозначен как $\tilde{w}$.

4. Подходы к решению задач идентификации и аппроксимации с унитарным представлением механизмов комплексного оценивания

Унитарное кодирование может применяться к обучающим примерам так же, как это было описано в предыдущем разделе. Для некоторого обучающего примера $q = (k, k_L)$ мы будем обозначать унитарную версию как $\tilde{q} = (\tilde{k}, \tilde{k}_L)$, где $\tilde{k}_L$ – унитарное представление k_L и $\tilde{k}$ – кортеж k в унитарном представлении.

Если $w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ реализует некоторый пример $q \in Q$, то $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{k}_L$. Из этого следует, что для того чтобы найти МКО, который реализует некоторый обучающий пример, необходимо решить систему уравнений, полученных на основе унитарного представления этого МКО с дополнительными ограничениями, вытекающими из унитарного представления.

Пример 3. Рассмотрим $|L| = 3$ $|K_L| = 2$ и обучающий пример $q = ((0, 0, 0), 0)$, унитарное представление представлено в таблице 1.

Таблица 1. Унитарное представление обучающего примера для примера 3

	$\tilde{k}_0$	$\tilde{k}_1$	$\tilde{k}_2$	$\tilde{k}_L$
$\tilde{q}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Если МКО имеет структуру $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{A}\tilde{k}_0\tilde{B}\tilde{k}_1\tilde{k}_2$, то необходимо решить систему уравнений

$$(1)\quad \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}b_{00}^0\\b_{00}^1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_{01}^0\\b_{01}^1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}b_{10}^0\\b_{10}^1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_{11}^0\\b_{11}^1\end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}a_{00}^0\\a_{00}^1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{01}^0\\a_{01}^1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}a_{10}^0\\a_{10}^1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{11}^0\\a_{11}^1\end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

с унитарными условиями: $\forall\{i, j\} \in \{0,1\}^2$ $a_{ij}^0 + a_{ij}^1 = 1$, $b_{ij}^0 + b_{ij}^1 = 1$, $\forall t \in \{0,1\}$ $a_{ij}^t \in \{0,1\}$, $b_{ij}^t \in \{0,1\}$.

Уравнения (1) могут быть упрощены:

$$b_{00}^0 \begin{pmatrix}a_{00}^0\\a_{00}^1\end{pmatrix} + b_{00}^1 \begin{pmatrix}a_{10}^0\\a_{10}^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

И наконец имеем:

$$b_{00}^0 a_{00}^0 + b_{00}^1 a_{10}^0 = 1,$$

$$b_{00}^0 a_{00}^1 + b_{00}^1 a_{10}^1 = 0.$$

Подойдут например, любые матрицы A и B такие, что $\tilde{a}_{00} = \tilde{b}_{00} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, – это означает, что будет достаточно определить $a_{00} = b_{00} = 0$ для реализации $q = ((0, 0, 0), 0)$ в МКО с унитарным представлением $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{A}\tilde{k}_0\tilde{B}\tilde{k}_1\tilde{k}_2$. □

Приведенный выше пример также иллюстрирует первое из двух основных положений этой статьи. Для произвольного $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$ обозначим $P(w, q)$ – функцию, которая находится в левой части уравнения с правой частью, равной 1. Вследствие унитарного подхода есть только одна такая функция для любого q.

Утверждение 1. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$, МКО с единой шкалой $w(\cdot) \in IRM_{L,2}(Q)$ и любого возможного q в единой шкале: $P(w, q)$ – однородный полиномом степени $l - 1$, который может быть представлен как сумма k^{l-2} уникальных компонент:

$$P(w,q) = \sum_{j=1}^{\kappa^{l-2}} p_j \ , \quad \forall j \in \{1,\dots,\kappa^{l-2}\} \qquad p_j = \prod_{i=1}^{l-1} m_i \ , \quad \forall i \in \{1,\dots,l-1\} \,,$$

m_i – одна компонента кортежа в некоторой ячейке унитарно закодированной матрицы $\tilde{M}_i$; $\{\tilde{M}_i\}_{i\in\{1,\dots,l-1\}}$ – набор всех унитарно закодированных матриц свертки МКО w,

$P(w,q) \in \{0,1\}$;

$P(w,q) = \tilde{w}(\tilde{k})^{\mathrm{T}} \tilde{k}_L$;

IRM w реализует $q \Leftrightarrow P(w, q) = 1$.□

Доказательство утверждения 1 приведено в приложении.

Следствие 1. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$, и любого возможного q в единой шкале $IRM_{L,2}(q) = \underset{w \in IRM_{L,2}}{Arg\max}\, P(w,q)$.□

Доказательство следствия 1 приведено в приложении.

В дополнение к следствию, указанному выше, из утверждения 1 следует, что для идентификации $IRM_{L,G}(q)$ для некоторого бинарного дерева $G \in \Gamma_2(L)$ достаточно рассмотреть релаксированную проблему оптимизации:

(2) $\quad \max\limits_{w \in IRM_{L,G}} P(w,q)$

при ограничениях:

(3) $\quad \forall \{\tilde{M}_i\}_{i\in\{1,\dots,l-1\}}, \forall \tilde{m} \in \tilde{M}_i \ \tilde{m} \in [0;1]^l \,, \ |m| = 1 \,,$

и любое решение этой задачи должно обеспечивать значение $P(w, q) = 1$.

Чтобы аппроксимировать некоторый обучающий набор $Q \subset K \otimes K_L$ по критерию, представленному в разделе 2, необходимо найти такой МКО, который реализует максимальное число обучающих примеров из этого набора. С учетом (2) и (3) можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ и любого возможного $Q \subset K^{l+1}$ с единой шкалой решение задачи аппроксимации МКО с единой шкалой состоит в решении задачи максимизации:

(4) $\max\limits_{w \in \mathrm{IPM}_{M,G}} \sum\limits_{q \in Q} P(w,q)$

при ограничениях:

(5) $\forall \{\tilde{M}_i\}_{i \in \{1,\dots,l-1\}}, \forall \tilde{m} \in \tilde{M}_i \ \tilde{m} \in [0;1]^l$, $|m| = 1$.□

Доказательство утверждения 2 приведено в приложении.

Следствие 2. Для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ любой $Q \subset K^{l+1}$ с единой шкалой может быть реализован с помощью МКО с единой шкалой тогда и только тогда, когда существует $w \in IRM_{L,2}(Q)$, такое что $\sum\limits_{q \in Q} P(w,q) = |Q|$.□

Доказательство следствия 2 вытекает очевидным образом из определений задач реализуемости и аппроксимации.

Проиллюстрируем, как результаты разработанного подхода могут быть реализованы в отдельных случаях. Как уже упоминалось ранее, мы ограничимся рассмотрением примеров с двоичной логикой.

5. Примеры идентификации

Начнем с типичного примера проверки подходов к обучению ИИ – реализации *XOR* (см., например, [23]).

Пример 4. Булева функция *XOR* $f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$. $|l| = 2$ и $|K| = 2$, полный набор обучающих примеров (его таблица истинности) в унитарной форме представлен в таблице 2.

Таблица 2. Обучающий набор в унитарном представлении для примера 6

	$\tilde{x}_1^{\mathrm{T}}$	$\tilde{x}_2^{\mathrm{T}}$	$\tilde{f}^{\mathrm{T}}$
q^1	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)
q^2	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)
q^3	(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)
q^4	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)

Существует только одна допустимая структура МКО – $\tilde{A}\tilde{x}_1\tilde{x}_2$. Необходимо решить систему уравнений в матричной форме $\forall q \in Q$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_2{}^0(q) \\ \tilde{x}_2{}^1(q) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{00}^0 \\ \tilde{a}_{00}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{a}_{01}^0 \\ \tilde{a}_{01}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{a}_{10}^0 \\ \tilde{a}_{10}^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^0 \\ \tilde{a}_{11}^1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1{}^0(q) \\ \tilde{x}_1{}^1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}^0(q) \\ \tilde{f}^1(q) \end{pmatrix}.$$

Из нее следует, что $\forall w(\cdot) \in IRM_{L,2}$ $P(w,q^1) = a_{00}^0$, $P(w,q^2) = a_{11}^0$, $P(w,q^3) = a_{10}^1$, $P(w,q^4) = a_{01}^1$. Так что существует только одно допустимое решение с $\sum_{q\in Q} P(w,q) = 4$, для него

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такая матрица A соответствует функции XOR.

Пример 5. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$. $|M| = 3$ и $|K| = 2$, полный набор обучающих примеров представлен в таблице 3.

Решение задач (4), (5) для этого набора достигают два МКО со значением (4) равным 8 – обе реализуют этот набор.

Таблица 3. Обучающий набор для примера 7

	x_1	x_2	x_3	f
q^1	0	0	0	0
q^2	0	0	1	0
q^3	0	1	0	0
q^4	1	0	0	0
q^5	1	1	0	1
q^6	1	0	1	0
q^7	0	1	1	1
q^8	1	1	1	1

Оба решения имеют похожие структуры – $\tilde{A}\tilde{x}_1\tilde{B}\tilde{x}_2\tilde{x}_3$. Оптимизационный функционал (4) для этой структуры:

$$(\tilde{b}_{00}^0+\tilde{b}_{10}^0+\tilde{b}_{01}^0+\tilde{b}_{11}^0)\tilde{a}_{00}^0+(\tilde{b}_{00}^1+\tilde{b}_{10}^1+\tilde{b}_{01}^1+\tilde{b}_{11}^1)\tilde{a}_{10}^0+$$
$$+\tilde{b}_{00}^0\tilde{a}_{01}^0+(\tilde{b}_{0}^0+\tilde{b}_{10}^0+\tilde{b}_{11}^0)\tilde{a}_{01}^1+\tilde{b}_{00}^1\tilde{a}_{11}^0+(\tilde{b}_{01}^1+\tilde{b}_{10}^1+\tilde{b}_{11}^1)\tilde{a}_{11}^1$$

Матрицы свертки для первого решения:

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

Эти матрицы в точности соответствуют функции $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge(x_2\vee x_3)$. Матрицы свертки для второго МКО:

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Эти матрицы соответствуют другому представлению той же функции $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge\overline{(\bar{x}_2\wedge\bar{x}_3)}$. □

Пример 6. Изменяя значение *f* для обучающего примера q^7 в таблице 6 с 0 на 1 получается обучающий набор для другой булевой функции: $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge x_2)\vee(x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_3)$. Оптимизационный функционал (4) $\forall IRM\in IRM_{M,2}$ для такого обучающего набора:

$$(\tilde{b}_{00}^0+\tilde{b}_{10}^0+\tilde{b}_{01}^0)\tilde{a}_{00}^0+\tilde{b}_{11}^0\tilde{a}_{00}^1+(\tilde{b}_{00}^1+\tilde{b}_{10}^1+\tilde{b}_{01}^1)\tilde{a}_{10}^0+\tilde{b}_{11}^1\tilde{a}_{10}^1+$$
$$+\tilde{b}_{00}^0\tilde{a}_{01}^0+(\tilde{b}_{01}^0+\tilde{b}_{10}^0+\tilde{b}_{11}^0)\tilde{a}_{01}^1+\tilde{b}_{00}^1\tilde{a}_{11}^0+(\tilde{b}_{01}^1+\tilde{b}_{10}^1+\tilde{b}_{11}^1)\tilde{a}_{11}^1.$$

Решение задач (4), (5) дает максимальное значение 7 – это значит, что невозможно реализовать как минимум один из обучающих примеров. В частности, оба МКО, которые реализуют набор обучения для примера 5, достигают такого значения для целевой функции – реализуют все примеры обучения, кроме измененного примера q^7.□

Примеры 5 и 6 являются иллюстрацией для пары конкретных функций из класса булевых функций трех переменных. Всего таких функций 256, из которых только 20 являются неубывающими. Все они могут быть описаны с помощью таблицы истинности, например, как таблица 6. Мы провели вычислительный эксперимент, чтобы определить для каждой функции, можно ли реализовать ее с помощью МКО, определяя параметры соответствующего ей МКО.

В случае нереализуемой функции мы нашли МКО, который является наилучшим приближением для нее, и вычислили качество приближения.

Получилось, что среди всех 256 булевых функций трех переменных 152 реализуются через МКО и 56 из них – с любой из трех возможных древовидных структур. Оказалось, что нет такой булевой функции, которая была реализована в двух из трех возможных структур. Для всех 94 нереализуемых функций качество аппроксимации составляет 7/8, т.е. только одна строка из его таблицы истинности не реализуется путем аппроксимации МКО. Из 20 неубывающих функций только одна не реализуема – это функция из примера 8. Остальные 19 неубывающих функций представимы в древовидной структуре, т.е. являются *бесповторными* [10, 21].

6. Заключение

В статье представлены первые результаты возможного решения проблемы идентификации МКО на основе унитарного кодирования. Основной проблемой, которую еще предстоит решить, является комбинаторный характер проблемы выбора структуры бинарных деревьев для МКО. Однако предложенный подход предоставляет возможности для реализации в новом направлении процедур обучения ИИ, что позволяет заранее определять структуру нейронных сетей [18]. Также необходимо упомянуть, что множество рассмотренных в этой статье случаев было сужено до бинарной логики, но переход на многозначную логику не вызывает дополнительных трудностей при реализации предложенного подхода. В случае двоичной логики мы предложили новый подход к идентификации так называемых бесповторных функций (см., например, [10, 21]).

Приложение

Доказательство утверждения 1. В рамках введенной унитарной записи операция в рамках МКО с отдельным набором значений индикаторов $\tilde{w}(\tilde{k})$ представляет из себя последовательность $l-1$ матричных операций $\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{M}\tilde{x}$, где векторы $\tilde{x}, \tilde{y}$ имеют размерность $k+1 \in \mathbb{N}$, матрица $\tilde{M}$ – размерность $(k+1) \times (k+1)$. Очевидно, что каждая такая операция представима в виде полинома

$$\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{M}\tilde{x} = \sum_{r\in\{0,\dots,\kappa\}} \tilde{y}^r \sum_{c\in\{0,\dots,\kappa\}} \tilde{x}^c \tilde{m}_{rc} .$$

Соответственно, если во всех ячейках матрицы стоят векторы размерности $k+1$, то результатом операции будет также вектор размерности $k+1$, а любая его компонента $i \in \{0, \dots, k\}$ будет записываться как

$$\sum_{r\in\{0,\dots,\kappa\}} \tilde{y}^r \sum_{c\in\{0,\dots,\kappa\}} \tilde{x}^c \tilde{m}^i_{rc} .$$

То есть итоговым значением операции $\tilde{w}(\tilde{k})$ будет также вектор размерности $k+1$. При этом каждая компонента этого вектора будет представима однородным полиномом степени $2l-1$, определяемым $2l-2$ операциями типа $\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{x}$, т.е. иметь k^{2l-2}. Учитывая, что значения всех листьев заданы унитарными векторами, то итоговая степень полинома будет $l-1$ – в нем сохранятся только те слагаемые, которые не умножаются на нулевые значения компонент векторов листьев, и каждое слагаемое будет иметь вид $\prod_{i=1}^{l-1} m_i$, m_i – одна компонента кортежа в некоторой ячейке унитарно закодированной матрицы $\tilde{M}_i$. При этом количество ненулевых слагаемых будет уже определяться $2l-2-1$ операциями типа $\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{x}$, т.е. их будет всего k^{l-2}. Уникальность каждого слагаемого также следует из сути описанной операции.

Учитывая, что в ячейках всех матриц должны стоять унитарные вектора, получаем, что каждая компонента вектора, определяемого операцией $\tilde{w}(\tilde{k})$, может принимать значения либо 0, либо 1.

Соответственно, то, что МКО реализует отдельно взятый пример, означает, что $\tilde{w}(\tilde{k}) = \tilde{k}_L$. Так как Вектор $\tilde{k}_L$ является унитарным, то у вектора $\tilde{w}(\tilde{k})$ только одна компонента должна быть равна 1 – та же, что и у вектора $\tilde{k}_L$, все остальные должны быть равны 0. То есть $\tilde{w}(\tilde{k})^{\mathrm{T}}\tilde{k}_L = 1$.

Поэтому, обозначив через $P(w, q)$ полином, соответствующий компоненте вектора, определяемой $\tilde{w}(\tilde{k})$ и которая должна равняться 1, получаем все совокупность пунктов данного утверждения. □

Доказательство следствия 1. Из утверждения 1 следует, что для любых $L \subset \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{N}$ и любого возможного q в единой шкале для любой МКО w $P(w,q) \in \{0; 1\}$, а то, что некоторый МКО $\tilde{w}$ реализует q, означает, что $P(\tilde{w}, q) = 1$. Отсюда следует, что $IRM_{L,2}(q) = Arg \max_{w \in IRM_{L,2}} P(w, q)$.□

Доказательство утверждения 2. Так как задача аппроксимации в рамках данной статьи определена как реализация как можно большего числа примеров из обучающего набора, то из записи оптимизационной задачи для реализации отдельного примера в виде (2), (3) следует, что запись (4), (5) соответствует данной формулировке задачи аппроксимации. □

Литература

1. АКИНФЕЕВ В.К., ЦВИРКУН А.Д. *Программный комплекс «ТЭО-ИНВЕСТ»* // Проблемы управления инвестициями. – 2013. – №4. – С. 32–40.
2. АЛЕКСЕЕВ А.О. и др. *Алгоритмические основы нечеткой процедуры комплексного оценивания объектов различной природы* // Фундаментальные исследования. – 2014. – №3-3. – С. 469–474.

3. БЛАЧЕВ Р.Н. *Особенности процедуры бинарной агрегации многокритериальных экспертных оценок* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №5. – С. 126–132.
4. БУРКОВ В.Н., ГОРЕЛИКОВ Н.И., ЧЕРКАШИН А.М. *Методические основы комплексной оценки результатов деятельности предприятий с учетом их прогрессивности в ВПО «Союзэлектроприбор»* // Приборы и системы управления. – 1982. – №11. – С. 21.
5. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А., ЩЕПКИН А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами* / Под ред. академика С.Н. Васильева. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2008. – 244 с.
6. БУРКОВ В.Н., ТЕСАРЖ И., ТРУБКА Я., ЦЫГАНОВ В.В., ЧАМСКИ Б., ЧЕРКАШИН А.М. *Проектирование систем комплексной оценки инноваций и принятия решений* / В кн.: Моделирование и идентификация производственных систем. – М.: ИПУ, 1988. – С. 49–55.
7. ГЛОТОВ В.А., ПАВЕЛЬЕВ В.В. *Векторная стратификация*. – М.: Наука, 1984. – 132 с.
8. ГОРЕЛИКОВ Н.И. *Проблемы совершенствования отраслевого механизма управления разработкой и производством новой продукции* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – №5. – С. 63–70.
9. ГУБКО М.В. *Математические модели формирования рациональных организационных иерархий* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №9. – С. 114–139.
10. ГУРВИЧ В.А. *О бесповторных булевых функциях* // Успехи математических наук. – 1977. – Т. 32, №1 – С. 183–184.
11. КАЗАКОВА Е.А., КУРОЧКА П.Н., ПОЛОВИНКИНА А.И. *Автоматизированное построение матричных процедур комплексного оценивания на основе оптимизационного подхода* // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – №10.
12. ЛАРИЧЕВ О.И. *Вербальный анализ решений*. – М.:Наука, 2006.

13. ПОДИНОВСКАЯ О.В., ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Анализ иерархических многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев* // Проблемы управления. – 2014. –№6. – С. 2–8.
14. ПУЛИКОВСКИЙ К.Б., ЩЕПКИН А.В. *Комплексная оценка соответствия опасных производственных объектов требованиям безопасности* // Безопасность труда в промышленности. – 2007. – №4. – С. 2–7.
15. ТРАПЕЗНИКОВ В.А., ГОРЕЛИКОВ Н.И., БУРКОВ В.Н., ЗИМОХА В.А., ТОЛСТЫХ А.В., ЧЕРКАШИН А.М., ЦЫГАНОВ В.В. *Комплексный подход к управлению научно-техническим прогрессом в отрасли* // Вестник АН СССР. – 1983. – №3. – С. 33–43.
16. ХАРИТОНОВ В.А., БЕЛЫХ А.А. *Технологии современного менеджмента* – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. 190 с.
17. ALEKSEEV A., GALIASKAROV E., KOSKOVA K. *Application of the Matrix Rating Mechanisms and System Cognitive Analysis Methods at the Task of Residential Real Estate Conceptual Designing*. // IEEE 21st Conference on Business Informatics (CBI) – 2019. – Vol. 2. – P. 111–116.
18. GARNELO M., SHANAHAN M. *Reconciling deep learning with symbolic artificial intelligence: representing objects and relations* // Current Opinion in Behavioral Sciences 29. –2019. – P. 17–23.
19. HARRIS D., HARRIS S. *Digital design and computer architecture*. – Morgan Kaufmann, 2010.
20. KORGIN N.A., ROZHDESTVENSKAYA S.M. *Concordant Approach for R&D Projects' Evaluation and Ranking for Formation of Programs* // IEEE 11th Int. Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). – 2017. – P. 1–5.
21. KOZACHINSKIY A. *Recognizing Read-Once Functions from Depth-Three Formulas* // Theory of Computing Systems. – 2020. – Vol. 64(1). – P. 3–16.

22. LARICHEV O.I., MOSHKOVICH H.M. *Verbal decision analysis for unstructured problems* // Springer Science & Business Media – 2013. – Vol. 17.
23. NITTA T. *Solving the XOR problem and the detection of symmetry using a single complex-valued neuron* // Neural Networks. – 2003. – Vol. 16(8). – P. 1101–1105.
24. OKADA S., OHZEKI M., TAGUCHI S. *Efficient partition of integer optimization problems with one-hot encoding* // arXiv preprint arXiv:1906.07385. – 2019.

ONE-HOT APPROACH TO IDENTIFICATION OF INTEGRATED RATING MECHANISMS

Vladimir. Burkov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, D.E.Sc., full professor, principal researcher (burkov39@gmail.com).
Vladimir Sergeev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, research assistant, postgraduate (sergeev.bureau@gmail.com).
Nikolay Korgin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, D.E.Sc., associate professor, principal researcher. (Tel: +7495-335-60-37; nkorgin@ipu.ru).

Abstract: The problem of identifying the integrated rating mechanisms for a given set of training examples is considered. An approach to the solution based on one-hot encoding is proposed. Basic concepts and definitions are formalized, such as: an integrated rating mechanism with a binary tree and convolution matrices, an integrated rating mechanism with a binary tree for discrete scales, a training example, a training set (consistent, complete, uniform scaled), a monotone training set. Identification tasks are formulated in the form of tasks for the implementation of the training set by the integrated rating mechanism and approximation. The proposed one-hot representation of the complex estimation mechanism using the quadratic form is illustrated with several examples. The rules for coding the integrated rating mechanisms are presented. It is shown that the problem of approximation and the problem of implementation as its particular case can be reduced to the problem of maximizing a certain polynomial obtained for a given binary tree and a set of examples using one-hot encoding. Assertions about the properties of these polynomials for an arbitrary integrated rating mechanism are formulated and proved. Examples of solving the problem of identification of an integrated rating mechanism *are given, which implements an example through solving a system of equations based on one-hot encoding. In conclusion, the results of a numerical experiment on the approximation of all Boolean functions of three variables by the integrated rating mechanism are presented.*

Keywords: identification and model reduction; production planning and control; modelling and decision making in complex systems; integrated assessment; one-hot encoding; read-once functions.

УДК 519
ББК 32.81
DOI: 10.25728/ubs.2020.87.4

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.

Поступила в редакцию 06.07.2020.
Опубликована 30.09.2020.