

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 89
Январь 2021***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2021

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 89

Москва – 2021

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики РАН: Васильев С.Н., Емельянов С.В., Куржанский А.Б., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Желтов С.Ю., Каляев И.А., Пархоменко П.П., Попков Ю.С.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П., Кульба В.В., Лотоцкий В.А., Павлов Б.В., Поляк Б.Т., Рутковский В.Ю.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: член-корр. РАН Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИПМ РАН), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), Галаяев А.А. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: Зоркальцев В.И. (ИСЭМ СО РАН), проф. Калашников А.О. (ИПУ РАН), проф. Калянов Г.Н. (ГУ ВШЭ), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН), д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН), д-р техн. наук Коргин Н.А. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (МФТИ), д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН), д-р биол. наук проф. Михальский А.И., д-р физ.-мат. наук, проф. Непейвода Н.Н. (ИПС РАН), д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН), д-р техн. наук, проф. Орлов А.И. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН), проф. Райгородский А.М. (МГУ), проф. Савватеев А.В. (РЭШ), д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), Совлуков А.С. (ИПУ РАН), д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ), проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (МГТУ), д-ра физ.-мат. наук: доцент Чеботарев П.Ю. (ИПУ РАН), проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГАСУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – академик РАН Бычков И.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И., д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г. (СГАУ); **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН); **Старый Оскол** – д-р техн. наук, проф. Еременко Ю.И. (СТИ).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Сетевые модели в управлении

Жилякова Л.Ю., Чаплинская Н.В.

*Исследование полных однородных ресурсных сетей
с «жадными» вершинами.....* 5

Управление в социально-экономических системах

Калмыков Н.С., Сидельников Ю.В.

*Экспериментальные исследования тестовых
вопросов на основе точечного коэффициента* 45

Управление техническими системами и технологическими процессами

Пономарев А.В.

*Применение теоретико-игровых методов и моделей
при проектировании систем масштабных человеко-
машинных вычислений.....* 73

Программы и системы моделирования объектов, средств и систем управления

Обухов Д.С.

*Разработка современной системы распознавания
русскоязычной телефонной речи* 106

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНЫХ ОДНОРОДНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ С «ЖАДНЫМИ» ВЕРШИНАМИ¹

Жилякова Л. Ю.², Чаплинская Н. В.³
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Описана модификация графовой динамической модели «ресурсная сеть» – «ресурсная сеть с жадными вершинами». В этой модели вершины графа на каждом такте дискретного времени обмениваются ресурсом по ребрам, обладающим ограниченной пропускной способностью, причем сначала передают имеющийся ресурс себе в петлю, а оставшийся ресурс распределяют в смежные вершины по правилам «стандартной» ресурсной сети. Это два правила с пороговым переключением: если ресурс вершины превышает суммарную пропускную способность всех ее исходящих ребер, она отдает по полной пропускной способности в каждое ребро, в противном случае отдает весь ресурс, деля его пропорционально пропускным способностям исходящих ребер. Исследуется процесс функционирования полной однородной ресурсной сети с «жадными» вершинами при разной величине суммарного ресурса и различных начальных состояниях. Описаны возможные состояния сети; выявлено нехарактерное для стандартной модели состояние – остановка сети. Найдены два пороговых значения суммарного ресурса, разделяющих зоны различного поведения сети: первое разделяет зоны «недостаточного» и «достаточного» ресурса, второе – зоны «достаточного малого» и «достаточного большого» ресурса. В каждой зоне описано функционирование сети и исследованы предельные состояния и потоки. Для всех характерных ситуаций приведены примеры, демонстрирующие согласованность аналитических результатов с численными экспериментами.

Ключевые слова: ресурсная сеть, модель «жадных» вершин, графовая динамическая пороговая модель.

1. Введение

Ресурсная сеть – графовая динамическая потоковая модель, в которой в дискретном времени происходит перераспределение ресурса между вершинами. Впервые модель была предложена

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты № 20-07-00190А, 19-07-00525А.

² Людмила Юрьевна Жилякова, д.ф.-м.н., в.н.с., (zhilyakova.ludmila@gmail.com).

³ Надежда Васильевна Чаплинская, техник (nadya1462@gmail.com).

в [11] и получила дальнейшее развитие в ряде работ, результаты которых аккумулированы в [9, 10]. Ресурсная сеть представляет собой ориентированный взвешенный граф. Веса ребер обозначают их пропускные способности. Вершины распределяют ресурс по двум правилам с пороговым переключением, которое происходит в зависимости от количества ресурса, находящегося в данный момент в вершине. Если это количество превосходит суммарный вес исходящих из вершины ребер, то в каждую смежную вершину передается ресурс, равный пропускной способности соответствующего ребра. Иначе вершина отдает весь свой ресурс смежным вершинам пропорционально пропускным способностям соединяющих с ней ребер. На каждом такте дискретного времени t вершины, имеющие ресурс, отдают его одновременно.

Для описанной модели получены результаты, позволяющие для каждой топологии сети и пропускных способностей ее ребер, для любого суммарного ресурса и его начального распределения по вершинам определить предельный поток и предельное состояние вершин сети. Также определена формула, позволяющая для произвольной сети вычислить пороговое значение ресурса T , при переходе через которое сеть изменяет свое поведение (см. [9]).

При суммарном ресурсе W , не превосходящем T , т.е. при *малом ресурсе*, все вершины сети функционируют по одному правилу и отдают весь ресурс на каждом такте. Динамика сети в этом случае описывается моделью рассеяния на графах [16, 21]. Модели рассеяния хорошо изучены – для графов с постоянной топологией они описываются однородными цепями Маркова. Аппарат однородных цепей Маркова применяется при моделировании процессов во многих предметных областях, в частности при решении задач о нахождении консенсуса в многоагентных системах [4, 5], социальных сетях [7] и многих других.

При суммарном ресурсе выше порогового значения, т.е. при *большом ресурсе*, процесс функционирования сети описывается неоднородной цепью Маркова. Некоторые вершины сети в этом случае накапливают излишки ресурса (такие вершины были названы аттракторами [9]). Вершины, имеющие большой ресурс,

ведут себя как «стреляющие вершины» в пороговой модели «игра выстреливания фишек» (chip-firing game) [15, 19, 22]. Эта игра на графе стала широко известна благодаря тому, что нашла применение в описании схода лавин разной природы – она легла в основу математической модели «абелева куча песка» [20, 24], которая, в свою очередь, применяется в моделировании сложных природных и социальных процессов, названных «самоорганизованной критичностью» [13, 14, 17, 18, 23].

За время с момента появления модели «ресурсная сеть» в 2009 году, был создан и исследован ряд ее модификаций. В монографии [10] введена модель с ограничениями на ёмкость вершин-аттракторов. С помощью этого ограничения некоторые не-аттрактивные вершины сети получили возможность также накопить некоторые излишки ресурса. Для таких сетей было введено понятие «вторичной аттрактивности».

В работах [1, 2] были рассмотрены ресурсные сети на графах с нестандартной достижимостью [8]. В [1] введены и описаны ресурсные сети с вентильной достижимостью, в [2] – с магнитной достижимостью. В статье [3] предложены двухресурсные сети и, как и в самой первой работе по ресурсным сетям [11], рассмотрен частный случай: полные однородные сети. Динамические ресурсные сети (сети, веса дуг которых могут принимать более одного значения) предложены и описаны в [12].

Еще один научный коллектив исследовал применение ресурсных сетей с нестандартной достижимостью при построении моделей телекоммуникационных систем [6].

Настоящая статья посвящена новой модификации ресурсных сетей – ресурсной сети с «жадными» вершинами. Отличие этой модели заключается в том, что каждая вершина передает ресурс сначала в свою петлю (если она есть) и только затем остатки распределяет в другие вершины. Как и в других случаях, мы начинаем исследование с частного случая: полной однородной сети с петлями.

2. Ресурсные сети – основные понятия

Формальное описание ресурсной сети с «жадными» вершинами наследует все понятия обычной ресурсной сети. Дадим основные определения и опишем функционирование «стандартной» сети.

Ресурсной сетью называется связный ориентированный граф $G = (V, E)$ с вершинами $v_i \in V$ и ребрами $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$; $|V| = n$. Ребра графа имеют неотрицательные веса r_{ij} , обозначающие их *пропускные способности*; $R = (r_{ij})_{n \times n}$ – *матрица пропускных способностей*. Вершинам графа приписываются неотрицательные числа $q_i(t)$, изменяющиеся в дискретном времени t и называемые *ресурсами*. Вершины могут хранить неограниченное количество ресурса.

Состоянием $Q(t)$ сети в момент времени t называется вектор $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, содержащий значения ресурсов в вершинах в момент t .

Состояние $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ называется *предельным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначив суммарный ресурс всех вершин через W , можно записать *закон сохранения*, выполняющийся в сети: $\forall t \sum_{i=1}^n q_i(t) = W$.

$r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}$ и $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ – входная и выходная пропускные способности вершины соответственно. Пропускная способность петли, если она существует, входит в обе суммы. Суммарная пропускная способность сети: $r_{sum} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}$.

В каждый момент t вершины v_i , $i = 1, \dots, n$, передают ресурс по выходящим ребрам. *Стандартная модель* ресурсной сети характеризуется следующими правилами:

В момент t вершина v_i отдает в ребро e_{ij} , соединяющее ее с вершиной v_j :

- r_{ij} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);
- $\frac{r_{ij}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

Смысл этих правил заключается в следующем. Правило 1 работает тогда, когда вершина содержит ресурса больше, чем может отдать, т.е. по каждому ребру отдается ресурс, равный пропускной способности этого ребра, а всего отдается $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ ресурса. По правилу 2 вершина отдает весь свой ресурс, причем он распределяется пропорционально пропускным способностям ребер. Если ресурс в вершине равен выходной пропускной способности вершины: $q_i(t) = r_i^{out}$, то применение правил 1 и 2 даст одинаковые результаты.

Множество вершин, для которых $q_i(t) \leq r_i^{out}$, называется *зоной* $Z^-(t)$; множество вершин, для которых $q_i(t) > r_i^{out}$, называется *зоной* $Z^+(t)$.

Распределение ресурса происходит параллельно: на каждом такте все вершины, имеющие ресурс, отдают его во все исходящие ребра по правилу 1 или 2, в зависимости от его количества; вершины, смежные с ними, получают этот ресурс по входящим ребрам на следующем такте.

Важной характеристикой ресурсной сети является *пороговое значение ресурса* T : при $W \leq T$ все вершины, начиная с некоторого t' , переходят в зону $Z^-(t)$ (функционируют по правилу 2); при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста и не изменяется, начиная с некоторого t'' (существуют вершины, функционирующие по правилу 1). В [9] доказано, что в любой сети, кроме поглощающей, пороговое значение существует и единственно, а также предложены формулы, позволяющие найти значение T для всех классов сетей, в которых оно существует.

Поток ресурса

Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру e_{ij} в момент t , приходит в вершину v_j в момент $t + 1$. Между моментами t и $t + 1$ ресурс находится в ребре e_{ij} . Этот ресурс называется

ся потоком $f_{ij}(t)$. Общий поток $F(t)$ описывается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n \times n}$.

Величина $f_i^{out}(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(t)$ – ресурс, выходящий из вершины v_i в момент t .

Величина $f_j^{in}(t+1) = \sum_{i=1}^n f_{ij}(t)$ – ресурс, входящий в вершину v_j в момент $t+1$. Полагаем, что $f_j^{in}(0) = 0$.

3. Модель сети с «жадными» вершинами

3.1. ОПИСАНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим ресурсную сеть с наличием хотя бы одной петли. Ее функционирование определяется следующим образом:

Вершина v_i , имеющая петлю, на такте t отдает в петлю:

- r_{ii} ресурса, если $q_i(t) > r_{ii}$,
- весь свой ресурс $q_i(t)$, если $q_i(t) \leq r_{ii}$.

При этом в первом случае оставшийся ресурс $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r_{ii}$ распределяется между другими вершинами по правилам стандартной ресурсной сети.

Интерпретировать такую модель можно как ресурсную сеть, у которой есть «запасливые» (или «жадные») вершины, т.е. вершины, передающие имеющийся ресурс в первую очередь самим себе.

Определение 1. Будем говорить, что сеть остановилась на такте t , если $\forall i = \overline{1, n} \ q_i(t) \leq r_{ii}$.

Это определение говорит о том, что если количество ресурса во всех вершинах не превосходит пропускных способностей петель, то ресурс не перераспределяется между вершинами. Заметим, что остановка сети является частным случаем ее стабилизации.

Определение 2. Назовем вершину v_i насыщенной в момент времени t , если $q_i(t) \geq r_{ii}$, перенасыщенной, если $q_i(t) > r_{ii}$, и ненасыщенной, если $q_i(t) < r_{ii}$.

Утверждение 1. Вершина, насыщенная в момент времени t , в момент времени $t + 1$ также останется насыщенной.

Доказательство. Вершина v_i такова, что $q_i(t) \geq r_{ii}$. На такте $t + 1$ ресурс равный r_{ii} пойдет в петлю, а оставшийся ресурс $(q_i(t) - r_{ii})$ распределится между остальными вершинами по правилам стандартной ресурсной сети. Таким образом, на такте $t + 1$ имеем $q_i(t + 1) \geq r_{ii}$.

Для перенасыщенной вершины введем понятие *свободного ресурса*.

Определение 3. Свободный ресурс перенасыщенной вершины v_i – это ресурс, не задействованный петлей: $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r_{ii}$.

Пусть A – множество индексов насыщенных вершин:

$$(1) \quad A = \left\{ k \in \{1, \dots, n\} \mid q_k(t) \geq r_{kk} \right\}.$$

Суммарный свободный ресурс в сети на такте t обозначим $\Delta Q(t)$, $\Delta Q(t) = \sum_{i \in A} \Delta q_i(t)$.

3.2. СВОЙСТВА ПОЛНЫХ ОДНОРОДНЫХ СЕТЕЙ С «ЖАДНЫМИ ВЕРШИНАМИ»

В настоящем исследовании ограничимся исследованием полных однородных ресурсных сетей.

Ресурсная сеть называется *полной*, если $r_{ij} \neq 0 \forall i, j = \overline{1, n}$. *Однородность* сети означает, что $r_{ij} = r \forall i, j = \overline{1, n}$.

Утверждение 2. В полной однородной сети с «жадными» вершинами суммарное количество ресурса, полученное вершинами v_i, v_j от остальных вершин $v_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$, одинаково на каждом такте t .

Доказательство. Мы рассматриваем полную однородную сеть, а значит, и вершина v_i , и вершина v_j обязательно имеют ребра, соединяющие их с каждой из оставшихся вершин $v_k, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$.

Суммарный ресурс, получаемый вершиной v_i от вершин v_k , $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$, на такте t равен

$$f_i^{\{1..n\} \setminus \{i,j\}} = \sum_{k \in A \setminus \{i,j\}} \frac{\Delta q_k(t)}{n-1},$$

где A – множество насыщенных вершин (формула (1)).

Аналогично для вершины v_j :

$$f_j^{\{1..n\} \setminus \{i,j\}} = \sum_{k \in A \setminus \{i,j\}} \frac{\Delta q_k(t)}{n-1}.$$

Таким образом, $f_i^{\{1..n\} \setminus \{i,j\}} = f_j^{\{1..n\} \setminus \{i,j\}}$.

3.3. ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕСУРСА

В стандартной ресурсной сети существует одно пороговое значение T , разделяющее ресурс на малый, когда все вершины на каждом такте отдают весь свой ресурс, и большой, когда излишки ресурса накапливаются в одной или нескольких вершинах (см. раздел 2).

Поведение сети с «жадными» вершинами сложнее. Определение 1 говорит о том, что существуют ситуации, в которых вершины перестают обмениваться ресурсом (сеть останавливается). В стандартных эргодических сетях такая ситуация невозможна.

В ресурсных сетях с «жадными» вершинами существуют два пороговых значения суммарного ресурса T_1 и T_2 , которые разделяют зоны различного поведения сети. Если $W \leq T_1$ сеть останавливается – за конечное число тактов, или асимптотически, в зависимости от начального состояния.

Определение 4. Суммарное значение ресурса, при котором функционирование сети останавливается, будем называть недостаточным.

Максимальное значение ресурса, при котором вершины могут не обмениваться ресурсом, равно rn . Если в начальном состоянии этот ресурс распределить равномерно по n вершинам, сеть

«остановится» на нулевом такте. Будем полагать, что для некоторых начальных состояний $T_1 = rn$. В следующем разделе будет доказано, что это значение единственно для любого начального состояния сети.

Если $W > rn$, на каждом такте будет существовать хотя бы одна вершина с ресурсом, превосходящим пропускную способность петли r . Это означает, что такая сеть никогда не остановится.

Определение 5. Суммарное значение ресурса, при котором функционирование сети не останавливается, будем называть достаточным.

Достаточный ресурс, по аналогии со стандартной сетью, делится порогом T_2 на *малый* ($T_1 < W \leq T_2$) и *большой* ресурс ($W > T_2$). Будет показано, что величина T_2 совпадает с пороговым значением $T = rn^2$ стандартной полной однородной сети.

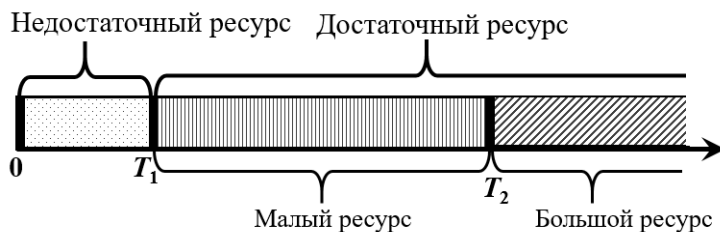


Рис. 1. Схема пороговых значений суммарного ресурса в сети с «жадными» вершинами

3.4. НЕДОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС

Рассмотрим функционирование сети при $W \leq rn$. В этом случае общее количество ресурса не превосходит сумму пропускных способностей петель.

Нетрудно убедиться, что в этом случае предельное состояние зависит от начального распределения ресурса. Например, если ресурс настолько мал, что в каждой вершине не превосходит r , то предельное состояние совпадает с начальным. Сформулируем

ряд утверждений о возможных поведениях сети при недостаточном ресурсе.

Пусть $Q(0)$ – вектор начального состояния сети с n вершинами. Упорядочим вектор $Q(0)$ по убыванию его координат и в соответствии с этим перенумеруем вершины. Тогда вершина v_1 хранит наибольшее количество ресурса, а вершина v_n – наименьшее.

Утверждение 3. (Тривиальный случай.) Если $q_1(0) \leq r$, то сеть остановится на такте $t = 0$. Начальное состояние в данном случае будет предельным.

Доказательство. $q_1(0) \leq r \Rightarrow \forall i = \overline{2, n} \ q_i(0) \leq q_1(0) \leq r$, а, значит, по определению, сеть остановилась на такте $t = 0$.

Утверждение 4. (Достаточное условие бесконечного функционирования сети.) Пусть $W \leq rn$. Если $q_1(0) > r$ и $q_2(0) \geq r$, то сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Замечание 1. Для каждой насыщенной вершины сходимость к предельному состоянию, в котором она остановится, имеет характер затухающих колебаний.

Рассмотрим частный случай, когда ресурс сосредоточен только в двух первых вершинах. Для этого случая можно найти вектор предельного состояния в явном виде.

Утверждение 5. Пусть в полной однородной сети с «жадными» вершинами $W \leq rn$; $q_1(0) > r$ и $q_2(0) \geq r$, $q_i(0) = 0$, $i = \overline{3, n}$. Тогда ее предельное состояние задается вектором

$$(2) \quad Q^* = \left(r, r, \frac{W - 2r}{n - 2}, \dots, \frac{W - 2r}{n - 2} \right).$$

Доказательство. По утверждению 2, суммарный ресурс, полученный вершинами v_1 и v_2 от остальных вершин v_i , $i = \overline{3, n}$, одинаков. Обозначим его через $w_{rest}(0)$.

По условию $w_{rest}(0) = 0$.

Докажем, что $\forall t \ w_{rest}(t) = 0$.

В самом деле, если $w_{rest}(0) = 0$, это означает, что все вершины v_i , $i = \overline{3, n}$, получили ресурс, больший r , – это напрямую

следует из утверждения 2. Вершины v_i , $i = \overline{3, n}$, получают попарно одинаковый ресурс, а значит, их входной поток одинаков, в силу полноты сети и их симметричности относительно вершин v_1 и v_2 . Но если для некоторого значения t $q_i(t) > r$, $i = \overline{3, n}$, то неравенство $W \leq rn$ не может быть выполненным: в силу утверждения 1 вершины v_1 и v_2 также останутся насыщенными, и суммарный ресурс превысит rn . Таким образом, $\forall t$ $w_{rest}(t) = 0$. Тогда динамика ресурса в первых двух вершинах будет следующей:

$$\begin{aligned} q_1(1) &= r + \frac{q_2(0) - r}{n - 1}, \quad q_2(1) = r + \frac{q_1(0) - r}{n - 1}, \\ q_1(2) &= r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^2}, \quad q_2(2) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^2}, \\ &\dots \\ q_1(t) &= r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^t}, \quad q_2(t) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^t}, \end{aligned}$$

если t – четное, и

$$q_1(t) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^t}, \quad q_2(t) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^t},$$

если t – нечетное.

Пределом последовательности состояний вершин v_1 и v_2 при $t \rightarrow \infty$ будет r . По закону сохранения общего ресурса W в сети на остальные вершины в пределе останется $(W - 2r)$ ресурса, т.е. на каждую вершину v_i , $i = \overline{3, n}$, придется $\frac{W - 2r}{n - 2}$ ресурса:

$$W < rn \rightarrow \frac{W - 2r}{n - 2} < r.$$

Таким образом, предельное состояние описывается вектором (2).

Пример 1. В данном примере и в последующих будем рассматривать функционирование однородной ресурсной сети с пятью вершинами и единичными пропускными способностями: $r = 1$.

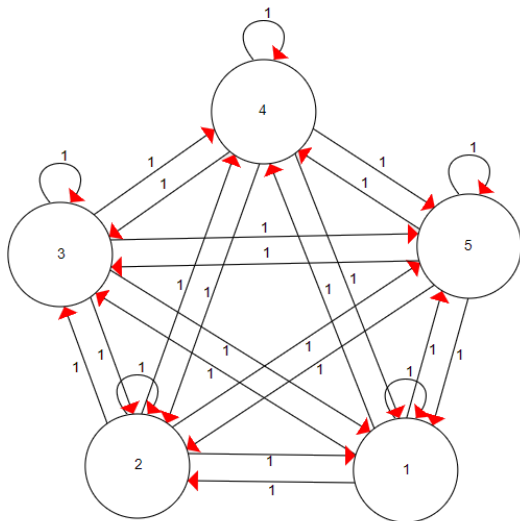


Рис. 2. Однородная ресурсная сеть с пятью вершинами, $r = 1$

Начальное состояние задано вектором: $Q(0) = (1,7; 1; 0,9; 0,6; 0,4)$. Суммарный ресурс $W = 4,6 < rn = 5$, что удовлетворяет условию «недостаточности» ресурса. При этом $q_1(0) = 1,7 > r$ и $q_2(0) = 1 = r$, а, значит, согласно утверждению 4, сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.

Ресурс насыщенных вершин v_1, v_2 сходится к предельному состоянию в виде затухающих колебаний (рис. 3, таблица 1). Вершина v_3 также становится насыщенной на втором такте, поэтому и сходимость ее ресурса к предельному состоянию также имеет характер затухающих колебаний. Вершинам v_4, v_5 для насыщения не хватает начального ресурса; в этих вершинах ресурс увеличивается монотонно и в пределе не превосходит пропускной способности петли.●

Рассмотрим функционирование сети в нетривиальном случае ($q_1(0) > r$) с произвольным начальным состоянием.

Утверждение 6. Пусть $W \leq rn$; $q_1(0) > r$. Тогда если $q_2(0) \leq \frac{rn - q_1(0)}{n-1}$, то сеть остановится на первом такте с со-

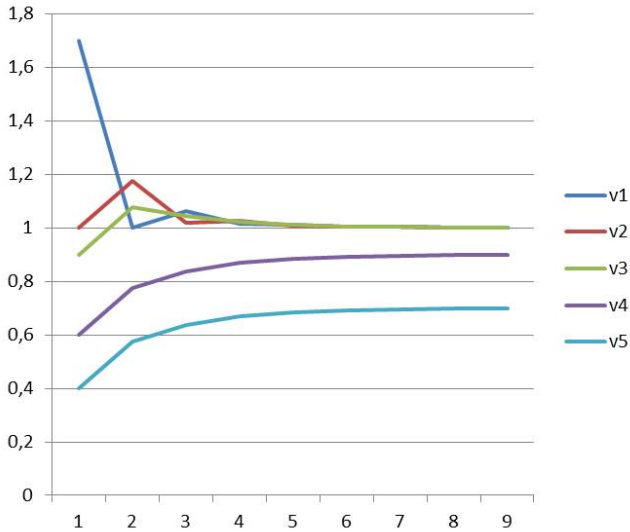


Рис. 3. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (1,7; 1; 0,9; 0,6; 0,4)$

Таблица 1. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (1,7; 1; 0,9; 0,6; 0,4)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	1,7000	1,0000	0,9000	0,6000	0,4000
1	1,0000	1,1750	1,0750	0,7750	0,5750
2	1,0625	1,0188	1,0437	0,8375	0,6375
3	1,0156	1,0266	1,0203	0,8687	0,6687
...	...	...	...	...	...
10	1,0002	1,0002	1,0002	0,8998	0,6998
11	1,0001	1,0001	1,0001	0,8999	0,6999
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,8999	0,6999
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9000	0,7000
14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9000	0,7000
...	...	...	...	...	...

стоянием $Q^* = \left(r, q_2(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1}, \dots, q_n(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1} \right)$. Иначе сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.

Доказательство. На первом такте вершина v_1 отдает в собственную петлю полную ее пропускную способность r , в остальные вершины она отдает $\frac{q_1(0)-r}{n-1}$ ресурса.

Пусть для вершины v_2 выполняется условие $q_2(0) < r$, так как в противном случае, согласно утверждению 4, сеть функционирует бесконечно и останавливается в пределе. В таком случае вершина v_2 на первом такте имеет состояние $q_2(1) = q_2(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1}$.

Теперь если $q_2(1) \leq r$, т.е. $q_2(0) \leq \frac{rn-q_1(0)}{n-1}$, то, по определению, сеть остановится на такте $t = 1$, так как во всех вершинах ресурса не больше, чем пропускная способность петли. Заметим, что $q_2(0) \leq \frac{rn-q_1(0)}{n-1} < \frac{rn-r}{n-1} = r$, т.е. условие $q_2(0) < r$ заведомо выполнено.

Если же $q_2(0) > \frac{rn-q_1(0)}{n-1}$ (а это то же самое, что $q_2(1) > r$), то, получив на первом такте $q_1(1) = r$ и перенумеровав вершины в порядке убывания ресурса (теперь $q_1(1) > r$ и $q_2(1) = r$), имеем ситуацию, удовлетворяющую достаточному условию бесконечно-го функционирования сети и ее остановки в пределе (утверждение 4).

Таким образом, если $q_2(0) \leq \frac{rn-q_1(0)}{n-1}$, то сеть остановится на первом такте с состоянием

$$Q^* = \left(r, q_2(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1}, \dots, q_n(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1} \right).$$

Если $q_2(0) > \frac{rn-q_1(0)}{n-1}$, то сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.

Приведем в пример, иллюстрирующий утверждение 6.

Пример 2. Рассмотрим полную однородную сеть с пятью «жадными» вершинами, $r = 1$.

1. Рассмотрим динамику распределения ресурса между вер-

шинами при следующем начальном состоянии:

$$Q(0) = (3; 0,5; 0,3; 0,2; 0).$$

Здесь суммарный ресурс $W = 4$, что удовлетворяет условию «недостаточного» ресурса: $W \leq rn = 5$, где $n = 5$, $r = 1$. При этом $q_1(0) = 3 > r$ и $q_2(0) = 0,5 \leq \frac{rn - q_1(0)}{n - 1} = \frac{5 - 3}{5 - 1} = 0,5$, а, значит, согласно утверждению 6, сеть остановится на первом же такте с состоянием

$$\begin{aligned} Q^* &= \left(r, q_2(0) + \frac{q_1(0) - r}{n - 1}, q_3(0) + \frac{q_1(0) - r}{n - 1}, \right. \\ &\quad \left. q_4(0) + \frac{q_1(0) - r}{n - 1}, q_5(0) + \frac{q_1(0) - r}{n - 1} \right) = \\ &= \left(1; 0,5 + \frac{3 - 1}{5 - 1}; 0,3 + \frac{3 - 1}{5 - 1}; 0,2 + \frac{3 - 1}{5 - 1}; 0 + \frac{3 - 1}{5 - 1} \right) = \\ &= (1; 1; 0,8; 0,7; 0,5). \end{aligned}$$

Результаты программной реализации процесса функционирования сети приведены в таблице 2.

Таблица 2. Протокол работы сети с начальным состоянием

$$Q(0) = (3; 0,5; 0,3; 0,2; 0)$$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	3,0000	0,5000	0,3000	0,2000	0,0000
1	1,0000	1,0000	0,8000	0,7000	0,5000
2	1,0000	1,0000	0,8000	0,7000	0,5000

2. Рассмотрим динамику распределения ресурса между вершинами при другом начальном состоянии:

$$Q(0) = (3; 1; 0; 0; 0).$$

Здесь суммарный ресурс также $W = 4$. При этом $q_1(0) = 3 > r$ и $q_2(0) = 1 > \frac{rn - q_1(0)}{n - 1} = \frac{5 - 3}{5 - 1} = 0,5$, а, значит, согласно утверждению 6, сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь

в пределе. При этом, так как $q_3(0) = q_4(0) = q_5(0) = 0$, выполняются условия утверждения 5, и предельное состояние вычисляется по формуле (2).

Имеем:

$$\frac{W - 2r}{n - 2} = \frac{4 - 2}{5 - 2} = 0,6667.$$

Тогда

$$Q^* = (1; 1; 0,6667; 0,6667; 0,6667).$$

Результаты программной реализации процесса функционирования сети представлены в таблице 3 и на рис. 4.●

Таблица 3. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 1; 0; 0; 0)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	3,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	1,0000	1,5000	0,5000	0,5000	0,5000
2	1,1250	1,0000	0,6250	0,6250	0,6250
3	1,0000	1,0313	0,6563	0,6563	0,6563
4	1,0078	1,0000	0,6641	0,6641	0,6641
5	1,0000	1,0020	0,6660	0,6660	0,6660
6	1,0005	1,0000	0,6665	0,6665	0,6665
7	1,0000	1,0001	0,6666	0,6666	0,6666
8	1,0000	1,0000	0,6667	0,6667	0,6667
9	1,0000	1,0000	0,6667	0,6667	0,6667
...	...	...	...	...	...

Теорема 1. Первое пороговое значение ресурса T_1 полной однородной сети с «жадными» вершинами, отделяющее недостаточный ресурс от достаточного, единственно и равно rn для любого начального состояния.

Доказательство. Утверждения 3 и 6 рассматривают все случаи распределения суммарного ресурса, не превосходящего rn . В каждом из этих случаев предельное состояние существует и сеть в нем останавливается.

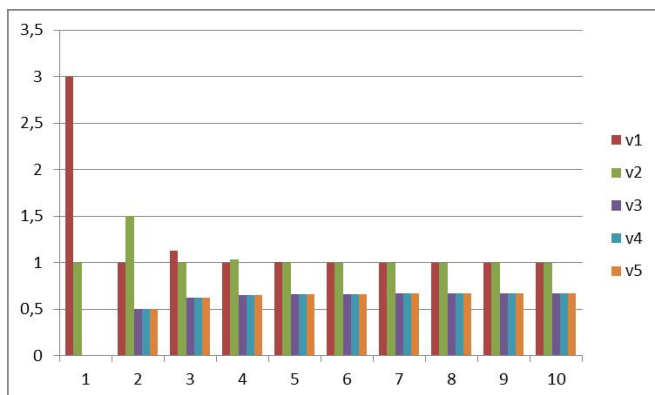


Рис. 4. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 1; 0; 0; 0)$

При суммарном ресурсе, строго большем rn , на каждом такте t хотя бы одна вершина будет иметь ресурс, больший r , а это означает, что $T_1 = rn$.

3.5. ДОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС

Рассмотрим функционирование сети при $W > T_1 = rn$. В этом случае сеть не останавливается.

Утверждение 7. При суммарном ресурсе $W > T_1$ все вершины полной однородной сети с «жадными» вершинами насыщаются за конечное число тактов.

Доказательство см. в приложении.

Поскольку в сети с «жадными» вершинами при достаточном ресурсе через конечное число тактов все вершины насыщаются, после насыщения ресурс, равный rn , находящийся в петлях, не участвует в потоке между вершинами. Рассмотрим сеть без петель с суммарным ресурсом $W - rn$. Полученная сеть в таком случае будет функционировать как стандартная модель с «нежадными» вершинами.

Утверждение 8. Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W > rn$ с момента насыщения всех вершин функционирует эквивалентно соответствующей

стандартной ресурсной сети без петель, у которой ресурс в каждой вершине уменьшен на величину пропускной способности петли r .

Замечание 2. Здесь и далее будем говорить о сетях с количеством вершин $n > 2$, так как в случае $n = 2$ при переходе к эквивалентной стандартной сети, «отбросив» петли, мы получим нерегулярную сеть – эта сеть будет циклической с периодом 2; при малом ресурсе она не имеет предельного состояния.

В силу утверждения 8, на полную однородную сеть с «жадными» вершинами при $W > T_1$ переносятся свойства полной однородной стандартной ресурсной сети без петель.

Рассмотрим свойства полных однородных стандартных ресурсных сетей, описанные в [11], которые верны и для сетей без петель.

Свойство 1. Если для некоторого t' выполняется равенство $q_i(t') = q_j(t')$, то для всех $t > t'$ также выполняется $q_i(t) = q_j(t)$.

Это следует из того, что с момента t обе вершины получают одинаковое количество ресурса.

Свойство 2. Если для некоторого t' вершина v_i находится в зоне $Z^-(t')$, то для всех $t > t'$ вершина v_i будет находиться в зоне $Z^-(t)$.

Это следует из того, что v_i в момент времени t' отдает весь свой ресурс, а получить может не более чем $r(n - 1)$. То есть $q_i(t' + 1) \leq r(n - 1) = r_i^{out}$, значит, вершина не может покинуть зону $Z^-(t)$.

Свойство 3. Если все вершины находятся в зоне $Z^+(t)$, то состояние $Q(t)$ устойчиво.

Это следует из того, что все вершины получают и отдают $r(n - 1)$ ресурса.

Однако, ввиду отсутствия петель, следующие два свойства полной однородной сети не могут быть применимы к нашей модели.

Свойство 4. Для любых t входные потоки всех вершин совпадают: $f_i^{in}(t) = f_j^{in}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$.

Свойство 5. Если в момент t вершины $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ ($m \leq n$) находятся в зоне $Z^-(t)$, то $q_{i_1}(t+1) = \dots = q_{i_m}(t+1)$.

Для проверки свойства 4 рассмотрим две любые вершины, например, v_1 и v_2 .

В силу однородности сети, $\forall t \ f_{i1}(t) = \dots = f_{in}(t)$, $i = \overline{1, n}$. Расписав входные потоки вершин v_1 и v_2 , получим:

$$f_1^{in}(t) = f_{21}(t) + f_{31}(t) + \dots + f_{n1}(t),$$

$$f_2^{in}(t) = f_{12}(t) + f_{32}(t) + \dots + f_{n2}(t),$$

так как $f_{11}(t) = f_{22}(t) = 0$ (петли отсутствуют).

$$f_1^{in}(t) - f_2^{in}(t) = f_{21}(t) - f_{12}(t),$$

что в общем случае не равно нулю, а, значит, свойство 4 не выполняется для полных однородных сетей без петель.

Поскольку вершины зоны $Z^-(t)$ отдадут весь свой ресурс, то их ресурс в момент $t+1$ равен поступающему к ним входному потоку. Поэтому свойство 5 в общем случае также не выполняется.

Непосредственно из утверждения 8 следует центральный результат этого раздела.

Теорема 2. Второе пороговое значение полной однородной сети с «жадными» вершинами T_2 совпадает с пороговым значением соответствующей стандартной сети с петлями: $T_2 = T = rn^2$.

В самом деле, сеть с «жадными» вершинами при $W > rn$ ведет себя так же, как стандартная сеть без петель с ресурсом $W - rn$. Ее пороговое значение $T = rn^2 - rn$ (Теорема 2.1 [10]). Вернув назад петли вместе с циркулирующим в них ресурсом, равным rn , получим: $T_2 = T = rn^2$.

3.5.1. Малый ресурс

Рассмотрим функционирование сети при малом ресурсе: $T_1 < W \leq T_2$.

Случаи $W < T_2$ и $W = T_2$ рассмотрим отдельно.

Для описания процесса распределения ресурса между вершинами удобно говорить о ресурсной сети как о потоковой модели.

Введем два вектора:

$$out(t) = (f_1^{out}(t), \dots, f_n^{out}(t)), in(t+1) = (f_1^{in}(t+1), \dots, f_n^{in}(t+1)).$$

Тогда процесс функционирования сети можно записать в следующем виде:

$$Q(t+1) = Q(t) - out(t) + in(t+1).$$

Таким образом, переход из состояния в состояние можно описать в терминах матрицы $F(t)$.

Следующие утверждения доказываются в терминах потоков. Доказательства приведены в приложении.

Утверждение 9. При $W < T_2$ вне зависимости от начального состояния $Q(0)$ все вершины полной однородной ресурсной сети с «жадными» вершинами переходят в зону $Z^-(t)$ за конечное число тактов.

Утверждение 10. Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W < T_2$ с момента насыщения всех вершин функционирует согласно формуле

$$(3) \quad Q(t+1) = Q(t)R', \quad R' = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W < T_2$ вне зависимости от начального состояния $Q(0)$ стабилизируется с предельным состоянием

$$Q^* = \left(\frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n} \right).$$

Пример 3. Рассмотрим однородную ресурсную сеть с пятью «жадными» вершинами, $r = 1$ (см. рис. 1).

Рассмотрим динамику распределения ресурса между вершинами при начальном состоянии, подобранном таким образом, чтобы все вершины были уже насыщенными:

$$Q(0) = (3; 2; 2; 1; 1).$$

Суммарный ресурс $W=9$ удовлетворяет условию $rn < W \leq rn^2$, а значит, согласно утверждению 12, сеть стабилизируется с предельным состоянием $Q^* = \left(\frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n}\right) = (1,8; \dots; 1,8)$. Протокол работы сети приведен в таблице 4.

Таблица 4. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 2; 2; 1; 1)$ (модель «жадных» вершин)

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	3,0000	2,0000	2,0000	1,0000	1,0000
1	1,5000	1,7500	1,7500	2,0000	2,0000
2	1,8750	1,8125	1,8125	1,7500	1,7500
3	1,7813	1,7969	1,7969	1,8125	1,8125
4	1,8047	1,8008	1,8008	1,7969	1,7969
5	1,7988	1,7998	1,7998	1,8008	1,8008
6	1,8003	1,8000	1,8000	1,7998	1,7998
7	1,7999	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
8	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
9	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
...	...	...	...	...	...

Теперь рассмотрим функционирование соответствующей стандартной сети. Здесь начальное состояние не будет включать ресурс, задействованный петлями:

$$Q(0) = (2; 1; 1; 0; 0).$$

Заметим, что для стандартной сети матрица пропускных способностей будет иной, так как мы не учитываем петли: $r_{ij} = 1$, если $i \neq j$, и $r_{ij} = 0$, если $i = j$.

Таблица 5. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (2; 1; 1; 0; 0)$ (стандартная модель)

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	2,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
1	0,5000	0,7500	0,7500	1,0000	1,0000
2	0,8750	0,8125	0,8125	0,7500	0,7500
3	0,7813	0,7969	0,7969	0,8125	0,8125
4	0,8047	0,8008	0,8008	0,7969	0,7969
5	0,7988	0,7998	0,7998	0,8008	0,8008
6	0,8003	0,8000	0,8000	0,7998	0,7998
7	0,7999	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000
8	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000
9	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000
...	...	...	...	...	...

Рисунки 5 и 6 позволяют сравнить функционирование сети с «жадными» вершинами и соответствующей ей стандартной сети без петель.●

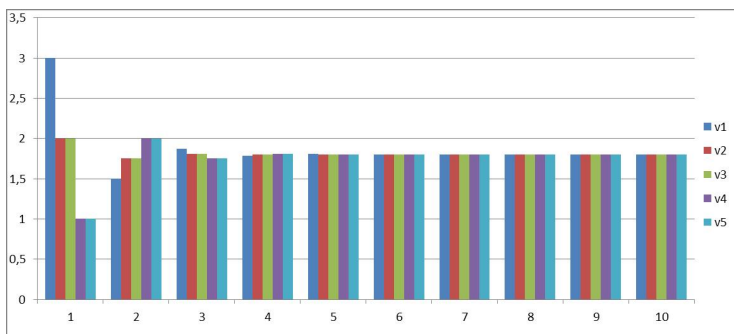


Рис. 5. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 2; 2; 1; 1)$ (модель «жадных» вершин)

Рассмотрим случай $W = rn^2$. Для него утверждение, что все вершины сети за конечное число тактов перейдут в зону $Z^-(t)$ неверно: ресурс хотя бы одной из вершин в этой ситуации будет

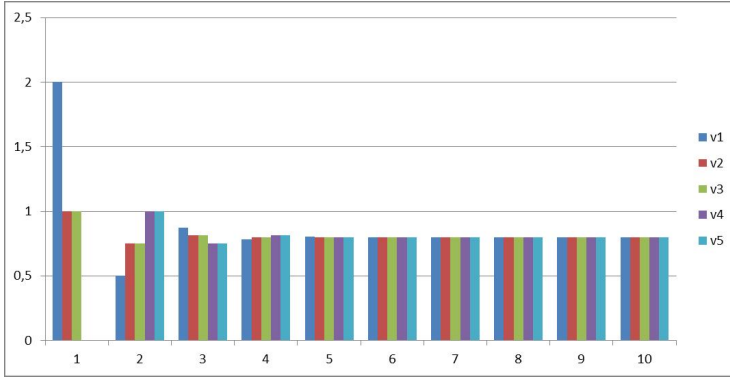


Рис. 6. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (2; 1; 1; 0; 0)$ (стандартная модель)

стремиться к rn сверху. Поэтому формула для вычисления следующего состояния сети по предыдущему также неприменима: хотя бы одна из вершин будет функционировать по правилу 1. Однако можно показать, что и в таком случае зоны «достаточного малого» ресурса сеть стабилизируется с тем же самым предельным состоянием:

$$Q^*(t) = \left(\frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n} \right) = (rn, \dots, rn).$$

Теорема 4. Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W = rn^2$ вне зависимости от начального состояния $Q(0)$ стабилизируется с предельным состоянием

$$Q^*(t) = (rn, \dots, rn).$$

3.5.2. Большой ресурс

Рассмотрим функционирование сети при $W > T_2 = rn^2$. «Большой ресурс» означает, что при любом начальном состоянии $Q(0)$ в любой момент времени зона $Z^+(t)$ будет непуста.

Функционирование сети с «жадными вершинами» при большом ресурсе наиболее близко к функционированию соответствующему

ющей стандартной сети без петель.

Свойства стандартных полных однородных ресурсных сетей без петель при большом ресурсе выполняются и для модели «жадных» вершин.

Утверждение 11. Если все вершины находятся в зоне $Z^+(t)$, то состояние $Q(t)$ устойчиво.

Доказательство. Справедливость этого свойства вытекает из того факта, что входной и выходной потоки каждой вершины одинаковы и равны rn .

Утверждение 12. При большом суммарном ресурсе $W > T_2$ для произвольного начального состояния $Q(0)$ предельное состояние существует.

Утверждение 13. Пусть при большом суммарном ресурсе $W > T_2$ для произвольного начального состояния $Q(0)$ ресурс в вершинах упорядочен по убыванию и первые k вершин находятся в зоне $Z^+(0)$, а остальные $n - k$ вершин – в зоне $Z^-(0)$:

$$q_1(0) \geq \dots q_k(0) > rn \geq q_{k+1}(0) \geq q_n(0).$$

Тогда вектор предельного состояния Q^* будет иметь вид

$$Q^* = (rn + \delta q_1, \dots, rn + \delta q_l, rn, \dots, rn),$$

где $l \leq k$; $\delta q_i, i = 1, \dots, l$ – излишки ресурса вершин, оставшихся в зоне Z^{+*} .

4. Заключение

Предложена и формально описана неклассическая модель ресурсной сети – сеть с «жадными» вершинами. «Жадность» вершин заключается в том, что на каждом такте они передают ресурс сначала в свою петлю, а после этого остаток распределяют в исходящие рёбра. Была исследована сеть, представленная полным однородным графом (полным графом, у которого веса ребер одинаковы).

Описано функционирование сети при любом количестве ре-

сурса, доказана сходимость процессов перераспределения ресурса, найдены предельные состояния. Показано, что при некоторых значениях суммарного ресурса сеть останавливается. Это особенно примечательно тем, что в стандартной регулярной сети остановка функционирования невозможна.

Найдены пороговые значения $T_1 = rn$ и $T_2 = rn^2$, разграничивающие зоны различного поведения сети:

- 1) «недостаточный» ресурс: $W \leq T_1$,
- 2) «достаточный» ресурс: $W > T_1$
 - а) «достаточный малый» ресурс: $T_1 < W \leq T_2$,
 - б) «достаточный большой» ресурс: $W > T_2$.

В дальнейшем планируется изучение сетей с «жадными» вершинами для других топологий; нахождение их основных характеристик, исследование устойчивости и нахождение векторов предельных состояний и потоков для разных величин суммарного ресурса и начальных состояний сети.

Литература

1. АБДУЛПРАХМАН Х., ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с вентильной достижимостью* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №4. – 12 с.
2. АБДУЛПРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с магнитной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – №4. – С. 4–10.
3. АБДУЛПРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Полные двух-ресурсные сети с петлями* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – №2. – С. 10–16.
4. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – Вып. 30.1 – С. 470–505.

5. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
6. АНТОНОВА В.М., ЗАХИР Б.М., КУЗНЕЦОВ Н.А. *Моделирование графов с различными видами достижимости с помощью языка Python* // Информационные процессы. – 2019. – Том 19, №2. – С. 159–169.
7. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети. Модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010. – 228 с.
8. ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А., КУЗЬМИНОВА М.В., ПЕТРОСЯН А.Г. *Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения*. – Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. – 195 с.
9. ЖИЛЯКОВА Л.Ю., КУЗНЕЦОВ О.П. *Теория ресурсных сетей: монография*. – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017. – 283 с.
10. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Ресурсные сети с ограничениями на ёмкость вершин [Электронный ресурс]: монография*. – М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 160 с.
11. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
12. СКОРОХОДОВ В.А., АБДУЛРАХМАН Х. *Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – №4. – С.186-194.
13. BAK P., TANG C., WIESENFELD K. *Self-organized criticality* // Phys. Rev. A. – 1988. – Vol. 38, No. 1. – P. 364–374.
14. BAK P., CHEN K. *Self-organized criticality* // Scientif. Am. – 1991. – No. 264. – P. 46–53.
15. BJORNER A., LOVASZ L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – No. 1. – P. 305–328.

16. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction (Springer Series in Synergetics)*. – Springer-Verlag – Berlin – Heidelberg, 2011. – 262 p.
17. DHAR D. *The abelian sandpile and related models* // Physica A: Statist.l Mechan. Appl. – 1 February, 1999. – Vol. 263, No. 1–4. – P. 4–25.
18. DHAR D., SADHU T., CHANDRA S. *Pattern formation in growing sandpiles* // Eur. Phys. Lett. – 2009. – Vol. 85, No. 4. – 48002. 2009. arXiv:0808.1732 [cond-mat.stat-mech]
19. GLASS D., KAPLAN N. *Chip-Firing Games and Critical Groups* // Cornell University 12 Aug 2019 arXiv 1908.04395 [math.CO]
20. IVASHKEVICH E.V., PRIEZZHEV V.B. *Introduction to the sandpile model* // Physica. – 1998. – A 254. – P. 97–116.
21. MASUDA N., PORTER M.A., LAMBIOTTE R. *Random walks and diffusion on networks* / Physics Reports. – 2017. – Vol. 716–717. – P. 1–58.
22. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – No. 8. – P. 367–383.
23. SMYTH W.D., NASH J.D., MOUM J.N. *Self-organized criticality in geophysical turbulence* // Scientific Reports. – 6 March 2019. – URL: <https://www.nature.com/articles/s41598-019-39869-w>.
24. SPEER E.R. *Asymmetric abelian sandpile models* // Journal of Statistical Physics. – April 1993. – Vol. 71, Iss. 1–2. – P. 61–74.

5. Приложение

Доказательство утверждения 4.

1. Докажем бесконечное функционирование сети.

Пусть $q_1(0) > r$ и $q_2(0) \geq r$.

На такте $t = 1$ вершина v_1 отдает каждой другой вершине ресурс $\frac{q_1(0)-r}{n-1}$, а вершина v_2 – ресурс $\frac{q_2(0)-r}{n-1}$. По утверждению 2, суммарный ресурс, полученный вершинами v_1 и v_2 от остальных вершин v_i , $i = \overline{3, n}$, одинаков. Обозначим его через $w_{rest}(0)$. Тогда к концу первого такта имеем:

$$q_1(1) = r + \frac{q_2(0) - r}{n - 1} + w_{rest}(0),$$

$$q_2(1) = r + \frac{q_1(0) - r}{n - 1} + w_{rest}(0).$$

К концу второго такта аналогичным образом получим:

$$q_1(2) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^2} + \frac{w_{rest}(0)}{n - 1} + w_{rest}(1),$$

$$q_2(2) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^2} + \frac{w_{rest}(0)}{n - 1} + w_{rest}(1).$$

Соответственно на такте t имеем:

$$q_1(t) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^t} + \frac{w_{rest}(0)}{(n - 1)^{t-1}} + \dots + \frac{w_{rest}(t - 2)}{n - 1} + w_{rest}(t - 1),$$

$$q_2(t) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^t} + \frac{w_{rest}(0)}{(n - 1)^{t-1}} + \dots + \frac{w_{rest}(t - 2)}{n - 1} + w_{rest}(t - 1),$$

если t – четное, и

$$q_1(t) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^t} + \frac{w_{rest}(0)}{(n - 1)^{t-1}} + \dots + \frac{w_{rest}(t - 2)}{n - 1} + w_{rest}(t - 1),$$

$$q_2(t) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^t} + \frac{w_{rest}(0)}{(n - 1)^{t-1}} + \dots + \frac{w_{rest}(t - 2)}{n - 1} + w_{rest}(t - 1),$$

если t – нечетное.

Видим, что $q_1(t) > r$ при любом четном t и $q_2(t) > r$ при любом нечетном t . Значит, $\forall t$ как минимум одна вершина будет перенасыщенная, а это значит, что сеть не остановится и будет функционировать бесконечно.

2. Докажем асимптотическую остановку сети.

Рассмотрим динамику суммарного свободного ресурса.

Пусть k_t – число перенасыщенных вершин на такте t , k_{t+1} – число перенасыщенных вершин на такте $t + 1$. При этом $\forall t \ k_t < n - 1$ (так как $W \leq rn$, то все вершины сети не могут быть перенасыщенными). Суммарный свободный ресурс на такте t равен $\Delta Q(t) = \sum_{i=1}^{k_t} \Delta q_i(t)$. Суммарный свободный ресурс на такте $t + 1$ тогда будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta Q(t+1) &= \sum_{i=1}^{k_t} \Delta q_i(t+1) + \sum_{i=k_t+1}^{k_{t+1}} \Delta q_i(t+1) = \\ &= \sum_{i=1}^{k_t} \sum_{j=1, j \neq i}^{k_t} \frac{\Delta q_j(t)}{n-1} + \sum_{i=k_t+1}^{k_{t+1}} \left(\sum_{j=1}^{k_t} \frac{\Delta q_j(t)}{n-1} - (r - q_i(t)) \right). \end{aligned}$$

Упростим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k_t} \sum_{j=1, j \neq i}^{k_t} \frac{\Delta q_j(t)}{n-1} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k_t} \left(\sum_{j=1}^{k_t} \Delta q_j(t) - \Delta q_i(t) \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(k_t \sum_{j=1}^{k_t} \Delta q_j(t) - \sum_{i=1}^{k_t} \Delta q_i(t) \right) = \frac{k_t - 1}{n-1} \Delta Q(t). \end{aligned}$$

Второе слагаемое не только упростим, но и оценим сверху:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k_t+1}^{k_{t+1}} \left(\sum_{j=1}^{k_t} \frac{\Delta q_j(t)}{n-1} - (r - q_i(t)) \right) &= \sum_{i=k_t+1}^{k_{t+1}} \left(\frac{\Delta Q(t)}{n-1} - (r - q_i(t)) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=k_t+1}^{n-1} \frac{\Delta Q(t)}{n-1} = \frac{n-1-k_t}{n-1} \Delta Q(t). \end{aligned}$$

Подставляя в исходную формулу результаты преобразований, имеем:

$$\Delta Q(t+1) \leq \frac{k_t - 1}{n - 1} \Delta Q(t) + \frac{n - 1 - k_t}{n - 1} \Delta Q(t),$$

$$\Delta Q(t+1) \leq \frac{n - 2}{n - 1} \Delta Q(t).$$

Таким образом, последовательность значений суммарного свободного ресурса ограничена сверху убывающей геометрической прогрессией, а, значит, предел этой последовательности равен нулю. Это, в свою очередь, означает, что стремится к нулю и общий поток в сети (исключая поток в петлях), так как он создается только свободным ресурсом. Очевидно, что изменение ресурса в вершинах при этом также стремится к нулю, т.е. сеть стабилизируется и останавливается. $\square$

Доказательство утверждения 7.

Пусть в сети в момент времени t_0 имеется k перенасыщенных вершин v_i , $i = \overline{1, k}$, $k < n$. Если вершины v_j , $j = \overline{k+1, n}$, являются насыщенными, то утверждение уже доказано. Рассмотрим ситуацию, когда среди v_j , $j = \overline{k+1, n}$, есть хотя бы одна ненасыщенная, и докажем, что эта вершина насытится за конечное число тактов.

В силу условия $W > rn$ верно следующее: $\forall t \Delta Q(t) \geq W - rn$ (равенство наступает тогда, когда все вершины сети насыщены).

От каждой вершины v_i , $i = \overline{1, k}$, ненасыщенной вершине v_j на такте $t_0 + 1$ передается r ресурса, если $\frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1} \geq r$, и $\frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}$ ресурса, если $\frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1} < r$. Объединив эти условия, получим, что v_j получает $\min\{r, \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}\}$ ресурса от каждой перенасыщенной вершины. Тогда

$$q_j(t_0 + 1) - q_j(t_0) = \sum_{i=1}^k \min\left\{r, \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}\right\}.$$

Если хотя бы для одной вершины $v_i, i = \overline{1, k}, \min\{r, \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}\} = r$, то имеем

$$q_j(t_0 + 1) - q_j(t_0) = \dots + r \geq r.$$

Если же для всех вершин $v_i, i = \overline{1, k}, \min\{r, \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}\} = \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}$, то имеем

$$\begin{aligned} q_j(t_0 + 1) - q_j(t_0) &= \sum_{i=1}^k \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k \Delta q_i(t_0) = \\ &= \frac{\Delta Q(t_0)}{n-1} \geq \frac{W - rn}{n-1}. \end{aligned}$$

Получаем, что на каждом такте ресурс в ненасыщенной вершине увеличивается не менее чем на $\min\{r, \frac{W-rn}{n-1}\}$. Тогда любая ненасыщенная на такте t_0 вершина за число шагов не более чем

$$\frac{r - q_i(t_0)}{\min\{r, \frac{W-rn}{n-1}\}}$$

достигнет своего насыщения. Отметим, что если $\min\{r, \frac{W-rn}{n-1}\} = r$, то

$$\frac{r - q_i(t_0)}{\min\{r, \frac{W-rn}{n-1}\}} = \frac{r - q_i(t_0)}{r} = 1 - \frac{q_i(t_0)}{r}$$

и, значит, вершина насытится за 1 такт. $\square$

Доказательство утверждения 9.

Перейдем в координаты стандартной ресурсной сети: имеем полную однородную сеть без петель, ресурс в каждой вершине уменьшен на r . Тогда ограничение на суммарный ресурс принимает вид $W < rn^2 - rn = rn(n-1)$, и в сети всегда будет хотя бы одна вершина из зоны $Z^-(t)$. Пусть в начальном состоянии имеется k вершин находятся в зоне $Z^+(0)$ и $n-k$ вершин – в зоне $Z^-(0)$:

$$v_1, \dots, v_k \in Z^+(0), v_{k+1}, \dots, v_n \in Z^-(0).$$

То есть ресурс распределен следующим образом:

$$q_i(0) = \begin{cases} > r_i^{out} = r(n-1), & i = \overline{1, k}, \\ \leq r_i^{out} = r(n-1), & i = \overline{k+1, n}. \end{cases}$$

1. Согласно свойству 2 полной однородной сети без петель, вершина, попавшая в зону $Z^-(t)$, уже из нее не выйдет.
2. Рассмотрим вершину, которая в начальном состоянии находится в зоне $Z^+(0)$. Не нарушая общности, положим, что это вершина v_1 . Выпишем её выходной и входной поток:

$$f_1^{out}(0) = r_1^{out} = r(n-1),$$

$$f_1^{in}(1) = \sum_{i=2}^k r + \sum_{i=k+1}^n \frac{q_i(0)}{n-1} = r(k-1) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k+1}^n q_i(0).$$

Разность между выходным и входным потоком есть некоторая величина Δf , показывающая, насколько уменьшился ресурс в вершине:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{k+1}^{out}(0) - f_{k+1}^{in}(1) = r(n-1) - r(k-1) - \frac{1}{n-1} \sum_{i=k+1}^n q_i(0) = \\ &= r(n-k) - \frac{1}{n-1} \sum_{i=k+1}^n q_i(0). \end{aligned}$$

Используя тот факт, что $q_i(0) > r(n-1)$, $i = \overline{1, k}$, получим:

$$\sum_{i=k+1}^n q_i(0) = W - \sum_{i=1}^k q_i(0) < W - rk(n-1).$$

Тогда можно оценить Δf снизу:

$$\Delta f > r(n-k) - \frac{1}{n-1} (W - rk(n-1)) = rn - \frac{W}{n-1} > 0.$$

Таким образом, на каждом такте ресурс вершины v_1 уменьшается на некоторую ограниченную снизу величину $\Delta f > rn - \frac{W}{n-1}$. То-

гда любая вершина v_i , находящаяся в начальном состоянии в зоне $Z^+(0)$, за число шагов менее чем

$$\frac{q_i(0) - r(n-1)}{rn - \frac{W}{n-1}}$$

перейдет в зону $Z^-(t)$. $\square$

Доказательство утверждения 10.

При $W < rn^2$ с определенного момента времени все вершины сети передают ресурс по правилу 2, тогда матрица потока выглядит следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} r & \frac{q_1(t)-r}{n-1} & \dots & \frac{q_1(t)-r}{n-1} \\ \frac{q_2(t)-r}{n-1} & r & \dots & \frac{q_2(t)-r}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{q_n(t)-r}{n-1} & \frac{q_n(t)-r}{n-1} & \dots & r \end{pmatrix}.$$

То есть полную пропускную способность r вершина v_i отдает в петлю, а оставшийся ресурс $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r$ делит пропорционально между остальными вершинами (работает по правилу 2 стандартной ресурсной сети). Таким образом, вершины отдают весь свой ресурс, и каждое новое состояние состоит из ресурса, пришедшего на данном такте: $Q(t+1) = in(t+1)$. Тогда для вершины v_j новое состояние $q_j(t+1)$ будет $f_j^{in}(t+1)$, т.е. суммой элементов j -го столбца матрицы $F(t)$.

$$\begin{aligned} f_j^{in}(t+1) &= r + \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{q_i(t) - r}{n-1} = \\ &= r + \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{q_i(t)}{n-1} - \frac{r(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n q_i(t), \\ in(t+1) &= (f_1^{in}(t+1), \dots, f_n^{in}(t+1)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^n q_i(t), \sum_{i=1, i \neq 2}^n q_i(t), \dots, \sum_{i=1}^{n-1} q_i(t) \right) = \\
 &= \frac{1}{n-1} (q_1(t), \dots, q_n(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = Q(t)R'.
 \end{aligned}$$

Получили искомую формулу (3):

$$Q(t+1) = Q(t)R', \quad R' = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

К доказательству этого утверждения можно подойти по-другому. Перейдем в координаты соответствующей стандартной ресурсной сети.

Для нахождения вектора новых состояний вершин в координатах стандартной ресурсной сети $Q_{st}(t+1)$ можно применить имеющуюся из теории стандартных ресурсных сетей формулу: $Q_{st}(t+1) = Q_{st}(t)R'$. Здесь матрица R' будет иметь вид:

$$R' = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходя обратно в координаты исходной модели, имеем:

$$Q(t+1) = Q_{st}(t+1) + b_r,$$

где $b_r = (r, \dots, r)$, получим:

$$Q(t+1) = (Q(t) - b_r)R' + b_r = Q(t)R' - b_rR' + b_r = Q(t)R' - b,$$

где

$$b = b_rR' - b_r = b_r(R' - E) =$$

$$= \frac{1}{n-1}(r, \dots, r) \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix} = (0, \dots, 0).$$

Тогда зависимость вектора нового состояния сети от вектора предыдущего состояния сети выражается формулой (3). $\square$

Доказательство теоремы 3.

Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W < rn^2$ стабилизируется в случае, если стабилизируется соответствующая стандартная ресурсная сеть. В [9] доказано, что регулярная сеть при малом ресурсе всегда имеет единственное предельное состояние. Из этого факта и утверждения 10 следует стабилизация исходной сети с «жадными» вершинами при $W < rn^2$.

Найдем соответствующее предельное состояние сети. Используя формулу из утверждения 11, запишем состояния сети на тактах $t+1$, $t+2$, $t+3$, ... $t+k$.

$$\begin{aligned} Q(t+1) &= Q(t)R' = \frac{1}{n-1} \left(q_1(t), \dots, q_n(t) \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^n q_i(t), \dots, \sum_{i=1}^{n-1} q_i(t) \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(W - q_1(t), \dots, W - q_n(t) \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(W, \dots, W \right) - \frac{1}{n-1} Q(t), \\ Q(t+2) &= Q(t+1)R' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(n-1)^2} \left((W, \dots, W) - (q_1(t), \dots, q_n(t)) \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{(n-1)^2} \left(((n-1)W, \dots, (n-1)W) - \left(\sum_{i=2}^n q_i(t), \dots, \sum_{i=1}^{n-1} q_i(t) \right) \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} \right) (W, \dots, W) + \frac{1}{(n-1)^2} Q(t).
 \end{aligned}$$

Аналогично находим $Q(t+3)$:

$$\begin{aligned}
 Q(t+3) &= Q(t+2)R' = \dots = \\
 &= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^3} \right) (W, \dots, W) - \frac{1}{(n-1)^3} Q(t).
 \end{aligned}$$

Для такта $t+k$ таким образом получим:

$$\begin{aligned}
 Q(t+k) &= Q(t) \frac{(-1)^k}{(n-1)^k} + (W, \dots, W) \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i+1}}{(n-1)^i} = \\
 &= Q(t) \frac{1}{(1-n)^k} - (W, \dots, W) \sum_{i=1}^k \frac{1}{(1-n)^i}.
 \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$. Учитывая, что для первого слагаемого

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-n)^k} = 0,$$

а предел суммы убывающей геометрической прогрессии равен

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{(1-n)^i} \right) = \frac{\frac{1}{1-n}}{1 - \frac{1}{1-n}} = -\frac{1}{n},$$

получим искомое предельное состояние системы:

$$Q^* = \left(\frac{W}{n}, \dots, \frac{W}{n} \right). \quad \square$$

Доказательство теоремы 4.

Перейдем в координаты стандартной ресурсной сети: имеем полную однородную сеть без петель, ресурс в каждой вершине уменьшен на r . Тогда суммарный ресурс равен $W = rn^2 - rn = rn(n-1)$. Пусть в начальном состоянии $t=0$ имеется $k(0) = k_0$ вершин из зоны $Z^+(0)$ и $n - k_0$ вершин из зоны $Z^-(0)$:

$$v_1, \dots, v_{k_0} \in Z^+(0), \quad v_{k_0+1}, \dots, v_n \in Z^-(0).$$

То есть ресурс распределен следующим образом:

$$q_i(0) = \begin{cases} > r_i^{out} = r(n-1), & i = \overline{1, k_0}, \\ \leq r_i^{out} = r(n-1), & i = \overline{k_0+1, n}. \end{cases}$$

Целочисленная функция $k(t)$ является монотонной невозрастающей: вершины из зоны $Z^-(0)$ не могут ее покинуть, согласно свойству 2 полной однородной сети без петель, а, значит, и $k(t)$ с увеличением времени не возрастает.

Рассмотрим входной и выходной потоки вершины v_i , которая в начальном состоянии находится в зоне $Z^+(0)$, т.е. $i \in \{1, \dots, k_0\}$:

$$f_i^{out}(0) = r_1^{out} = r(n-1),$$

$$f_i^{in}(1) = \sum_{i=2}^{k_0} r + \sum_{i=k_0+1}^n \frac{q_i(0)}{n-1} = r(k_0-1) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k_0+1}^n q_i(0).$$

Состояние вершины v_i на следующем такте $t=1$:

$$\begin{aligned} q_i(1) &= q_i(0) - f_i^{out}(0) + f_i^{in}(1) = \\ &= q_i(0) - r(n-1) + r(k_0-1) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k_0+1}^n q_i(0) = \\ &= q_i(0) + r(k_0-n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k_0+1}^n q_i(0). \end{aligned}$$

На такте $t=2$ получим аналогичную формулу; вместо k_0 здесь

будет уже $k(1) = k_1$ – количество вершин из зоны $Z^+(1)$ на такте $t = 1$:

$$q_i(2) = q_i(1) + r(k_1 - n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k_1+1}^n q_i(1).$$

Для такта $t + 1$ имеем соответственно

$$q_i(t+1) = q_i(t) + r(k(t) - n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^n q_i(t).$$

Рассмотрим динамику избыточного ресурса (обозначим его $\delta q_i(t)$) в вершине v_i . Под избыточным ресурсом будем понимать ту часть ресурса вершины v_i , которая позволяет ей находиться в зоне $Z^+(t)$ на такте t , т.е. $\delta q_i(t) = q_i(t) - r(n-1)$. Распишем избыточный ресурс в вершине v_i на такте $t + 1$:

$$\begin{aligned} \delta q_i(t+1) &= q_i(t+1) - r(n-1) = \\ &= q_i(t) + r(k(t) - n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^n q_i(t) - r(n-1). \end{aligned}$$

Выразим $\delta q_i(t+1)$ через $\delta q_i(t)$:

$$\delta q_i(t+1) = \delta q_i(t) + r(k(t) - n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^n q_i(t).$$

Последнее слагаемое в формуле распишем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^n q_i(t) &= \frac{1}{n-1} \left(W - \sum_{i=1}^{k(t)} q_i(t) \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(rn(n-1) - \sum_{i=1}^{k(t)} q_i(t) \right) = rn - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k(t)} q_i(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что $q_i(t) = r(n - 1) + \delta q_i(t)$, $i = 1, \dots, k(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^n q_i(t) &= rn - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k(t)} (r(n-1) + \delta q_i(t)) = \\ &= rn - rk(t) - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k(t)} \delta q_i(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta q_i(t+1) &= \delta q_i(t) + r(k(t) - n) + rn - rk(t) - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k(t)} \delta q_i(t) = \\ &= \delta q_i(t) - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k(t)} \delta q_i(t) \leq \delta q_i(t) - \frac{1}{n-1} \delta q_i(t) = \frac{n-2}{n-1} \delta q_i(t), \\ \delta q_i(t+1) &\leq \frac{n-2}{n-1} \delta q_i(t). \end{aligned}$$

Последовательность избыточных ресурсов вершины v_i ограничена сверху убывающей геометрической прогрессией, а значит, предел этой последовательности равен нулю. Отсюда следует, что ресурсы в вершинах, принадлежащих зоне $Z^+(0)$ в начальный момент времени, стремятся к состояниям $q_i^*(t) = r(n-1)$, $i = 1, \dots, k_0$. По закону сохранения ресурса в сети, ресурсы в вершинах, принадлежащих зоне $Z^-(0)$ в начальный момент времени, также будут стремиться к состояниям $q_i^*(t) = r(n-1)$, $i = k_0 + 1, \dots, n$. Таким образом, сеть стабилизируется с предельным состоянием $Q^*(t) = (r(n-1), \dots, r(n-1))$, или, в переводе обратно в координаты «жадных» вершин, с предельным состоянием $Q^*(t) = (rn, \dots, rn)$. $\square$

RESEARCH OF COMPLETE HOMOGENEOUS «GREEDY-VERTICES» RESOURCE NETWORKS

Ludmila Zhilyakova, V.A. Trapeznikov Institute of Control
Sciences of RAS, Moscow , Moscow,
Doct.Sc.(zhilyakova.ludmila@gmail.com).

Nadezda Chaplinskaya, V.A. Trapeznikov Institute of Control
Sciences of RAS, Moscow , Moscow, student
(nadya1462@gmail.com).

Abstract: The modification of the graph dynamic model "resource network" – "resource network with greedy vertices" is described. In this model, the graph vertices at each discrete-time moment exchange resources through the edges with limited throughput, first passing the available resource to themselves via the loop and then distributing the remaining resource to adjacent vertices according to the "standard" resource network rules. These are two rules with threshold switching: if the vertex resource exceeds the total throughput of all its outgoing edges, it gives away the full throughput to each edge; otherwise, it gives the entire available resource, distributing it in proportion to the throughputs of the outgoing edges. The process of functioning of a complete homogeneous resource network with "greedy" vertices at different values of total resource and different initial states is investigated. Possible network states are described; a non-standard state – the shutdown of the network has been identified. Two total resource thresholds, separating zones of different network behavior, have been found: the first threshold divides the zones of "insufficient" and "sufficient" resources, the second divides the zones of "sufficient small" and "sufficient large" resources. For each zone the functioning of the network is described and the asymptotic states and flows are investigated. The examples demonstrating numerical experiments are given for all typical situations.

Keywords: resource net, «greedy-vertices» model, graph dynamic threshold model.

УДК 519.1

ББК 22.176

DOI: 10.25728/ubs.2021.89.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольниковым.*

Поступила в редакцию 17.11.2020.

Дата опубликования 31.01.2021.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕСТОВЫХ ВОПРОСОВ НА ОСНОВЕ ТОЧЕЧНОГО КОЭФФИЦИЕНТА

Калмыков Н. С.¹,

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Сидельников Ю. В.²

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН; МАИ, Москва)*

Экспериментально проверяется наличие объективной составляющей сложности задачи. С этой целью введен и экспериментально исследован так называемый «точечный коэффициент», позволяющий оценить уровень сложности задачи заданной в виде тестового вопроса. Именно на основе ответов на эти вопросы оценивается уровень сложности задачи. Предложены и экспериментально апробированы гипотезы, характеризующие динамику изменений значений точечного коэффициента. Также проверена устойчивость полученных выводов, базирующихся на результатах расчетов по двум качественно различным коэффициентам относительно числа опрашиваемых участников. Экспериментально найден и проверен критерий для определения тестового вопроса как задачи третьего уровня сложности. Основанием этого является характер изменения диапазона разброса значений гистограммного коэффициента. Проведено экспериментальное исследование наличия когнитивных искажений при оценивании экспертами некоторых задач тестового характера. Предложены возможные направления дальнейших разработок.

Ключевые слова: экспертные оценки, тестовый вопрос, точечный коэффициент.

1. Введение

Актуальность данной темы исследования обоснована следующим фактом. В литературе по экспертным оценкам часто описывают креативные методы. Так, к примеру, в статье [9] разработан сценарный метод построения дорожных карт для стратегического планирования и прогнозирования, в котором само построение сценариев опирается на такой креативный метод как «Шесть шляп». Также в научной литературе даны описания экс-

¹ Никита Сергеевич Калмыков, м.н.с. (kalmikov-nik@bk.ru).

² Юрий Валентинович Сидельников, д.т.н., профессор (sidelnikovy@mail.ru).

периментов, в которых анализируют ответы экспертов на тестовые вопросы на основании того или иного показателя ошибки или точности [5]. Мы же путем экспериментов должны выявить наличие объективной составляющей сложности тестового вопроса как задачи на основе введения и использования различных коэффициентов. Кроме того, в статье авторов [3] по рассматриваемой теме, представленной в публикации как первой из двух частей данного исследования, было указано, что для подтверждения уровня правдоподобности полученных выводов на основе экспериментальных исследований необходимо, в частности, варьировать вид коэффициента. Поясним последнее утверждение. В первой части того же исследования [3] было рассмотрено шесть основных факторов, от которых зависит корректность выводов экспериментальных исследований. Один из факторов – вид коэффициента, на основе которого вычисляется усредненное значение всех экспертных оценок сложности конкретной задачи, заданной в виде тестового вопроса.

Цель экспериментального исследования: выяснить на основе тестовых экспериментов наличие объективно существующих уровней и подуровней сложности задач, сформулированных в виде тестовых вопросов.

Для достижения поставленной цели предлагается решить следующую совокупность задач:

1. Ввести и экспериментально апробировать на основе имеющейся статистики качественно новый, так называемый «точечный коэффициент», позволяющий оценить уровень сложности задачи заданной в виде тестового вопроса.

2. Сопоставить результаты расчетов как по введенному в статье точечному коэффициенту, так и рассмотренному ранее гистограммному коэффициенту [3] для подтверждения уровня правдоподобности выводов относительно наличия объективной составляющей сложности задач.

Для пояснения сути второй задачи введем **Постулат №1.**

Полагаем, что найдутся такие задачи, у которых можно выделить как субъективную, так и объективную составляющую их сложности.

То, что существует субъективная составляющая сложности задачи, очевидно. Для призера математических олимпиад

и обычного школьника сложность одной и той же стандартной тестовой задачи, которые обычно задают в школе на дом, различна. И в этом случае, по сути, говорят о субъективной составляющей этой стандартной тестовой задачи. Но есть ли и объективная составляющую сложности задачи. По-видимому, да. Но как ее измерять? В случае когда мы имеем одного оценщика и тестовую задачу, мы можем сопоставить его оценку X и истинное значение тестового вопроса, заданного в виде задачи Y , используя тот или иной показатель ошибки. Но это ошибка конкретного эксперта-оценщика, а не оценка сложности задачи. Для решения последней задачи надо снять субъективную составляющую. Но для этого необходимо учесть:

- усредненное значение всех экспертных оценок и их точности для каждой из задач, заданной в виде тестового вопроса;
- зависимость получаемого результата (вывода) от вида коэффициента используемого при расчете.

А также проверить статистическую устойчивость полученного расчета (вывода) от количества экспертов-оценщиков.

Поясняя, можно указать, что показатели ошибки используются для оценки X ответа одного конкретного эксперта при наличии истинного значения ответа Y на тестовый вопрос, заданный в виде задачи. Таким образом, необходимо ввести качественно новые показатели – коэффициенты. Но в этом случае уровень правдоподобности вывода относительно наличия объективной составляющей уровней сложности зависит от:

I. коэффициента, на основе которого проводились расчеты уровней сложности задач;

II. количества экспертов, которые давали ответ на тестовый вопрос.

При сопоставлении мы должны использовать два различных, но сопоставимых коэффициента – точечный и ранее введенный и описанный в первой части исследования гистограммный коэффициент [3]. Здесь мы вводим **Постулат №2**. Сопоставление результатов, полученных при расчетах на основе двух качественно различных коэффициентов, позволит выявить устойчивость выводов на основе расчетов по этим коэффициентам. Полагая, что если результаты, полученные при расчетах на основе введенных коэффициентов, будут совпадать или близки,

то это будет означать, что полученный вывод относительно наличия объективной составляющей уровней сложности задач либо не зависит, либо слабо зависит от вида коэффициента, на основе которого и был получен этот вывод. Точнее, вывод относительно уровня правдоподобности (корректности) выводов относительно наличия (существования) уровней и подуровней объективной составляющей уровней сложности задач.

Таким образом, в результате экспериментальных исследований мы можем получить некое утверждение относительно наличия (существования) уровней и подуровней объективной составляющей уровней сложности задач.

3. Проанализировать и предложить гипотезы, характеризующие динамику изменений значений точечного коэффициента на основе тестовых вопросов и массива экспертных оценок, введенных и рассмотренных в монографии одного из авторов [5] и в статье [3]. Вывести и обосновать по ним заключения.

Поясним эту задачу. Это необходимо для того, чтобы можно было показать статистическую устойчивость выводов, рассчитываемых на основе этого коэффициента, от количества участвующих экспертов. При этом необходимо отметить, что исходным эмпирическим материалом для последующего анализа служит массив оценок, полученных в качестве ответов на 9 различных, независимых по своему содержанию тестовых вопросов. Сами вопросы описаны во втором разделе данной статьи. В рамках данного экспериментального исследования были использованы оценки ста сорока шести участников, а общее число оценок как ответов от опрашиваемых участников – 2146 (1073 гистограммных и столько же точечных оценок).

4. Исследовать влияние когнитивных искажений на результаты ответов экспертов.

5. Сопоставить ранжировки вопросов на основе оценочных ответов экспертов по двум качественно различным коэффициентам для обоснования уменьшения уровня значимости зависимости рассматриваемого вывода от вида введенных коэффициентов.

6. Обозначить дальнейшие исследования по рассматриваемой теме.

2. Введение точечного коэффициента

Введем точечный коэффициент, на основе которого можно определять уровень сложности задачи в виде тестового вопроса. Точнее, коэффициент, на основании которого вычисляется усредненное значение экспертных числовых (точечных) оценок уровня сложности задачи, заданной в виде тестового вопроса. Для краткости в дальнейшем будем его называть «точечный коэффициент», по аналогии с гистограммным коэффициентом, введенным в первой части исследования авторов [3].

Данный коэффициент рассчитывается следующим образом:

$PA^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j)$ – точечный коэффициент, характеризующий сложность j -го вопроса как тестовой задачи. При расчете данного коэффициента мы используем информацию, полученную от N^j участников, ответивших на j -й вопрос и которые дали точечные (числовые) оценки $(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j)$.

Коэффициент, как функция, представлен следующим образом:

- $PA^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j) = |(ME^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j) - y^j) / y^j|$, где:
- $ME^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j)$ – медиана числового ряда $(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j)$ всех оценок (ответов) N^j участников по j -му вопросу;
 - x_i^j – точечная (числовая) оценка i -го участника (ответ) по j -му тестовому вопросу;
 - y^j – истинное значение ответа на j -й тестовый вопрос;
 - $i = 1, 2, \dots, N^j$; N^j – общее число участников, ответивших на j -й вопрос;
 - $j = 1, 2, \dots, K$; K – общее число вопросов.

Рассмотрим обобщение коэффициента $PA^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j) = |(ME^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j) - y^j) / y^j|$ для произвольного вопроса. Тогда значение параметра $|ME(x_1, x_2, \dots, x_N) - y|$, может изменяться от 0 до произвольного числа R . Таким образом, область значения обобщенного коэффициента $|ME(x_1, x_2, \dots, x_N) - y| / y$ как функции, принимает значения в отрезке от 0 до величины $|R / y|$.

Постулат №3. Полагаем, что чем больше отклоняется значение $ME^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_{N^j}^j)$ от y^j , тем вопрос сложнее, и, соответственно, чем ближе соответствующая разность к нулю, тем вопрос проще.

Таким образом, чем ближе значение коэффициента $PA^j(x_1^j, x_2^j, \dots, x_N^j)$ к нулю, тем уровень сложности j -го вопроса меньше. Это аналогично динамике гистограммного коэффициента [3].

3. Описание тестовых вопросов

Исходным эмпирическим материалом для последующего анализа служит массив из 1073 гистограммных и столько же точечных оценок, полученных от 147 участников при ответе на 9 различных, независимых по своему содержанию вопросов, как тестовых задач для участников.

Перечислим эти тестовые вопросы как задачи для участников:

1. Какое количество времени электропоезд метрополитена в Москве затрачивал на проезд по кольцу (в минутах) в 1979 году?
2. Сколько вагонов в составе электропоезда метрополитена в Москве на линии Беляево – Медведково было в 1979 году?
3. Каким было население Африки в 1975 году (в млн чел.)?
4. Какова была в Москве доля мужчин (в процентном соотношении) в 1970 г.?
5. Каким было население Филиппин в 1970 году?
6. Какова продолжительность жизни Н.Г. Чернышевского (в годах)?
7. Какое количество времени электропоезд метрополитена в Москве затрачивал на проезд от станции Киевская до станции Щелковская (в минутах) в 1979 году?
8. Какова длина корпуса люминесцентных ламп в вашей рабочей комнате (в см)?
9. Сколько граммов весит предложенная вам для оценки деревянная вазочка?

4. Гипотезы, характеризующие динамику изменений значений точечного коэффициента

Зафиксируем предварительное условие. Рассмотренные выше вопросы примем в качестве тестовых задач для участников; количественный состав участников и весь массив ранее полученных оценок.

На данном массиве ответов, полученном при оценивании экспертами вопросов, рассмотрим пять гипотез, которые характеризуют динамику изменения значений уже не гистограммного [3], а точечного коэффициента $PA_{ji}^j(N_{ji}^j)$ в зависимости от изменения объемов выборок без возвращений из N_{ji}^j выбранных случайным образом ответов экспертов. Здесь i – номер выборки, $i = 1, 2, \dots, m_j$; m_j – количество выборок для j вопроса, а $N_{ji}^j < N^j$.

При этом мы используем тот же механизм получения случайной выборки объемом N_{ji}^j из генеральной совокупности, состоящей из N^j ответов экспертов на j -й вопрос, который описан в статье авторов [3]. Повторим его описание.

1. По каждому j -му вопросу случайным образом составляется i -я выборка без возвращения объемом N_{ji}^j из натуральных чисел от 1 до N , где N соответствует количеству участников, ответивших на данный вопрос; $i = 1, 2, \dots, m_j$, а m_j – количество выборок для j -го вопроса). Данные выборки были созданы при помощи функции *lotto* на языке программирования Visual Basic, возвращающей псевдослучайные числа без повторов по заданной верхней границе интервала, нижней границе и количеству псевдослучайных чисел, которые отбираются из заданного интервала, соответствующего количеству экспертов, ответивших на конкретный вопрос [2].

2. Каждое из полученных псевдослучайных натуральных чисел соответствует порядковому номеру эксперта и сопоставляется со значением ответа данного эксперта.

3. Данная процедура повторяется 999 раз для создания новых выборок для каждого j -го вопроса и каждой i -й выборки объемом N_{ji}^j .

Нумерацию гипотез будем продолжать, исходя из их нумерации в статье авторов [3].

При этом мы, исходя из того, что гипотезы №1÷4 аналогичны не только по структуре описания, но полученным результатам. Но характеризуют динамику изменения значений не рассматриваемого в данной статье точечного коэффициента, а лишь только гистограммного.

Гипотеза №5. Полагаем, что содержание гипотез, характеризующих динамику изменения значений точечного коэффициента $PA_i^j(N_i^j)$ в зависимости от изменения объемов выборок из N_i^j , выбранных случайным образом ответов экспертов будет подобна аналогичным показателям гистограммного коэффициента.

Гипотеза №6. Полагаем, что для любого j -го тестового вопроса найдутся такое количество участников тестового опроса $K6$ и значение (N_{i6}^j) объема выборок, что при расчете точечного коэффициента по выборкам (N_i^j) значение $\min PA_i^j(N_i^j)$ как функции будет монотонно возрастать с увеличением объема этих выборок, начиная со значения N_{i6}^j , и стремиться к значению PA^j для всей совокупности для j -го вопроса.

Гипотеза №7. Полагаем, что для любого j -го тестового вопроса найдутся такое количество участников тестового опроса $K7$ и значение (N_{i7}^j) объема выборок, что, при расчете точечного коэффициента по выборкам (N_i^j) значение $\max PA_i^j(N_i^j)$ как функции будет монотонно убывать с увеличением объема этих выборок, начиная со значения N_{i7}^j , и стремиться к значению PA^j для всей совокупности для j -го вопроса.

Гипотеза №8. Полагаем, что для любого j -го тестового вопроса, найдутся такое количество участников тестового опроса $K8$ и такое значение (N_{i8}^j) объема выборок, что диапазон разброса значений точечного коэффициента $[\min_i PA_i^j(N_i^j), \max_i PA_i^j(N_i^j)]$ как функции будет монотонно убывать с увеличением объема i -й выборки, начиная со значения N_{i8}^j , а в предельном случае – стремиться к нулю для всей совокупности для j -го вопроса.

Гипотеза №9. Полагаем, что для любого j -го тестового вопроса найдется такое количество участников тестового опроса $K9$, что медиана ряда значений коэффициента PA^j с увеличением объема этой выборки будет хаотично, но устойчиво стремиться к значению PA^j для всей совокупности для j -го вопроса.

В случае если гипотезы №6÷9 будут подтверждены экспериментально, то, базируясь на них, можно получить информацию, характеризующую динамику изменений значений точечного коэффициента и правдоподобное обоснование утверждения относительно устойчивости полученных выводов, базирующиеся на результатах расчетов точечного коэффициента $PA^i(x^j_1, x^j_2, \dots, x^j_{Nj})$, относительно числа опрашиваемых участников.

5. Экспериментальное обоснование гипотез на основе апробации точечного коэффициента

Проанализируем динамику изменений значений точечного коэффициента и обоснуем гипотезы №6÷9, рассчитав значения точечного коэффициента на большом массиве данных, полученных при ответах экспертов на 9 тестовых вопросов. Для этого рассчитаем эти значения коэффициентов $PA^i(x^j_1, x^j_2, \dots, x^j_{Nj})$ для этих гипотез и представим полученную информацию в таблицах 1–9.

Таблица 1. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA^i по вопросу №1

Номер вопроса 1	Дисконтированные значения объемов выборок на первый вопрос №1. (Общее число ответов: 146)													Значение PA^1_{146}
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	
$\min PA^1_i$	0,05	0,14	0,15	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,24	0,26	0,28	0,31	0,38
ME значений ряда оценок PA^1_i	0,34	0,34	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	
$\max PA^1_i$	0,57	0,55	0,55	0,48	0,47	0,41	0,40	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	
Диапазон: $\max PA^1_i - \min PA^1_i$	0,52	0,41	0,41	0,28	0,26	0,21	0,19	0,16	0,16	0,14	0,12	0,10	0,07	

Таблица 2. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA_i^j по вопросу №2

Номер вопроса 2	Дисконтированные значения объемов выборок на второй вопрос N^2_i (Общее число ответов: 123)												Значение PA^2_{123}
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120		
$\min PA^2_i$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,07	0,14	0,14	0,14	0,14	
ME значений ряда оценок PA^2_i	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14		
$\max PA^2_i$	0,43	0,43	0,36	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14		
Диапазон $\max PA^2_i -$ $\min PA^2_i$	0,43	0,43	0,36	0,14	0,14	0,14	0,14	0,07	0,00	0,00	0,00		

Таблица 3. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA_i^j по вопросу №3

Номер вопроса 3	Дисконтированные значения объемов выборок на третий вопрос №3 (Общее число ответов: 140)													Значение PA_{140}^3
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130		
$\min PA_i^3$	0,01	0,01	0,02	0,12	0,20	0,25	0,25	0,29	0,29	0,32	0,37	0,42	0,44	
ME значений ряда оценок PA_i^3	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44		
$\max PA_i^3$	1,21	1,03	0,87	0,75	0,78	0,69	0,62	0,56	0,55	0,55	0,50	0,50		
Диапазон $\max PA_i^3 - \min PA_i^3$	1,20	1,02	0,85	0,62	0,57	0,44	0,37	0,27	0,26	0,23	0,12	0,07		

Таблица 4. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA_i^4 по вопросу №4

Номер вопроса 4	Дисконтированные значения объемов выборок на четвертый вопрос N ⁴ ; (Общее число ответов: 141).													Значение P ^A ₁₄₁ ⁴
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130		
min P ^A _i ⁴	0,01	0,02	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	
ME значений ряда оценок P ^A _i ⁴	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07		
max P ^A _i ⁴	0,11	0,10	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,07		
Диапазон max P ^A _i ⁴ – min P ^A _i ⁴	0,10	0,08	0,06	0,05	0,05	0,05	0,03	0,02	0,02	0,02	0,00	0,00		

Таблица 5. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA_i^5 по вопросу №5

Номер вопроса 5	Дисконтированные значения объемов выборок на пятый вопрос №5 (Общее число ответов: 146)														Значение PA_{146}^5
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140		
$\min PA_i^5$	0,00	0,02	0,06	0,04	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,15	0,26	0,30	
ME значений ряда оценок PA_i^5	0,28	0,28	0,28	0,28	0,30	0,28	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30		
$\max PA_i^5$	0,48	0,44	0,39	0,35	0,35	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30		
Диапазон $\max PA_i^5 -$ $\min PA_i^5$	0,48	0,43	0,33	0,31	0,24	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,15	0,04		

Таблица 6. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA_i^j по вопросу №6

Номер вопроса 6	Дисконтированные значения объемов выборок на шестой вопрос N^6_i (Общее число ответов: 141)													Значение PA^6_{141}
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130		
$\min PA^6_i$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	
ME значений ряда оценок PA^6_i	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08		
$\max PA^6_i$	0,26	0,25	0,18	0,18	0,17	0,16	0,16	0,15	0,13	0,11	0,11	0,10		
Диапазон $\max PA^6_i - \min PA^6_i$	0,26	0,25	0,18	0,18	0,16	0,16	0,15	0,13	0,07	0,05	0,02	0,02		

Таблица 7. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA_i^j по вопросу №7

Номер вопро- са 7	Дисконтированные значения объемов выборок на седьмой вопрос N ⁷ (Общее число ответов: 144)												Значение PA ⁷ ₁₄₄
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	
min PA ⁷ _i	0,00	0,00	0,06	0,06	0,06	0,09	0,14	0,15	0,18	0,18	0,18	0,18	0,28
ME значений ряда оценок PA ⁷ _i	0,26	0,25	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	
max PA ⁷ _i	0,62	0,59	0,58	0,53	0,53	0,53	0,53	0,49	0,41	0,40	0,36	0,29	
Диапазон max PA ⁷ _i – min PA ⁷ _i	0,62	0,59	0,52	0,47	0,47	0,44	0,39	0,34	0,24	0,22	0,19	0,12	

Таблица 8. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA_i^j по вопросу №8

Номер вопроса 8	Дисконтированные значения объемов выборок на восьмой вопрос №8 (Общее число ответов: 44)							Значение PA_{44}^8
	10	15	20	25	30	35	40	
$\min PA_i^9$	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01
ME значений ряда оценок PA_i^8	0,05	0,03	0,03	0,03	0,01	0,01	0,01	
$\max PA_i^8$	0,21	0,13	0,11	0,09	0,09	0,05	0,03	
Диапазон $\max PA_i^8$ – $\min PA_i^8$	0,21	0,12	0,10	0,08	0,09	0,04	0,02	

Таблица 9. Результаты проверки гипотез на основе расчета коэффициентов PA_i^j по вопросу №9

Номер вопроса 9	Дисконтированные значения объемов выборок на девятый вопрос №9 (Общее число ответов: 42).							Значение PA_{42}^9
	10	15	20	25	30	35	40	
$\min PA_i^9$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	0,09
ME значений ряда оценок PA_i^9	0,21	0,13	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	
$\max PA_i^9$	0,71	0,64	0,43	0,41	0,40	0,23	0,09	
Диапазон $\max PA_i^9$ – $\min PA_i^9$	0,71	0,64	0,43	0,41	0,40	0,23	0,00	

6. Обоснование предложенных гипотез и соответствующие заключения

Подробно опишем результаты, подтверждающие гипотезы №6÷9, исходя из данных таблиц 1–9.

Гипотеза № 6 подтверждается, так как для любого j -го тестового вопроса нашлось такое количество участников тестового опроса K_6 и значение N_{i6}^j объема выборок, что при расчете точечного коэффициента по выборкам (N_{i6}^j) значение $\min PA_i^j(N_{i6}^j)$ как функции с увеличением объема выборок монотонно возрастает для всех вопросов, начиная со значения N_{i6}^j . Кроме того, значение $\min PA_i^j(N_{i6}^j)$ как функции стремится к значению PA_i^j для всей совокупности для j -го вопроса.

Для дальнейших исследований и выдвижения новых гипотез рассмотрим этот результат более детально.

Так, для вопросов №1÷4, а также №6, №7 и №9 значение $\min PA_i^j(N_{i6}^j)$ как функции с увеличением объема выборок монотонно возрастает, начиная с минимального объема выборки. Лишь для вопросов №5 и №8 монотонный рост этой функции с увеличением объема выборки начинается с $i = 60$ (вопрос №5) и $i = 30$ (вопрос №8).

Выявлена следующая особенность: отсутствие совпадения значения $\min PA_i^j(N_{i6}^j)$ со значением PA_i^j для всей совокупности вопросов с самого начала объема i -й выборки.

Но при этом выявлены совпадения значений $\min PA_i^j(N_{i6}^j)$ со значением PA_i^j для вопросов: №2 – начиная с $i = 100$; для №4 – с $i = 90$; для №6 – с $i = 120$; для №8 – с $i = 35$; для №9 – с $i = 40$.

Гипотеза №7 подтверждается, так как для любого j -го тестового вопроса нашлось такое количество участников тестового опроса K_7 и значение N_{i7}^j объема выборок, что при расчете точечного коэффициента по выборкам (N_{i7}^j) значение $\max PA_i^j(N_{i7}^j)$ как функции с увеличением объема этих выборок монотонно убывает для всех вопросов, начиная со значения N_{i7}^j . Кроме того, значение $\max PA_i^j$ стремится к значению PA_i^j для всей совокупности для j -го вопроса.

Для дальнейших исследований и выдвижения новых гипотез рассмотрим этот результат более детально.

Так, для вопроса №9 значение $\max PA_i^j(N_{i7}^j)$ как функции строго монотонно убывает, начиная с минимального объема выборки.

Отдельно отметим, что значение $\max PA_i^j(N_{i7}^j)$ как функции с увеличением объема выборки монотонно убывает, начиная с минимального объема выборки для вопросов №1 и №2; а так-

же №4÷9. А для вопроса №3 начало монотонного убывания с увеличением объема выборки находится при $i=60$.

Выявлена особенность – отсутствие тенденции совпадении значения $\max PA_i^j(N_i^j)$ со значением PA_i^j для всей совокупности вопросов с самого начала объема i -й выборки. Но есть совпадения значений аналогичных характеристик для вопросов: №1 – начиная с $i=90$; для №2 – с $i=50$; для №4 – с $i=20$; для №5 – с $i=70$; для №9 – с $i=40$.

Гипотеза №8 подтверждается, так как для любого j -го тестового вопроса нашлось такое количество участников тестового опроса $K8$ и такие значения N_{i8}^j объемов выборок, что диапазон разброса значений точечного коэффициента $[\min_i PA_i^j(N_i^j), \max_i PA_i^j(N_i^j)]$ как функции монотонно убывает с увеличением объема i -й выборки для всех вопросов, начиная со значения N_{i8}^j , а в предельном случае – стремится к нулю по всей совокупности для j -го вопроса.

Для дальнейших исследований и выдвижения новых гипотез рассмотрим этот результат более детально.

Так, для вопросов №3, №8, №9 диапазон разброса значений строго монотонно убывает. При этом диапазон разброса значений точечного коэффициента как функции монотонно убывает, начиная с минимального объема выборки практически для всех вопросов. Точнее, для вопросов №1÷7 и №9. И лишь для вопроса №8 имеется незначительное отклонение в монотонности убывания, когда при дисконтированном значении объема выборки, равном 25, диапазон $[\max PA_i^8 - \min PA_i^8]$ равен 0,08, а при значении объема выборки 30 диапазон $[\max PA_i^8 - \min PA_i^8]$ равен 0,09. Что практически не нарушает монотонного характера.

Гипотеза №9 подтверждается, так как для любого j -го тестового вопроса нашлось такое количество участников тестового опроса $K9$, что медиана ряда значений точечного коэффициента PA_i^j с увеличением объемов выборок хаотично, но устойчиво стремится к значению PA_i^j для всей совокупности для j -го вопроса.

Для дальнейших исследований и выдвижения новых гипотез рассмотрим этот результат более детально.

В экспериментах наблюдается, причем с самого минимального объема i -й выборки, полное совпадение значений медиан

ряда точечных коэффициентов PA_i^j со значением PA^j для всей совокупности. Например, для вопросов №2, №4 и №6.

Такого рода тенденция проявляется и для других вопросов, но уже не с минимального объема. Так, совпадение значений медиан ряда точечных коэффициентов со значением коэффициента PA^j для всей совокупности по следующим номерам вопросов: №1 – начиная с $i = 40$; для №3 – с $i = 70$; для №5 – с $i = 80$; для №7 – с $i = 90$; для №8 – с $i = 30$; для №9 – с $i = 20$.

Таким образом, гипотезы №6–9, характеризующие динамику изменений значений точечного коэффициента, подтвердились.

Кроме того, сопоставляя рассматриваемые подтвержденные гипотезы и аналогичные подтвержденные гипотезы, характеризующие динамику изменений значений гистограммного коэффициента [3], получаем подтверждение гипотезы №5.

7. Исследование влияния когнитивных искажений на ответы экспертов на тестовые вопросы

Понятие «когнитивности» в настоящее время широко используется в научной сфере. Так, в работе [13] предлагается подход к социальной системе как «живой» когнитивной системе и применение данного подхода к современным тенденциям развития глобального информационного общества. Само понятие когнитивного искажения было введено Амосом Тверски и Даниэлем Канеманом в 1972 году [11] на основе исследования числовых оценок экспертов на поставленные авторами вопросы. На основе данного исследования авторы указали и продемонстрировали отличие полученных ответов экспертов от ожидаемых ответов на основе рационального выбора. Тверски и Канеман объяснили эти расхождения в суждениях и принятии решений в терминах эвристики. По мнению авторов, эвристика проста в процедурах вычисления, но иногда приводит к «серьезным и систематическим ошибкам» [12, стр. 1125], вызывающим склонность экспертов к стереотипному мышлению.

Экспертные предубеждения в технологическом прогнозировании достаточно широко обсуждаются в научном сообществе. Один из самых свежих материалов поднимает проблему

влияния предубеждений экспертов на процесс создания технологического прогноза [8].

Основываясь на понятии когнитивных искажений, выдвинутых Канеманом и Тверски, мы провели исследование рассматриваемого нами списка вопросов и сделали следующее заключение:

Вопросы №1 «Какое количество времени электропоезд метрополитена в Москве затрачивал на проезд по кольцу (в минутах) в 1979 году?» и №7 «Какое количество времени электропоезд метрополитена в Москве затрачивал на проезд от станции Киевская до станции Щелковская (в минутах) в 1979 году?» сами по себе являются типичными вопросами второго уровня сложности. Одна из причин, на основании которой можно обосновать этот уровень, заключается в том, что количество потенциально истинных вариантов ответов на них мало. Однако данные вопросы имеют признаки когнитивных искажений, существенно повышающих их субъективную степень сложности для экспертов. Постановка данных вопросов неявно отсылала экспертов к схеме московского метрополитена, на которой искажены пропорции длин маршрутов проезда в метро относительно фактических расстояний, что повлияло на результаты ответов экспертов. В данном случае было выявлено наличие у экспертов так называемых «когнитивных карт», отличающихся от истинного значения, причем отличие когнитивных карт было сконцентрировано на одном уровне у большей массы ответов экспертов. Выполняя адаптивную функцию, когнитивные искажения в основном приводят к более быстрому решению задач, однако из-за неуместного применения навыков эксперты в свои ответы вносят ошибку, которую нам удалось отловить и наглядно проиллюстрировать.

Для вопроса №1 эксперты существенно увеличили время прохождения поезда по кольцевой линии, так как на схеме московского метрополитена она отображена с существенными искажениями пропорций в сторону увеличения, а для вопроса №7 – занизили, так как схема искажала пропорции расстояний в сторону уменьшения между станциями метро (рис. 3). При этом эксперты игнорировали другие возможные решения задачи, выбирая «легкий» путь и наглядно демонстрируя прочную

взаимосвязь с уже устоявшимися когнитивными картами, так как схема московского метрополитена – это наиболее известный образ, который они стали использовать при решении данной задачи.



Рис. 1. Схема московского метрополитена

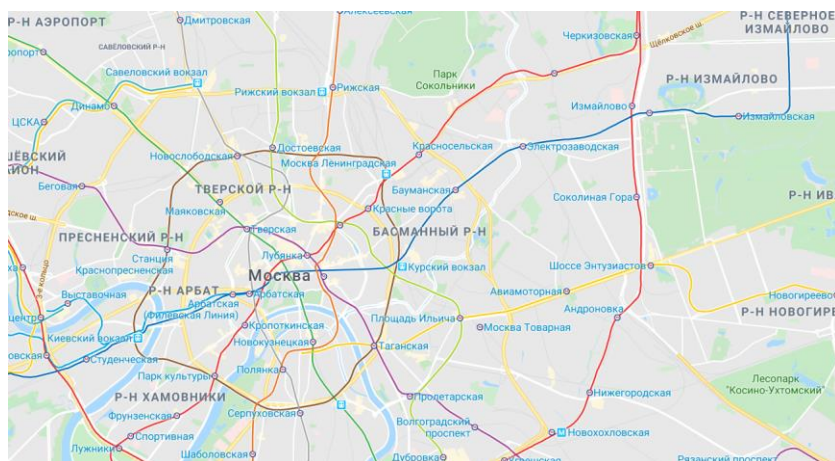


Рис. 2. Карта центра Москвы

Сопоставляя два рисунка – схему московского метрополитена (рис. 1) и карту центра Москвы, отражающую реальные пропорции фактических расстояний между станциями (рис. 2) – можно увидеть существенные искажения.

Таким образом, необходимо провести разграничение типов вопросов на объективный с искажениями и объективный без искажений уровня сложности.

8. Ранжировка вопросов

Сформируем отдельную таблицу, характеризующую соотношения упорядоченных значений коэффициентов $KH^j_i(N^j, N^j)$ и $PA^j_i(x^j_1, x^j_2, \dots, x^j_N)$ по всей совокупности ответов экспертов на j -й вопрос с номером вопроса. При этом упорядочение задается от меньшего значения соответствующего коэффициента к большему.

Таблица 10. Ранжировка вопросов по возрастанию степени сложности от минимальной (1) к максимальной (9) исходя из значений коэффициентов KH^j_i и PA^j_i

№ позиции (ранжировка по возрастанию коэффициентов)	Значение KH^j_i	№ вопроса	Значение PA^j_i	№ вопроса
1	36,36	8	0,01	8
2	43,97	4	0,07	4
3	44,72	2	0,08	6
4	47,95	5	0,09	9
5	49,65	6	0,14	2
6	57,14	9	0,28	7
7	57,53	1	0,3	5
8	58,33	7	0,38	1
9	67,14	3	0,44	3

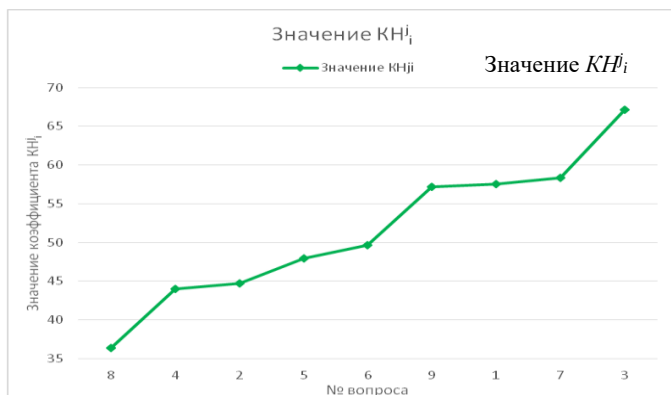


Рис. 3. Графическое представление уровня значений коэффициента $КН_i$ (от меньшего значения коэффициента к большему). На оси абсцисс указан номер вопроса, на оси ординат – значение соответствующего коэффициента

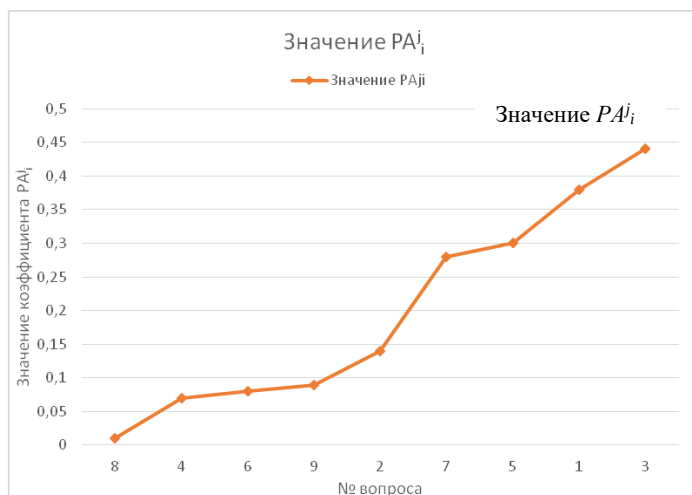


Рис. 4. Графическое представление уровня значений коэффициента $РА_i$ (от меньшего значения коэффициента к большему). На оси абсцисс указан номер вопроса, на оси ординат – значение соответствующего коэффициента

На основе ранжировки вопросов сразу по обоим коэффициентам можно сделать следующие выводы:

I. Самый низкий уровень сложности вопросов или, другими словами, объективно самыми легкими для экспертов оказались следующие вопросы:

№8. Какова длина корпуса люминесцентных ламп в вашей рабочей комнате (в см)?

№4. Какова была в Москве доля мужчин в 1970 г. (в процентном соотношении)?

В этом случае значения обоих коэффициентов $KH_i(N^i, N^j)$ и PA_i^j оказались наименьшими, и в этом смысле в большинстве своем эксперты показали значения наиболее близкие к истинным.

Кроме того, полагаем, что данный результат однозначно характеризует данные вопросы как вопросы второго уровня сложности [6].

II. Более сложными оказались вопросы:

№2. Сколько вагонов в составе электропоезда метрополитена в Москве на линии Беляево – Медведково было в 1979 году?

№6. Продолжительность жизни Н. Г. Чернышевского (в годах)?

№9. Сколько граммов весит предложенная вам для оценки деревянная вазочка?

Хотя и на эти вопросы эксперты дали оценку достаточно близкую к истинной.

III. Самыми сложными для экспертов оказались следующие вопросы:

№1. Какое количество времени электропоезд метрополитена в Москве затрачивал на проезд по кольцу (в минутах) в 1979 году?

№3. Каким было население Африки в 1975 году (в млн чел.)?

№7. Какое количество времени электропоезд метрополитена в Москве затрачивал на проезд от станции Киевская до станции Щелковская (в минутах) в 1979 году?

В этом случае значения коэффициентов KH_i^j и PA_i^j оказались наибольшими, и в этом смысле эксперты дали свои оценки, наиболее далекие от истинных значений.

Более трудна трактовка уровня сложности пятого вопроса: «Каким было население Филиппин в 1970 году?». Это связано с тем, что исходя из значения коэффициента PA_i^j он достаточно сложный, но исходя из значения коэффициента KH_i^j не является таковым.

Таким образом, мы предлагаем следующую **гипотезу №10**:

Разночтение трактовки уровня сложности пятого вопроса по различным критериям связано с тем, что коэффициент $KH_i^j(N^j, N^j)$ характеризует не только уровень его сложности, как коэффициент PA_i^j , но и интегральную меру уверенности совокупности экспертов.

Отличие между пятым и третьим вопросами состоит в том, что эксперты при оценивании вопроса №3 не всегда достаточно адекватно воспринимали степень трудности этого вопроса по сравнению с вопросом №5. Другими словами, усредненная степень понимания экспертами сложности вопроса №5 была больше, чем аналогичный показатель для вопроса №3. Именно это и привело к более высокой оценке сложности третьего вопроса и различиям в позициях рассмотренной ранжировки этих вопросов по разным критериям.

Эти различия в иерархии между интегральной оценкой степени уверенности совокупности экспертов в степени трудности задачи этого же вопроса, выраженной значением коэффициента $KH_i^j(N^j, N^j)$, и интегральной оценкой уровня сложности этого же вопроса, выраженной значением коэффициента PA_i^j , не является простой проблемой и требует дополнительного исследования.

Для выяснения уровня взаимосвязи между двумя ранжировками, отмеченными в таблице 10, рассмотрим два вектора значений коэффициентов по возрастанию номеров вопросов. В первом векторе ($X1$) укажем значения коэффициентов KH_i^j , во втором векторе ($X2$) укажем значения коэффициентов PA_i^j :

$X1 = [36,36; 43,97; 44,72; 47,95; 49,65; 57,14; 57,53; 58,33; 67,14]$,

$X2 = [0,01; 0,07; 0,14; 0,3; 0,08; 0,09; 0,38; 0,28; 0,44]$.

Попробуем испытать (опровергнуть или нет) предположение, что нет никакой связи между признаками (значениями двух коэффициентов). То есть вторая последовательность X_2 значения коэффициентов PA_i случайна по отношению к первой X_1 .

Как обычно, если вторая последовательность выбирается чисто случайно, то близкие к единице (по абсолютной величине) значения коэффициента ранговой корреляции имеют малую вероятность, а типичные значения этого коэффициента лежат около нуля.

Для этого нами была проверена связь между двумя векторами X_1 и X_2 путем расчета ранговой корреляции Спирмена и ранговой корреляции Кендалла. Для расчетов использовалась библиотека SciPy версии 1.3.2 в программном продукте Jupyter Notebook [10].

Сначала рассчитаем корреляцию Спирмена.

Распределение коэффициента ранговой корреляции Спирмена ρ при разных значениях K (число элементов ранжировки) можно найти в специальных сборниках статистических таблиц, например в таблицах Л.Н. Большева и Н.В. Смирнова [1, с. 153] либо использовать уже существующие программные продукты. На этом основании рассчитаем значение коэффициента ранговой корреляции Спирмена:

$$\rho = 0,7833333333333333.$$

Напомним, что коэффициент может изменяться в диапазоне от -1 до $+1$. При полной согласованности между элементами двух последовательностей коэффициент равен единице. Равенство коэффициента минус единице наблюдается при полной рассогласованности между элементами двух последовательностей.

Результат: уровень взаимосвязи между двумя отмеченными ранжировками X_1 и X_2 близок к единице на основе расчета коэффициента корреляции Спирмена.

Согласно трактовке Л.Е. Полякова [7] при использовании коэффициента ранговой корреляции можно условно трактовать тесноту связи между признаками следующим образом. Так, значения коэффициента корреляции $0,3$ и менее – показатели слабой тесноты связи; значения более $0,4$, но менее $0,7$ – показате-

ли умеренной тесноты связи, а значения 0,7 и более – показатели высокой тесноты связи.

Таким образом, в рамках данной трактовки между двумя векторами имеется высокая теснота связи.

Следующая задача, которую мы должны решить: «с какой степенью надежности мы можем полагаться на заключение о том, что в совокупности, из которой произведен выбор, существует корреляция, если получен данное значение выборочного коэффициента корреляции ρ . То есть необходимо проверить существенность наблюдавшейся корреляции рангов...» [4].

Рассчитаем P -значение для тестовой гипотезы, нулевая гипотеза которой состоит в том, что два набора данных некоррелированы, и имеет ту же размерность.

На основе стандартных расчетов SciPy версии 1.3.2 в программном продукте Jupyter Notebook получаем значение статистической значимости [10]

$P = 0,012519873019449882$, что меньше табличного.

Следовательно, такое значение $\rho \geq 0,78333$ могло появиться случайно лишь с вероятностью 0,012, что практически невозможно.

Это заставляет нас считать, что гипотеза независимости признаков опровергается имеющимися наблюдениями. И тем самым доказана положительная связь между значениями точечного и гистограммного коэффициентов.

К вышеизложенным выводам необходимо сделать замечание. Так как соответствующее число элементов ранжировки менее 10, а оно определяется через K – общее число вопросов, то нет необходимости вводить поправку на непрерывность.

Аналогичным образом для анализа уровня взаимосвязи можно использовать коэффициент ранговой корреляции Кэндалла.

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла равен

$\tau = 0,6666666666666666$.

Далее, рассчитаем P -значение для тестовой гипотезы, нулевая гипотеза которой состоит в том, что два набора данных не коррелированы, и имеет ту же размерность.

$P = 0,012665343915343916$.

Таким образом, получаем аналогичный вывод.

9. Возможные направления дальнейших разработок

1. Для подтверждения правдоподобности выводов необходимо провести дополнительные экспериментальные исследования на другом массиве испытуемых и массиве данных, полученных по результатам опроса. Тем самым, варьировать эти массивы как факторы, от которых зависит уровень правдоподобности гипотез и соответствующих выводов.

2. Необходима экспериментальная проверка введенной нами гипотезы №10. Мы полагаем, что сам вид экспертной оценки в виде гистограммы дает информацию о распределенной степени уверенности эксперта в своей оценке. В связи с этим будут проведены дополнительные исследования относительно соотношения между уровнем сложности тестовых задач и интегральной меры уверенности совокупности экспертов в понимании этих задач.

3. Необходимо дополнительное экспериментальное исследование уровня влияния когнитивных искажений на значения гистограммных $KH_i^j(N^j, N^j)$ и точечных $PA_i^j(N_i^j)$ коэффициентов для любого j -го тестового вопроса. Данное исследование, как мы полагаем, может выявить еще и взаимосвязь степени уверенности экспертов с ограничениями эвристических принципов.

4. Необходимо выдвижение новых гипотез на основе более детального исследования результатов полученных при анализе таблиц 1–9.

10. Заключение

1. На основе тестовых экспериментов было обнаружено наличие объективной составляющей уровней сложности задач.

2. Для подтверждения уровня правдоподобности выводов относительно наличия объективной составляющей сложности задач был введен и экспериментально исследован точечный коэффициент. Он позволяет оценить уровень сложности задачи заданной в виде тестового вопроса. В результате исследования было обнаружена устойчивость полученных выводов относительно наличия объективной составляющей уровней сложности задач:

- от числа опрашиваемых участников;
- от вида коэффициента, на основе которого и был получен этот вывод.

3. Экспериментально выявлен критерий для определения тестового вопроса как задачи третьего уровня сложности, когда спектр возможных вариантов ответов очень широк. Эксперимент показал подтверждение условий указанных в найденном критерии, что только у одного из девяти вопросов, а именно третьего, как впоследствии подтвердилось самого трудного, на основании расчета гистограммного и точечного коэффициентов. Кроме того, как было показано в первой части данного исследования [3] есть явно выраженные отличия в характере изменения диапазона разброса значений именно гистограммного коэффициента. Таким образом, полагаем, что критерием для определения тестового вопроса как задачи третьего уровня сложности является специального вида изменения диапазона разброса значений именно гистограммного коэффициента $KH_i(N^j, N^j)$. Этот диапазон разброса значений строго монотонно убывает с увеличением объема i -й выборки, но именно для третьего вопроса начиная с объема выборки равной 90, а у всех остальных вопросов данный диапазон строго монотонно убывал, начиная с минимальных значений объемов выборок равным 10 либо 20. (См. обоснование гипотезы №3 для гистограммного коэффициента [3]).

4. Предложены тестовые задачи, для которых, на основе экспериментальных исследований, показано наличие существенного влияния когнитивных искажений на процесс принятия решений экспертами. Наглядно проиллюстрировано, что выполняя адаптивную функцию, когнитивные искажения хотя и приводят к более быстрому решению задач, но вносят ошибки.

5. Предложен план дальнейших исследований по теме: экспериментальные исследования тестовых вопросов.

Литература

1. БОЛЬШЕВ Л.Н., СМЕРНОВ Н.В. *Таблицы математической статистики*. – М.: «Наука», 1965. – С. 153.

2. Генерация псевдослучайных чисел в среде Visual Basic [Электронный ресурс] // Случайная выборка. – URL: <https://www.planetaexcel.ru/techniques/2/94/> (дата обращения: 15.12.2019).
3. КАЛМЫКОВ Н.С., СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Введение и экспериментальное исследование гистограммного коэффициента как инструмента для изучения явления сверхдоверия в среде экспертов* // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 87. – С. 101–130.
4. *Ранговые корреляции. – Зарубежные статистические исследования.* – М.: «Статистика», 1975. – 216 с.
5. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В. *Системный анализ технологии экспертного прогнозирования.* – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ «МАИ», 2007. – 348 с.
6. СИДЕЛЬНИКОВ Ю.В., САЛТЫКОВ С.А. *Процедура установления соответствия между задачей и методом* // Экономические стратегии. – 2008. – №7(65). – С. 102–109.
7. *Статистические методы исследования в медицине и здравоохранении* / Под ред. проф. Л.Е. Полякова. – Л.: Медицина, 1971. – 200 с.
8. BONNARCOSI A., APREDA R., FANTONI G. *Expert biases in technology foresight. Why they are a problem and how to mitigate them* // Technological Forecasting and Social Change. – February, 2020. – Vol. 151.
9. CHENG M.N., WONG JANE W.K., CHEUNG C.F., LEUNG K.H. *A scenario-based roadmapping method for strategic planning and forecasting: A case study in a testing, inspection and certification company* // Technological Forecasting and Social Change. – October, 2016. – Vol. 111. – P. 44–62.
10. JUPYTER NOTEBOOK *Программный компонент.* – URL: <https://jupyter.org/> (дата обращения 19.04.2020).
11. KAHNEMAN D., TVERSKY A. *Subjective Probability: A Judgment of Representativeness* // Cognitive psychology. – 1972. – No. 3. – The Hebrew University, Jerusalem, 1972. – P. 430–454.
12. TVERSKY A., KAHNEMAN D. *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* // Sciences journal. – 1974. – Vol. 185. – P. 1124–1131.

13. VEITAS V., WEINBAUM D. *Living Cognitive Society: A 'digital' World of Views* // Technological Forecasting and Social Change. – 2016. – Vol. 114. – P. 16–26.

EXPERIMENTAL STUDIES ON THE TEST QUESTIONS BASED ON THE POINT RATIO

Nikita Kalmykov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher (kalmikov-nik@bk.ru).

Yuri Sidelnikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, leading researcher; Moscow Aviation Institute, Moscow, professor (sidelnikov@mail.ru).

Abstract: The article proposes the existence of an objective component of the complexity of the problem which is experimentally verified and proposes the point ratio which is introduced and experimentally studied. For this purpose, the so-called "point coefficient" is introduced and experimentally investigated, which allows us to estimate the level of complexity of the problem given in the form of a test questions. This coefficient is based on the answers to these questions that the level of complexity of the problem is estimated. Hypotheses describing the dynamics of changes in the values of the point coefficient are proposed and experimentally tested. Also, the stability of the obtained conclusions based on the results of calculations for two qualitatively different coefficients relative to the number of respondents was checked. The criterion for determining the test question as a problem of the third level of complexity is experimentally found and tested. The reason for this is the nature of the change in the range of the spread of the values of the histogram coefficient. An experimental study of the presence of cognitive distortions in the assessment of some test tasks by experts was conducted. Possible directions for further development are proposed.

Keywords: expert appraisals, test question, point ratio.

УДК 303.833.5+303.832.32

ББК 65.054. 3+ 16.23+ 87.256.643

DOI: 10.25728/ubs.2021.89.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.*

Поступила в редакцию 31.08.2020.

Опубликована 31.01.2021.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ МАСШТАБНЫХ ЧЕЛОВЕКО-МАШИННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ¹

Пономарев А. В.²

(ФГБУН СПб ФИЦ РАН, Санкт-Петербург)

Системы, использующие элементы масштабных человеко-машинных вычислений (краудсорсинг, крауд-вычисления), получают в последнее время достаточно широкое распространение при решении целого ряда практических задач. Одной из основных проблем, связанных с применением человеко-машинных вычислений, является качество результатов, получаемых таким образом. Перспективным подходом к проектированию подобных систем является применение теоретико-игрового моделирования ситуации (участника системы и способа распределения вознаграждения), чтобы принятый способ распределения вознаграждения способствовал приложению участником максимальных усилий и, соответственно, достижению целей создателя системы. В статье представлены результаты обзора в области применения теоретико-игровых моделей для рационального проектирования систем, использующих масштабные человеко-машинные вычисления. В частности, на основе проведенного исследования выявлены допущения, используемые при теоретико-игровом моделировании таких систем, и основные классы моделей. Полученные результаты сгруппированы в соответствии с типологией систем масштабных человеко-машинных вычислений. Показано, какие допущения, цели моделирования и виды моделей характерны для каждого выделенного типа таких систем. Обзор может быть полезен как практикам, осуществляющим создание программных систем, включающих элементы масштабных человеко-машинных вычислений, так и исследователям, работающим в этой области.

Ключевые слова: крауд-вычисления, краудсорсинг, коллективный интеллект, человеко-машинные системы, теория игр, дизайн механизмов, аукционы.

1. Введение

Под масштабными человеко-машинными вычислениями (МЧМВ) понимается такая организация процесса сбора и обра-

¹ Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 0073-2019-0005.

² Андрей Васильевич Пономарев, к.т.н. (ponomarev@iias.spb.su).

ботки информации, при которой для выполнения части операций привлекается широкое сообщество людей, как правило, взаимодействующих посредством сети Интернет. Системы, использующие элементы МЧМВ, получают в последнее время достаточно широкое распространение в целом ряде приложений, среди которых можно выделить crowdsensing (удаленный сбор информации с помощью распределенного сообщества), «гражданскую науку» (citizen science – применение усилий сообществ волонтеров при обработке научных данных), совместное создание карт, подготовку размеченных наборов данных и валидацию результатов работы систем машинного обучения.

Простым, но достаточно распространенным сценарием применения МЧМВ является процесс оцифровки какой-либо организацией архива (или поступающего потока) бумажных форм. В основе этого процесса находится ПО распознавания изображений (текста). В случае неудачи автоматического распознавания отсканированный образ может быть передан на одну из площадок организации МЧМВ (старейшей такой площадкой является Amazon Mechanical Turk [<http://mturk.com>]), где распознавание будет произведено людьми за определенное вознаграждение.

Один из наиболее успешных проектов по применению МЧМВ в научных исследованиях – Galaxy Zoo [<https://www.zooniverse.org/projects/zookeeper/galaxy-zoo/>] – посвящен классификации изображений галактик на снимках, полученных с телескопа. Проект оказался настолько успешным, что постепенно перерос в целую площадку так называемой «гражданской науки» (citizen science) Zooniverse [<https://www.zooniverse.org>], на которой на настоящий момент развернуты десятки проектов по обработке данных научных исследований (преимущественно в области астрономии и биологии) и зарегистрировано более 2 млн участников.

Ключевыми проблемами при практическом применении МЧМВ являются привлечение участников и обеспечение качества результатов. Так, привлечение участников связано с вопросами мотивации и стимулирования. В практических исследованиях выявляются разные виды мотивации участников таких си-

стем: внутренняя (альтруизм), внешняя (монетарная, социальный статус и пр.). Под качеством здесь понимается, в первую очередь, корректность, т.е. соответствие результата выполнения некоторой задачи (сбора или обработки информации) с помощью МЧМВ и «истинного» результата этой задачи (который, например, мог бы быть получен компетентным «экспертом», заинтересованным в выполнении данной задачи). Работы по обеспечению качества сосредоточены на способах распределения (назначения) работ среди участников и согласовании получаемых от них результатов [1]. Большинство существующих методов обеспечения качества в конечном итоге моделируют участника как некоторый «зашумленный» датчик, для которого характерен определенный профиль ошибок. Такая высокоуровневая модель оказывается в определенном смысле полезной. Например, с ее помощью можно оптимизировать параметры алгоритмов согласования и распределения заданий для достижения желаемого уровня уверенности в корректности (или точности) получаемого результата. Однако подобная модель, во-первых, игнорирует причины, по которым возникают те или иные профили ошибок, а во-вторых, обладает достаточно низкой предсказательной ценностью – с ее помощью невозможно предсказать, окажется ли определенный способ привлечения участников и обработки информации действенным, поскольку параметры модели могут быть оценены только в ходе практического использования системы человеко-машинных вычислений.

Одним из путей для преодоления этого ограничения является использование того факта, что человек, принимающий участие в процессе МЧМВ, в общем случае преследует свои цели (которые могут не совпадать с целями создателя системы). Явное включение этих целей в модель участника и понимание той роли, которую они играют в его поведении, позволяет более детально анализировать последствия тех или иных решений, принимаемых в ходе проектирования системы, использующей элементы МЧМВ.

Математическим аппаратом, с помощью которого может быть осуществлен учет «свободы выбора» участника, является теория игр. Возможные действия участника соответствуют

стратегиям, затраты усилий и получаемое вознаграждение определяют функцию полезности. Задача проектирования МЧМВ, таким образом, заключается в формировании такого механизма назначения вознаграждения, при котором для участника выгодной является стратегия, максимизирующая вероятность получения качественного решения.

Одной из первых попыток систематизировать результаты применения теории игр в МЧМВ является статья [14]. В этой статье намечены основные цели применения игровых моделей и, в частности, впервые звучат предложения о возможности разработки теории создания систем человеческих вычислений. С одной стороны, делается наблюдение о том, что такая теория по замыслу и целям очень похожа на раздел теории игр, посвященный дизайну механизмов распределения вознаграждения (mechanism design), с другой – подчеркивается отличие от рассматриваемой в области дизайна механизмов ситуации, в частности, предполагается отсутствие аналога принципа выявления (revelation principle) в этой области.

В данной статье изложены результаты обзора литературы, посвященной применению теоретико-игровых моделей для решения задач проектирования МЧМВ, с целью ответа на два основных вопроса:

1. Каковы допущения, используемые при теоретико-игровом моделировании МЧМВ?
2. Каковы основные виды моделей, применяемых при теоретико-игровом моделировании МЧМВ?

Очерчивая границы описанного в статье исследования, следует отметить следующее. В ряде работ отмечается, что данная область граничит с так называемыми «нехорошими» (англ. wicked) социо-техническими задачами [20], в которых агенты не имеют жестко заданного набора стратегий и множество возможных поведений является неизвестным. Соответственно, для таких задач может требоваться принципиально новый инструментарий. Кроме того, данный обзор посвящен моделям и методам, подходящим для проектирования системы с элементами МЧМВ, однако в ряде публикаций проводится анализ решения о том, стоит ли прибегать к решению задачи с помощью МЧМВ

(и стоит ли пытаться саботировать попытки конкурентов прибегнуть к МЧМВ). Наиболее яркой работой, где само решение о применении МЧМВ рассмотрено с точки зрения теории игр, является [19]. Не затрагиваются также работы, посвященные динамике сообщества, в том числе с применением эволюционных теоретико-игровых моделей [17].

В настоящее время существует большое количество вариантов организации МЧМВ (различающихся по способу распределения заданий, обработки результатов, используемым мотивам и пр.). По всей видимости, единой (иерархической) классификации систем МЧМВ не предложено, все существующие классификации основаны на выделении определенных отличительных аспектов подобных систем. Более того, каждый из конкретных вариантов организации МЧМВ может быть смоделирован различным образом (на разных уровнях, с различными допущениями), что порождает, во-первых, большое многообразие моделей, а во-вторых, сложность их иерархической классификации (по всей видимости, отсутствие единого, наиболее значимого, основания для такой классификации). В связи с этим в данной статье значительное место отведено основным аспектам МЧМВ, учитываемым при моделировании (каждый из которых может служить основанием классификации), типовым принимаемым допущениям и пр. Классификация же, использованная для структуризации раздела 2, имеет в большой степени практическую ориентацию.

Статья организована следующим образом:

В разделе 2 вкратце описаны основные классы систем МЧМВ, получившие наибольшее внимание при теоретико-игровом моделировании, пояснено их устройство и основные задачи, решаемые при проектировании (и теоретико-игровом моделировании).

В разделе 3 описаны основные «строительные блоки» теоретико-игровых моделей систем МЧМВ и основные решения, которые принимаются при построении теоретико-игровой модели такой системы. Таким образом, данный раздел в определенном смысле поясняет язык, используемый в остальной части статьи.

В разделе 4 обсуждаются конкретные модели для разных классов систем и результаты, полученные с помощью этих моделей.

2. Основные классы систем МЧМВ

Как уже отмечалось, идея использования интеллектуальных и творческих способностей человека при масштабной обработке информации оказалась достаточно востребованной и породила значительное количество частных технологий, отличающихся характером деятельности, выполняемой человеком в рамках системы, способом мотивации, видом применяемого вознаграждения, способом обработки результатов и рядом других параметров. Существует множество попыток классификации таких систем, в том числе на основе формальных языков (например, онтологий) [2]. Данная статья не претендует на общую классификацию МЧМВ – выделяемые здесь классы значимы, в первую очередь, с точки зрения их влияния на структуру теоретико-игровых моделей.

2.1. СОРЕВНОВАТЕЛЬНЫЕ МЧМВ (КОНКУРСЫ)

К данному типу относятся МЧМВ, в которых организатор (заказчик) объявляет открытый конкурс на решение задачи, а все (как правило) участники МЧМВ имеют возможность принять участие в этом конкурсе. Принятие участия в таком конкурсе означает, что участник решает предложенную задачу и отправляет решение организатору. Организатор, в свою очередь, проводит оценку решений и выбирает одно или несколько решений, авторы которых получают определенное заранее в условиях конкурса вознаграждение. Как правило, с помощью соревновательных МЧМВ решаются сложные задачи, требующие достаточно высокой квалификации участников и значительных усилий. Примерами применения соревновательных МЧМВ являются конкурсы по анализу данных и машинному обучению, проводимые Kaggle [<http://kaggle.com>], конкурсы на разработку ПО, проводимые TopCoder [<http://topcoder.com>], конкурсы инновационных идей Innocentive [<http://innocentive.com>], а также

многочисленные конкурсы (на создание рекламных роликов, слоганов и пр.), проводимые различными коммерческими компаниями.

Важными особенностями этого класса являются:

Свойства решения:

- сложное, качество может варьироваться в широких пределах;

- как правило, не комбинируется с другими.

Оценка решений:

- решения можно оценить (в значительной степени) объективно;

- организатор в состоянии обработать и оценить все полученные решения (и упорядочить их в соответствии с неким критерием).

Вознаграждение:

- как правило, денежное и достаточно большое (во всяком случае за победу).

Целью организатора подобных систем является создание такого механизма назначения вознаграждения, при котором будет получено наилучшее решение поставленной задачи.

Моделированию принятия решений участниками систем МЧМВ, основанных на применении соревновательных элементов, посвящены работы [3, 5, 12, 16].

2.2. СИСТЕМЫ ВЫПОЛНЕНИЯ МИКРОЗАДАНИЙ

К данному типу относятся МЧМВ, в которых организатор публикует, как правило, достаточно большое количество однотипных заданий (микрозаданий), которые должны быть решены с помощью людей-участников среды МЧМВ. Распределение заданий между участниками может осуществляться либо централизованно (средой МЧМВ – например, на основе истории решения участником подобных заданий в прошлом), либо задания выбираются участниками из некоторого общедоступного пула. Участник выполняет задание, отправляет результат организатору и получает фиксированное вознаграждение, размер которого указан при выполнении задания. Как правило, микрозадания сами по себе достаточно простые (анализ изображения и поиск

на нем определенных объектов, классификация изображения и пр.) и их выполнение занимает не более нескольких минут. Организация выполнения микрозаданий производится через такие площадки краудсорсинга как Amazon Mechanical Turk [<http://mturk.com>], Clickworkers [<http://clickworkers.com>], Яндекс.Толока [<http://toloka.yandex.ru>].

Важными особенностями этого класса являются:

Свойства решения:

- простое (набор слов, число, иногда просто «да/нет»);
- с точки зрения оценки качества часто либо правильное (допустимое), либо неправильное;
- комбинация решений зачастую не имеет смысла, поскольку для определенного задания есть только одно правильное решение (этот факт часто используется для перекрестной проверки присылаемых участниками решений).

Оценка решений:

- решения можно оценить объективно;
- организатор не в состоянии обработать и проверить все полученные решения.

Вознаграждение:

- как правило, денежное и очень небольшое (обычно до 100 руб.).

Данные особенности обуславливают специфические проблемы систем МЧМВ, основанных на выполнении микрозаданий. Так, в силу невозможности проверки организатором всех поступивших решений (из-за их большого количества) исполнитель потенциально имеет возможность предоставить неудовлетворительное решение, надеясь получить за него вознаграждение (так называемый *free-riding*). Для противодействия этому вводятся различные механизмы обеспечения качества, основанные на введении определенной избыточности (одно задание назначается нескольким участникам, перекрестная проверка решений и пр.). С другой стороны, независимо от истинного качества решения участника организатору может оказаться выгодно заявить, что оно является недопустимым и, следовательно, отказаться от выплаты вознаграждения (так называемые «ложные жалобы», *false reporting*). Поскольку часто для борьбы

с этими эффектами используются схемы репутации, то сопутствующей задачей проектировщиков подобных систем является извлечение правдивой информации в рамках репутационных схем [6].

Моделированию принятия решений участниками систем МЧМВ, основанных на выполнении микрозаданий, посвящены работы [7, 25, 27].

2.3. СИСТЕМЫ СОВМЕСТНОГО СОЗДАНИЯ

В таких системах МЧМВ организатор публикует задание, доступное, как правило, большому количеству участников. В этом смысле системы совместного создания оказываются близки к соревновательным МЧМВ. Ключевое же отличие от систем соревновательного МЧМВ оказывается в том, что участники могут видеть результаты, предложенные другими участниками, в том числе они могут формировать решения на основе уже предложенных, обобщая и дополняя их. Сложность заданий в системах этого класса является промежуточной между соревновательными МЧМВ и системами микрозаданий: выполнение задания может занимать несколько часов и потребовать определенной квалификации. Примерами систем совместного создания являются Wikipedia [[http:// https://www.wikipedia.org/](http://https://www.wikipedia.org/)], различные форумы вопросов и ответов (StackOverflow [[http:// https://stackoverflow.com/](http://https://stackoverflow.com/)], Quora [<http://quora.com>] и др.). Типичной мотивацией в существующих системах совместного создания является альтруизм или социальный статус, однако это не обязательно.

Свойства решения:

- как правило, от нескольких абзацев до страницы текста;
- качество может варьироваться в достаточно широких пределах;
- комбинация решений может иметь смысл; как правило, она не может быть осуществлена механически, но вполне может быть осуществлена организатором или участником, подготавливающим собственное решение.

Оценка решений:

- в большинстве случаев качество решения можно оценить объективно (хотя на форумах вопросов и ответов встречаются субъективные вопросы, объективная оценка качества ответа на которые не всегда возможна);

- организатор видит все полученные решения и на основе их синтеза формирует собственное видение.

Вознаграждение:

- как правило, немонетарное либо отсутствует (альтруизм) или социальный статус.

Основная проблема при проектировании подобных систем состоит в формировании такого механизма распределения вознаграждения (в системе социального статуса – «значков», рейтинга, статусов), чтобы подтолкнуть участников к максимально активному участию (в смысле качества и оперативности вклада).

Моделированию принятия решений участниками систем совместного создания посвящены работы [8, 12, 13].

2.3. СИСТЕМЫ СБОРА ИНФОРМАЦИИ

В системах данного класса организатор формирует запрос на информацию определенного вида, а участники выражают готовность предоставить такую информацию на определенных условиях (как правило, участники могут назначить цену). Данный вид систем имеет очень много общих черт с системами выполнения микрозадач и с системами совместного создания. Однако отличительным свойством, из-за которого оказывается целесообразно рассматривать такие системы отдельно, является «аддитивность» информации и акцент на количество собираемой информации, а не на достоверность (например, в силу того, что достоверность обеспечивается самим механизмом сбора).

Распространенными примерами систем сбора информации являются так называемые краудсенсинг (crowdsensing), в котором участники выступают как своеобразные «датчики» относительно простых сведений об окружающем мире, и participatory sensing, в котором участники просто предоставляют доступ центральному приложению к определенным ресурсам своих мобильных устройств [18, 22].

Свойства решения:

- как правило, простое: фотография, ответ на вопрос с фиксированным набором вариантов;
- качество зачастую гарантируется процессом сбора информации, если нет, то решение может быть правильным или нет (что легко установить);
- комбинация решений, как правило, может быть осуществлена механически (например, собранные данные могут быть наложены на карту с образованием слоя распределения измеряемого признака).

Оценка решений:

- качество решения можно оценить объективно;
- организатор видит все полученные решения, проверить он их не может, но обычно это и не требуется.

Вознаграждение:

- обычно монетарное (размер вознаграждения от малого (сотни рублей) до среднего (несколько тысяч рублей)).

Задача организатора такой системы – разработать такой механизм, который бы способствовал привлечению определенного количества участников, и обеспечению, в первую очередь, количественных параметров собираемой информации (с учетом затрачиваемых на сбор ресурсов).

Исследованию систем сбора информации посвящены работы: [17, 24].

2.4. ПРОЧИЕ СИСТЕМЫ

Так называемые «серьезные игры» (также «games with a purpose», GWAP) – класс систем МЧМВ, похожих на системы обработки микрозаданий. В частности, сходство это заключается в том, что предлагаемые участникам задания, как правило, являются простыми, могут быть легко проверены, однако их количество не позволяет организатору проверить все результаты, полученные от участников, поэтому проверка производится самими участниками на базе специальным образом сконструированной игровой механики. Отличие же заключается в том, что если традиционные микрозадания предполагают монетарное вознаграждение, то в GWAP основным мотивом для участника является получение удовольствия от игры (т.е. игровая механика).

ка должна быть привлекательной сама по себе). Основная цель, преследуемая при конструировании таких систем, состоит в том, чтобы разработать такую игровую механику, которая была бы привлекательной, но при этом поощряла поведение участника, способствующее достижению целей создателя игры (организатора). Теоретико-игровому анализу систем GWAР посвящена работа [9].

Особым классом систем МЧМВ являются так называемые рынки предсказаний (prediction markets). Суть их заключается в том, что участники (на основе имеющейся у них информации) делают ставку на то, что определенное событие произойдет в будущем, получая вознаграждение в том случае, если событие действительно происходит [23]. Соотношение сделанных ставок используется организатором для оценки вероятности события. Основными проблемами проектирования таких систем является разработка такого механизма распределения вознаграждений, чтобы стимулировать участника к правдивому предоставлению имеющейся у него информации о возможности события. Проблемам разработки таких механизмов посвящена, например, статья: [17].

Ключевые свойства основных классов систем МЧМВ, влияющих на структуру и допущения моделей, сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Свойства основных классов систем МЧМВ

	Соревновательные МЧМВ	Системы выполнения микрозаданий	Системы совместного создания	Системы сбора информации
Свойства решения	– сложное; – не комбинируется.	– простое; – не комбинируется.	– средней сложности; – может комбинироваться.	– простое; – возможно механическое комбинирование; – часто корректность гарантируется.
Оценка решения	– возможна объективная оценка; – организатор может оценить все.	– возможна объективная оценка (верно/неверно); – организатор не может оценить все.	– возможна объективная оценка (как правило); – организатор может оценить и использовать все решения.	– возможна объективная оценка; – организатор может использовать все решения.

Таблица 1 (продолжение).

Вознаграждение	– денежное (большое).	– денежное (небольшое).	– альтруизм или социальный статус.	– денежное.
Цель заказчика (и механизма)	– получение наилучшего решения.	– получение корректных решений.	– активное долговременное участие.	– обеспечение количественных характеристик собираемой информации.

3. Элементы моделей систем МЧМВ

При построении теоретико-игровых моделей систем МЧМВ, как правило, принимается ряд существенных решений (и допущений) относительно моделируемой системы, а также характеристик и поведения ее участников. В данном разделе описаны основные из этих решений, которые, в сущности, определяют пространство возможных моделей МЧМВ. Совокупность таких решений задает структуру и свойства конкретной модели, а возможные варианты формируют своеобразный словарь для дискурса в области моделирования МЧМВ.

Участие в системе МЧМВ. При составлении модели сам факт участия человека в системе может считаться предопределенным, «экзогенным». В таких моделях заведомо предполагается, что в системе МЧМВ есть определенное количество участников и они принимают решения только о том, каких стратегий они будут придерживаться при выполнении заданий, но не о том, принимать им участие в работе системы или нет. В ряде же работ (например, [8]) предлагаются модели с так называемым «эндогенным» участием, т.е. такие, в которых само решение о принятии участия в функционировании системы МЧМВ является одним из рассматриваемых действий пользователя.

Виды агентов. В большинстве работ в модели рассматривается только выбор стратегии участником, однако существуют и специальные модели, агентами которых являются участник и организатор (как правило, такие модели используются при анализе механизмов, противодействующих одновременно и free-

riding (отправка участником заведомо низкокачественных результатов в надежде получить вознаграждение) и false-reporting (попытка организатора отвергнуть качественно выполненную работу, чтобы не выплачивать вознаграждение за нее)). В [19] агентом является организатор МЧМВ, который принимает решение о том, прибегать ли к услугам МЧМВ и пытаться ли саботировать МЧМВ, организованные конкурентами.

Возможные действия участника МЧМВ. С точки зрения рассматриваемых действий участника, целесообразно выделить «высокоуровневые» и «низкоуровневые» модели. Под высокоуровневыми моделями будем понимать такие, в которых множество действий моделируется только прилагаемыми участником усилиями, т.е. множество стратегий участника в игре задается просто диапазоном рассматриваемых усилий (например, «прилагать усилия» / «не прилагать усилия») – конкретные действия участника в модели не учитываются. Во многих моделях уровень усилий моделируется бинарно (например, [4, 25]), в других моделях (в особенности, в моделях, основанных на аукционах) – непрерывен (например, [12, 24]). Уровень усилий как стратегия участника присутствует в большинстве теоретико-игровых моделей МЧМВ, поскольку их основной целью является построение механизма, «заставляющего» участника системы выбирать максимальный уровень усилий. В ряде моделей (в первую очередь в системах выполнения микрозадач и при отсутствии соревновательности, когда достаточно получить некоторый допустимый результат, не обязательно наилучший или единственно верный) уровень усилий может моделироваться как вероятность принятия результата заказчиком [7].

В низкоуровневых моделях рассматривается набор действий, специфичных для определенного приложения. Например, в [11] аппарат теории игр применяется для моделирования соревновательного поведения на платформах краудсорсинга ПО TopCoder и стратегиями являются конкретные действия, которые могут совершить участники (атаковать решение соперника или не атаковать). Модель, предложенная в [13], предназначена для форумов и систем вопросов-ответов, и в ней решением является момент публикации известной участнику информации.

Особенно популярны низкоуровневые модели при анализе «серьезных игр» (GWAP) [9], набор возможных действий в этом случае определяется игровой механикой, а целью анализа является доказательство того, что рациональный участник будет предпринимать именно те действия, в которых заинтересован разработчик системы.

Компетентность участника. В ряде моделей МЧМВ учитывается гетерогенность участников по уровню умений (который может характеризоваться либо как затраты на получение определенного результата, либо как максимально возможный результат). В аукционных моделях, как правило, моделируется числом (см., например, [12, 24]), в некоторых моделях интерпретируется как вероятность, с которой данный участник может получить корректный результат [4]. Компетентность может моделироваться и бинарно, как выделение двух классов участников, обладающих схожими характеристиками («эксперт» и «новичок») [25]. В приведенных примерах описание компетентности является абстрактным, в ряде моделей применяется также прикладная («низкоуровневая») модель компетентности. Так, в моделях сбора информации компетентность иногда трактуется в теоретико-множественном смысле как знание некоторого множества фактов, имеющих отношение к задаче (например, [13, 17]).

Ряд работ основываются на гомогенности участников [7, 8, 26]. Предположение о гомогенности обычно обосновывается тем, что задания рассматриваемого типа могут быть выполнены любым или практически любым человеком (что часто бывает в случае микрозаданий).

Стоимость усилий участника. Как правило, просто задается для каждого уровня усилий (возможно, в зависимости от типа участника – например, как функция [12]).

Доступная для участника информация. При выборе стратегии участник может быть опираться на имеющуюся информации о свойствах (в первую очередь компетентности) других участников. Как правило, имеют место следующие допущения: отсутствие какой-либо информации о способностях других участников [25] или знание распределения компетентностей

[12]. Кроме непосредственно доступной участникам информации важным оказывается симметричность этой информации. В большинстве работ предполагается, что информация, которой обладают участники, симметрична. Редким исключением является статья [16], где анализ механизма основывается на асимметричности информации, которой обладают участники.

Бюджет организатора. Вопрос бюджета организатора оказывается важным в МЧМВ с монетарным вознаграждением. Он может не иметь значения (жестко задаваться механизмом) или не учитываться моделью (очень часто происходит именно так), наконец, он может учитываться моделью. В последнем случае возможны различные постановки: либо решается задача поиска механизма, обеспечивающего в равновесном состоянии нахождение решение должного качества с фиксированным бюджетом (например, [7]), либо минимизация бюджета. В частности, в ряде случаев стоимость для организатора рассматривается как один из критериев оценки механизма (см., [16, 26]).

С точки зрения принципиального устройства самих моделей, их можно разбить на две группы: «рефлексивные» (когда итоговая полезность участника зависит от действий других участников, что должно учитываться при выборе стратегии) и «нерефлексивные» (когда итоговая полезность зависит только от действий самого участника и параметров механизма).

Большинство описанных в литературе моделей относятся к первому типу, соответственно, их анализ сводится к поиску равновесных профилей стратегий (при определенном механизме). В свою очередь, такие модели могут быть симметричными (основанными на предположении, что зависимость полезности от усилий для разных участников одинакова) [7] и асимметричными [12, 16]. Основой анализа асимметричных моделей является понятие равновесия Байеса – Нэша.

Нерефлексивные модели, моделируются как «игры с природой». Например, подобная нерефлексивная модель предложена в статье [10] для системы сбора данных о доступности парковочных мест. Авторами предложена схема, стимулирующая участников приложения к сообщению правдивой информации о найденных местах, анализ же этой схемы основывается на

оценке полезности той или иной стратегии для участника приложения не только при определенных параметрах механизма, но и параметрах ситуации, в которой оказался участник.

4. Типовые модели разных классов систем МЧМВ

В данном подразделе описаны основные (базовые) модели для каждого из выделенных классов систем МЧМВ с учетом их особенностей. Представлены также основные направления развития базовых моделей, описанные в литературе.

4.1. СОРЕВНОВАТЕЛЬНЫЕ МЧМВ (КОНКУРСЫ)

При анализе МЧМВ соревновательного типа центральное место играют модели, основанные на аукционах. В частности, вслед за пионерской и широко цитируемой работой [5] – на аукционах, в которых «платят все» (all-pay auctions). Применение данной модели основывается на том, что организатор в состоянии, во-первых, оценить все решения, а во-вторых, ранжировать их в соответствии с предпочтительностью (или качеством в понимании организатора). Участники при этом получают вознаграждение в зависимости от позиции представленного ими решения в этом ранжированном списке. Цель, преследуемая организатором при проектировании такой системы, состоит в том, чтобы выбрать такой размер и механизм распределения вознаграждения, чтобы максимизировать качество либо наилучшего из полученных результатов, либо среднего.

Базовая модель для исследования таких систем задается следующим образом. Пусть N – количество игроков (участников МЧМВ), R – награда, которая предлагается за лучшее решение. Каждый участник характеризуется компетентностью, выражаемой как стоимость единицы усилий c_i . Ставки игроков соответствуют уровню усилий b_i , который участники прикладывают для выполнения конкурсного задания. Тогда в случае победы полезность игрока равна $R - c_i b_i$, а в случае поражения $-c_i b_i$.

В работе [5] базовая модель дополняется тем, что участнику доступно несколько конкурсов (с разным вознаграждением)

и сама игра состоит из двух этапов – на первом участник выбирает конкурс, а на втором – выбирает уровень усилий.

В работе [3] на базе концептуальной платформы аукционов, в которых «платят все», исследуется поведение чувствительных к риску участников в конкурсе с несколькими призами. В частности, в работе показано, что оптимальное распределение призового фонда среди победителей может существенно варьироваться в зависимости от склонности участников к риску: если участники нейтральны по отношению к риску, то механизмом, обеспечивающим наибольшую полезность для организатора, является назначение одного приза (только участнику, предложившему лучшее решение), а если участники не склонны к риску, то лучший результат можно получить, назначив вознаграждение участникам, предложившим несколько лучших решений.

В статье [16], в отличие от большинства других работ, рассматривается асимметричный конкурс (*asymmetric all-pay contest/auction*), в котором различаются не только типы участников (стоимости и возможности), но и их вероятностное знание относительно типов (других участников). Цель же состоит в том, чтобы разработать механизм распределения вознаграждения, показать уникальность равновесия и его эффективность. Авторы проводят исследование шести других механизмов и сопоставляют с предложенным. Рассматриваемая авторами модель – байесовская игра. Показано, что у предлагаемого авторами механизма есть одно равновесие по Байесу – Нэшу. Доказан также ряд свойств для разработанного механизма: автономность стратегии (поведение асимметричной модели схоже с поведением гомогенной симметричной), индивидуальная рациональность, мотивационная совместимость (*incentive compatibility* – доминирующей стратегией для участника является раскрытие его истинного типа).

В статье [21] предлагается оригинальная («низкоуровневая») модель использования краудсорсинга при проектировании, ее основой является конкурсная модель, в которой вознаграждение распределяется в соответствии с качеством решений, предоставляемых участниками. Однако «низкоуровневый» характер модели определяется тем, что вся задача моделируется как по-

иск экстремума некоторой функции (процесс разработки понимается как оптимизация качества результата за счет принятия проектных решений), а усилия участника моделируются как количество значений функции, которое участник мог узнать (за определенную плату). Авторы находят равновесия для разных постановок (с разными функциями выигрыша).

4.2. СИСТЕМЫ ВЫПОЛНЕНИЯ МИКРОЗАДАНИЙ

При отсутствии соревновательности каждый участник, выполнивший задание и предоставивший удовлетворительный результат, получает вознаграждение. И здесь неизбежно возникает пара проблем: free-riding («проблема безбилетника») и false-reporting («проблема ложных жалоб»). Суть «проблемы безбилетника» состоит в том, что участник имеет определенный стимул для того, чтобы предоставлять низкокачественные результаты (получение которых не требует усилий или почти не требует усилий), рассчитывая, что они будут приняты и он получит вознаграждение. Значимость этой проблемы тем сильнее, чем ниже уверенность участника в том, что результат будет тщательно проверен и чем больше разнообразие заказчиков, предлагающих задания. Суть же проблемы ложных жалоб состоит в том, что, получив качественный результат, заказчик имеет определенный стимул для того, чтобы заявить, что результат якобы является некачественным с целью уклонения от уплаты вознаграждения.

Таким образом, основной целью при обеспечении качества в ЧМВ, организованных без соревновательности, является разработка таких механизмов распределения вознаграждения, которые бы решали две вышеназванные проблемы.

4.2.1. РЕПУТАЦИИ И СОЦИАЛЬНЫЕ НОРМЫ

Одним из основных подходов к решению проблем безбилетника и «ложных жалоб» являются механизмы, основанные на понятиях репутации и социальных норм. Основным инструментом для исследования подобных механизмов являются повторяющиеся игры, для поиска равновесных стратегий в которых используется принцип «однократного отклонения» (one-time

deviation). Общим ограничением для этого класса механизмов (и, соответственно, общим допущением, используемым в соответствующих аналитических моделях) является долговременный характер взаимодействия участника с платформой МЧМВ.

Так, в [27] – классической статье, посвященной этой проблеме, – предлагается концептуальная теоретико-игровая платформа для стимулирования участников систем МЧМВ. Ссылаясь на то, что в ситуациях, когда все участники преследуют свои собственные цели, всегда есть несоответствие в общественной пользе между равновесными стратегиями и желаемым Парето-оптимальным исходом, авторы предлагают класс протоколов стимулирования, основанный на социальных нормах, интегрирующих механизмы репутации в существующие схемы оценки заданий.

Вариант репутационной схемы также предлагается в [15]. Для анализа предложенного подхода авторы используют факт того, что долгосрочная полезность в повторяющейся игре начиная с определенного момента представляет собой дисконтированную сумму ожидаемой полезности за период на бесконечном горизонте планирования. То есть, вообще говоря, выбор стратегии – это марковский процесс принятия решений, где состояние – это рейтинг, а действие – это действие, совершаемое игроком. Оптимальная же стратегия должна удовлетворять принципу «однократного отклонения».

В [6] рассматривается проблема инфляции рейтингов на площадках краудсорсинга, т.е. ситуация, когда большинство исполнителей имеют высокие рейтинги, хотя проблемы с качеством все равно есть. Утверждается, что причиной этому является социальное давление, из-за которого люди избегают оставлять негативные отзывы. В качестве контрмеры авторы предлагают новую систему рейтинга, в которой последствия рейтинга более очевидны (участники, которым мы поставили высокий рейтинг, в будущем будут назначены с более высокой вероятностью для выполнения именно наших работ; заказчики, получившие от участника высокий рейтинг, будут в дальнейшем отображаться выше у него). То есть авторы решают проблему правдивого извлечения информации (рейтинга, оценки). Соот-

ветственно, свойство механизма, которое представляет для авторов наибольший интерес, – это мотивационная совместимость (обеспечивающее правдивое раскрытие приватной информации).

В статье [25] рассматривается проблема привлечения участников к решению задач на площадках краудсорсинга и мотивировать к получению результатов высокого качества (что жизненно важно, чтобы сделать систему краудсорсинга устойчивой). Для решения проблемы предложен эффективный механизм стимулирования и протокол репутации. Решение учитывает гетерогенность навыков (эксперты и новички), включает процесс назначения заданий, схему рейтингов и др. элементы. Механизм состоит из системы рейтингов и схемы распределения вознаграждения. Выведен минимальный уровень награды, позволяющий получать качественные решения от экспертов, и показано, что протокол репутации является эффективным при выявлении и предотвращении нежелательного поведения. Для анализа используется концептуальная платформа *повторяющихся игр (repeated games)*. Особенность именно в механизме назначения. В соответствии с моделью участник может быть экспертом или новичком и принимает два решения: может либо согласиться с выполнением задания, либо отказаться от него. А согласившись, может приложить либо высокие, либо низкие усилия. При этом участник не обладает априорной информацией о типах других участников. Предлагаемый механизм основан на бинарной рейтинговой системе и разделении вознаграждения. Заказчик платит всегда (что снимает проблему «ложных жалоб»).

4.2.2. МЕХАНИЗМЫ, НЕ ОСНОВАННЫЕ НА РЕПУТАЦИИ

Статья [26] посвящена поиску механизма для борьбы с проблемами монетарного краудсорсинга *free-riding* и *false-reporting*. Авторы подчеркивают, что жизнеспособность любого механизма, использующего схемы репутации, основывается на допущении, что все участники терпеливы и планируют оставаться в системе длительное время. В противовес предлагаются два механизма (с помощью третьей стороны и без помощи), основанные на аукционах (любом существующем двойном аукци-

оне) и резервировании вознаграждения, «размораживаемого» после получения обратной связи. С помощью модели определяются условия для размера резервируемого вознаграждения.

В статье [7] рассматривается краудсорсинг микрозаданий. Важным отличием от многих других работ является то, что учитывается ограниченность бюджета заказчика. Проводится анализ двух популярных механизмов (мажоритарного голосования и экспертной проверки) и на модели показывается их ограниченность при получении результатов высокого качества с низкой стоимостью. Предлагается также собственный механизм, в котором участникам, плохо показывающим себя, назначаются тренировочные задания (за счет этого повышаются долгосрочные показатели качества). Участники считаются одинаково способными и обладают одинаковой стоимостью приложения усилий. В качестве концепции исследования используется симметрическое равновесие по Нэшу.

В статье [4] предлагается и исследуется механизм извлечения суждений посредством МЧМВ, в котором участники выбирают уровень усилий и то, сообщать полученный результат или нет. Мотивирующим примером является перекрестная проверка в МООС. То есть участник должен ознакомиться с некоторой работой и принять решение о том, должна ли она быть зачтена. Таким образом, результат работы – это бинарное суждение. Рассматривается ситуация, когда достоверная оценка степени истинности этого суждения невозможна (все работы не проверяются экспертами). В статье предлагается механизм, обладающий следующими свойствами: 1) приложение участниками максимальных усилий и правдивое сообщение результатов оценки является равновесным по Нэшу; 2) это равновесие обеспечивает максимальный выигрыш всем агентам, вне зависимости от их реальных возможностей.

4.3. СИСТЕМЫ СОВМЕСТНОГО СОЗДАНИЯ

В [8] рассматривается вопрос построения механизмов стимулирования участников краудсорсинга с целью получения результатов высокого качества, при этом процесс участия считается эндогенным, т.е. является результатом стратегического выбо-

ра агента: агенты принимают два решения – об участии в ответе на вопрос и о прикладываемых усилиях. Задача построения механизма решается применительно к двум контекстам МЧМВ: создание контента (например, сервис вопросов и ответов), при котором роль вознаграждения играет внимание к ответу участника (соответственно, скрытие ответа эквивалентно отсутствию вознаграждения), и распределение фиксированного бюджета. Для анализа игры используется концепция симметрического равновесия по Нэшу. Показано, что для систем создания контента любая возрастающая статистика (максимум, среднее качество) улучшается, когда награда за каждое место, кроме последнего, максимальна. Для систем с фиксированным бюджетом показано, что плата за участие (каждый участник МЧМВ платит за допуск к конкурсу фиксированный взнос, который добавляется к вознаграждению победителя) позволяет повысить качество лучшего решения.

В [12] исследуются вопросы формирования виртуальных механизмов стимулирования (систем «бейджей») для максимизации общего вклада участников в веб-сайт, когда пользователи мотивированы социальным статусом. Рассматривается теоретико-игровая модель, в которой участник сайта прикладывает усилия (имеющие определенную стоимость) и вознаграждается с помощью различных бейджей (символов, демонстрирующих определенные заслуги участника и отображающихся в его профиле и/или в подписи всех сообщений данного участника). Ценность бейджа определяется количеством пользователей, обладающих таким же бейджем или бейджем с более высоким статусом. Показано, что среди всех возможных механизмов назначения вознаграждения оптимальный механизм – доска лидеров: пользователи с вкладом меньше определенного не получают ничего, остальные ранжируются по вкладу. Далее исследуются обязательные свойства механизмов, приближенных к оптимальному. В частности, установлено, что свойства этих механизмов зависят от выпуклости ценности статуса. Так, если статус оценивается вогнутой функцией, любой механизм должен содержать разбиение на группы, размер которых зависит от количества участников в системе. Если, наоборот, выпуклой, то

любой механизм должен включать набор групп фиксированного размера. Сама рассматриваемая модель очень похожа на аукцион, когда каждый из участников обладает определенной способностью (приватная информация, всем известно распределение), прилагает определенные усилия и делает вклад. В зависимости от (величины, качества) вклада, участники разбиваются на группы (соответствующие назначению бейджей). В этих условиях анализируются механизмы: с абсолютным порогом, доска лидеров, доска лидеров с отсечкой. В качестве концепции решения применяется равновесие по Байесу – Нэшу.

Особенностью форумов вопросов и ответов (Quora, StackOverflow, Вопросы Mail.ru) является то, что участники могут видеть ответы друг друга и дополнять их. В [13] предлагается теоретико-игровая модель сервиса вопросов и ответов, в которой каждый участник обладает некоторой информацией, касающейся вопроса, и делает стратегический выбор момента, когда он опубликует ответ, интегрировав все опубликованные к этому моменту ответы и свой. Задающий же вопрос может прервать процесс в любой момент. Целью авторов статьи является поиск механизмов поощрения, при которых участники были бы заинтересованы в том, чтобы дать ответ как можно быстрее.

4.4. СИСТЕМЫ СБОРА ИНФОРМАЦИИ

Системы сбора информации образуют отдельный класс приложений. Общая схема механизмов этой группы такая: участники объявляют цену своих услуг (в том числе неправдиво), распределяются задания, итоговый результат решения характеризуется суммой результатов, полученных от отдельных участников. Цели здесь могут быть разные – механизм, максимизирующий вклад, минимизирующий стоимость при заданном вкладе, а также дополнительные свойства типа *individual rationality*, *truthfulness* и пр. Существенное отличие от конкурсных моделей в том, что там участник делает ставку своим вкладом (*all-pay auction*), в то время как здесь он сначала оглашает условия, а потом получает назначение в зависимости от озвученных условий. В этом смысле механизмы оказываются близки

к классическим механизмам – речь идет о правдивости раскрытия приватной информации (о трудоемкости выполнения задания по сбору).

В [24] посвящена исследованию оптимального (для заказчика) механизма сбора информации по средством краудсорсинга. То есть механизма, который позволил бы заплатить минимальную сумму для того, чтобы получить суммарный итоговый результат требуемого (допустимого) качества. Не предполагается гомогенность участников. Рассматривается два механизма: механизм, основанный на экономном (frugal) аукционе и механизм, основанный на игре Штакельберга. Показано, что предложенные механизмы удовлетворяют ряду полезных свойств и добавляют не более ограниченной суммы к оптимальному механизму, построенному без мотивации.

4.5. ДРУГИЕ СИСТЕМЫ

При рациональном проектировании так называемых «игр с целью» (GWAP) решается несколько другой круг проблем. Здесь речь идет о построении механизмов обеспечения качества (действующими лицами которых являются участники системы – как правило, речь идет о взаимной верификации), демонстрирующих желаемые свойства. Модель участника в GWAP минимальна, т.е. делается минимум допущений (пожалуй, кроме рациональности) и реальным объектом исследования являются правила GWAP. Статья [9] является одной из первых (или даже первой) статей, в которой осуществляется попытка теоретико-игрового анализа системы человеко-машинных вычислений. В частности, речь идет о GWAP PhotoSlap – приложении для семантической аннотации изображений. Авторы проводят теоретико-игровой анализ этих правил и показывают, что стратегический игрок действительно будет действовать так, как выгодно организаторам игры (в соответствии с «целевой стратегией»).

Даже в системах выполнения микрозаданий не все сводится к противоборству free-riding и false-reporting. В некоторых приложениях, где заданий мало, участников много и много участников выполняют одно задание, а истинный результат является

наблюдаемым, нет ни free-riding, ни false-reporting, потому что от платежа уклониться невозможно, а смысл во free-riding отсутствует, поскольку вознаграждение получает только давший истинный результат (который становится доступен всем). Подобная организация имеет очень много общего с конкурсами, только в конкурсе участники соревнуются в том, кто предложит вариант с лучшим качеством, а тут соревнуются в том, кто окажется ближе к истинному результату.

Основные подходы сведены в таблицу 2. Для каждого указан класс МЧМВ (определяющий основные задачи модели), свойства игроков (информация, которой обладают стороны, а также указание на то, являются ли они гомогенными – предполагает ли модель, что у всех участников одинаковые значения соответствующих характеристик), стратегии, а также некоторые особенности модели (используемая концепция равновесия, назначение и пр.). В некоторых случаях свойства игроков не указаны. Это означает, что для соответствующей модели данный аспект не принципиален и авторы не указывают свойства явно. Если не указано иное, то множеством игроков в модели является множество участников (выполняющих задания). В тех редких случаях, когда это не так, в таблице указаны стратегии для каждого вида игроков.

Таблица 2. Сводная таблица по теоретико-игровым моделям

Статья, год	Класс МЧМВ	Свойства игроков	Стратегии	Особенности модели
[5] 2009	Конкурс	Уровень умений (для каждого конкурса)	Выбор конкурса, выбор уровня усилий	Симметрическое равновесие по Байесу – Нэшу
[3] 2009	Конкурс	Уровень умений	Выбор уровня усилий	Симметрическое равновесие. Рассматриваются различные склонности участников к риску
[16] 2016	Конкурс	Уровень умений	Выбор уровня усилий	Асимметричный аукцион
[21] 2015	Конкурс	Гомогенность в смысле опыта и знаний	Выбор уровня усилий	Равновесие по Нэшу
[27] 2012	Микрозадания	Гомогенность. Индивидуальный рейтинг (назначается механизмом)	Уровень усилий (бинарный)	Повторяющиеся игры, принцип однократного отклонения
[15] 2017	Микрозадания	–	Этап 1: Прибегать ли к краудсорсингу Этап 2: Атаковать ли конкурента	Повторяющиеся игры, принцип однократного отклонения
[6] 2016	Микрозадания	–	Оценка работы (ее соответствие действительному качеству выполненной работы)	Предлагается механизм, обеспечивающий правдивое раскрытие информации о качестве выполненной работы. Повторяющиеся игры
[25] 2014	Микрозадания	Гетерогенные (2 уровня – эксперты и новички)	Отказ от выполнения задания, уровень усилий (бинарный)	Равновесие в чистых стратегиях (без механизма репутации). Повторяющиеся игры

Таблица 2 (продолжение).

[26] 2015	Микрозадания	Заказчик: ценность задания Участник: затраты на выполнение задания	Заказчик: принять или не принять Участник: выполнить или не выполнить	Игра в расширенной форме: принятие решения об участии, решение и оценка. Равновесие, совершенное по подыграм
[7] 2015	Микрозадания	Гомогенность	Качество решения (вероятность того, что оно будет принято)	Симметрическая игра (все остальные участники действуют одинаково). Симметрическое равновесие по Нэшу
[4] 2013	Микрозадания	Вероятность правильной оценки работы при приложении усилий	Уровень усилий при проверке работы (бинарный), правдивость раскрытия суждения	Равновесие по Нэшу
[8] 2012	Совместное создание	Гомогенность. Функция стоимости прикладываемых усилий	Участие, уровень прикладываемых усилий	Симметрическое равновесие по Нэшу
[12] 2015	Совместное создание	Способность (определяет затраты на приложение усилий)	Уровень усилий	Вознаграждение с помощью бейджей (социальный статус). Равновесие по Байесу – Нэшу
[13] 2009	Совместное создание	Обладание некоторым фрагментом информации о проблеме	Момент раскрытия имеющейся информации (интеграции ее в имеющийся ответ)	Равновесие по Нэшу в чистых стратегиях
[24] 2017	Сбор информации	Потенциальная ценность вклада, трудоемкость	Уровень усилий (вещественный, от 0 до 1), декларация потенциальной ценности вклада и трудоемкости	Выбор механизма, обеспечивающего правдивое раскрытие информации. Равновесие по Нэшу
[9] 2007	GWAP	—	Внутриигровые действия (определяемые механикой игры)	Равновесие, совершенное по подыграм

5. Заключение

В статье представлены результаты обзора в области применения теоретико-игровых моделей для рационального проектирования систем, использующих МЧМВ. В частности, на основе проведенного исследования выявлены допущения, используемые при теоретико-игровом моделировании таких систем, и основные классы моделей. Полученные результаты сгруппированы в соответствии с типологией систем МЧМВ, показано, какие допущения, цели моделирования и виды моделей характерны для каждого выделенного вида таких систем.

Важнейшим аспектом является процесс валидации разрабатываемых моделей, так как зачастую модели достаточно абстрактны, а определение функций полезности участников основывается на достаточно значительном перечне допущений (хорошим руководством по проблеме валидации является статья [21]). При составлении обзора отмечено по крайней мере два способа валидации моделей: 1) сопоставление предсказаний модели с реальным поведением участников краудсорсинговой площадки [5]; 2) проведение поведенческих экспериментов, демонстрирующих эффективность разработанного механизма [7, 21]. Анализ же моделей проводится как аналитически [10], так и с помощью имитационного моделирования [15, 17, 24, 27] (подавляющее большинство работ).

Следует отметить, что при составлении обзора автору не встретилось попыток использовать элементы поведенческой теории игр при проектировании МЧМВ, что создает определенные перспективы для новых исследований в этой области.

В целом проведенный обзор демонстрирует, что некоторые разделы теории игр не только могут использоваться для рационального проектирования систем МЧМВ, но и активно применяются для этой цели. Тем не менее существует определенный «зазор» между теорией и практикой, и автор надеется, что данная статья послужит устранению этого «зазора».

Литература

1. ПОНОМАРЕВ А.В. *Методы обеспечения качества в системах крауд-вычислений: аналитический обзор* // Труды СПИИРАН. – 2017. – №5(54). – С. 152–184.
2. ПОНОМАРЕВ А.В. *Онтология для описания приложений, использующих элементы крауд-вычислений* // Кибернетика и программирование. – 2018. – №3. – С. 25–37.
3. ARCHAK N., SUNDARARAJAN A. *Optimal Design of Crowdsourcing Contests* // Proc. of the Int. Conf. on Information Systems – ICIS 2009. – Article 200. – P. 1–16.
4. DASGUPTA A., GHOSH A. *Crowdsourced judgement elicitation with endogenous proficiency* // Proc. of the 22nd Int. Conf. on World Wide Web – WWW'13. – 2013. – P. 319–330.
5. DIPALANTINO D., VOJNOVIC M. *Crowdsourcing and all-pay auctions*. – New York, New York, USA: ACM Press, 2009. – P. 119–128.
6. GAIKWAD S. (NEIL) S. et al. *Boomerang: Rebounding the Consequences of Reputation Feedback on Crowdsourcing Platforms* // Proc. of the 29th Annual Symposium on User Interface Software and Technology. – 2016. – P. 625–637.
7. GAO Y., CHEN Y., LIU K.J.R. *On Cost-Effective Incentive Mechanisms in Microtask Crowdsourcing* // IEEE Trans. on Computational Intelligence and AI in Games. – 2015. – No. 1(7). – P. 3–15.
8. GHOSH A., MCAFEE P. *Crowdsourcing with endogenous entry*. – New York, New York, USA: ACM Press, 2012. – 999 p.
9. HO C.-J., CHANG T., HSU J.Y. *Photoslap: A multi-player online game for semantic annotation* // Proc. of the 22nd National Conf. on Artificial intelligence. – 2007. – Vol. 2. – P. 1359–1364.
10. HOH B. et al. *TruCentive: A game-theoretic incentive platform for trustworthy mobile crowdsourcing parking services* // Proc. of the IEEE Conf. on Intelligent Transportation Systems (ITSC-2012). – P. 160–166.

11. HU Z., WU W. *A Game Theoretic Model of Software Crowdsourcing* // Proc. of the IEEE 8th Int. Symposium on Service Oriented System Engineering. – IEEE, 2014. – P. 446–453.
12. IMMORLICA N., STODDARD G., SYRGKANIS V. *Social Status and Badge Design*. – New York, New York, USA: ACM Press, 2015. – P. 473–483.
13. JAIN S., CHEN Y., PARKES D.C. *Designing incentives for online question and answer forums* // Proc. of the 10th ACM Conf. on Electronic Commerce. – 2009. – P. 129–138.
14. JAIN S., PARKES D.C. *The role of game theory in human computation systems* // Proc. of the ACM SIGKDD Workshop on Human Computation. – 2009. – P. 58–61.
15. LU J. et al. *Designing Socially-Optimal Rating Protocols for Crowdsourcing Contest Dilemma* // IEEE Trans. on Information Forensics and Security. – 2017. – No. 6(12). – P. 1330–1344.
16. LUO T. et al. *Incentive Mechanism Design for Heterogeneous Crowdsourcing Using All-Pay Contests* // IEEE Trans. on Mobile Computing. – 2016. – No. 9(15). – P. 2234–2246.
17. MANN R.P., HELBING D. *Optimal incentives for collective intelligence* // Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 2017. – No. 20(114). – P. 5077–5082.
18. MERLINO G. et al. *Mobile crowdsensing as a service: A platform for applications on top of sensing Clouds* // Future Generation Computer Systems. – 2016. – Vol. 56. – P. 623–639.
19. NARODITSKIY V. et al. *Crowdsourcing contest dilemma* // Journal of the Royal Society Interface. – 2014. – No. 99(11).
20. RITTEL H.W.J., WEBBER M.M. *Dilemmas in a general theory of planning* // Policy Sciences. – 1973. – No. 2(4). – P. 155–169.
21. SHA Z., KANNAN K.N., PANCHAL J.H. *Behavioral Experimentation and Game Theory in Engineering Systems Design* // Journal of Mechanical Design. – 2015. – No. 5(137). – Article 051405.
22. SHIN D. et al. *Urban sensing: Using smartphones for transportation mode classification* // Computers, Environment and Urban Systems. – 2015. – Vol. 53. – P. 76–86.

23. WOLFERS J., ZITZEWITZ E. *Prediction Markets* // Journal of Economic Perspectives. – 2004. – No. 2(18). – P. 107–126.
24. WU W. et al. *Incentive mechanism design to meet task criteria in crowdsourcing: How to determine your budget* // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 2017. – No. 2(35). – P. 502–516.
25. XIE H. et al. *Incentive mechanism and protocol design for crowdsourcing systems* // 52nd Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Allerton, 2014. – 2014. – P. 140–147.
26. ZHANG X. et al. *Keep Your Promise: Mechanism Design Against Free-Riding and False-Reporting in Crowdsourcing* // IEEE Internet of Things Journal. – 2015. – No. 6(2). – P. 562–572.
27. ZHANG Y., SCHAAR M. VAN DER *Reputation-based incentive protocols in crowdsourcing applications* // Proc. of the 2012 IEEE INFOCOM. – 2012. – P. 2140–2148.

APPLICATION OF GAME-THEORETIC METHODS AND MODELS TO THE DESIGN OF LARGE-SCALE HUMAN-MACHINE COMPUTING SYSTEMS

Andrew Ponomarev, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS), St. Petersburg, Cand.Sc., senior researcher (ponomarev@iias.spb.su).

Abstract: Systems using elements of large-scale human-machine information processing (crowdsourcing, crowd computing) have recently become popular in solving a number of practical problems. One of the main problems associated with the use of human-machine computing is the quality of the results obtained in this way. A promising approach to the design of such systems is the use of game-theoretic modeling of the situation (system participant and method of reward distribution), to ensure that the method of reward distribution contributes to the participant applying maximum efforts and, accordingly, achieving the goals of the system designer. The paper presents the results of a review in the field of application of game-theoretic models for the rational design of systems employing large-scale human-machine computing. In particular, assumptions used in game-theoretic modeling of such systems and the main classes of models are identified. The obtained results are grouped in accordance with the typology of large-scale human-machine computing systems; the paper shows what assumptions, modeling goals, and types of models

*Управление техническими системами
и технологическими процессами*

are typical for each distinguished type of such systems. The review may be useful both to practitioners who are constructing software systems that include elements of large-scale human-machine computing, and to researchers working in this field.

Keywords: crowd computing, crowdsourcing, collective intelligence, human-machine systems, game theory, mechanism design, auction theory.

УДК 021.8 + 025.1

ББК 78.34

DOI: 10.25728/ubs.2021.89.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 02.07.2020.
Опубликована 31.01.2021.*

РАЗРАБОТКА СОВРЕМЕННОЙ СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ РУССКОЯЗЫЧНОЙ ТЕЛЕФОННОЙ РЕЧИ

Обухов Д. С.¹

(Новосибирский государственный технический
университет; Dasha.AI, Новосибирск)

Описывается система, разработанная для распознавания русскоязычной речи. Мы фокусируемся на домене телефонных разговоров, когда на вход поступает одноканальный аудиосигнал с частотой дискретизации 8 кГц, полученный в условиях с повышенными шумами. Дополнительно для обучения используются данные из видео хостинга YouTube. Рассматривается ряд акустических моделей и техники построения фонемного словаря и языковой модели. Кроме того, приводятся результаты экспериментов по влиянию информации о спикере. Также показывается, что применение таких техник аугментации, как реверберация, изменение скорости и громкости сигнала, маскирование частотных и временных характеристик существенно повышают качество распознавания. На отложенном для тестирования наборе данных телефонии достигнута ошибка обучения на словах 24.21.

Ключевые слова: распознавание речи, русскоязычная речь, акустическая модель, языковая модель, аугментация звука, вектор характеристик спикера.

1. Введение

Распознавание речи – задача, которая вызывает большой интерес как в настоящий момент, так и на протяжении нескольких последних десятилетий [8, 9]. Домен телефонных разговоров представляет особый интерес, так как эта область является востребованной на сегодняшний день [6, 7]. Как и в общем случае, для распознавания речи в данном домене используются разные подходы: комплексные, в которых транскрипции получаются с помощью одной натренированной модели, и гибрид-

¹ Дмитрий Сергеевич Обухов, аспирант, инженер-исследователь (bstodin@gmail.com).

ные, в которых обучается несколько моделей, как правило, акустическая, языковая модели и модель произношения.

Исторически гибридные подходы появились раньше. Сначала это были системы на основе скрытых марковских цепей, в которых для моделирования вероятностей наблюдений использовались смеси гауссовских моделей (HMM-GMM системы) [11]. Затем акустические модели на основе глубоких нейронных сетей (DNN) заменили GMM [17]. Одновременно с тем как нейронные сети стали развиваться для гибридных подходов [23, 24], популярность стали набирать и комплексные системы [5, 10]. Рост вычислительных мощностей и новые алгоритмы машинного обучения позволили полностью обновить парадигму традиционных подходов распознавания речи. Сейчас нет однозначного фаворита среди гибридных и комплексных подходов по распознаванию речи, и каждая из этих техник представляет интерес в научном сообществе и активно продвигается вперед.

В данной статье рассматривается гибридный подход для решения задачи распознавания телефонной русскоязычной речи. Вместе с тем видео хостинг YouTube – источник большого количества размеченных записей, поэтому для обучения и тестирования используются данные из двух доменов – YouTube и телефонные звонки.

В данной работе рассматриваются все части комплексного подхода, включая акустическую модель, языковую модель, модель произношения и модель извлечения характеристик спикера. Особое внимание уделено техникам аугментации данных для обеспечения качественного распознавания телефонной речи.

Одной из задач данной работы является сравнение архитектуры нейронной сети с временной задержкой и матричной факторизацией (TDNN-F) [24], которая считается одной из лучших на сегодняшний день акустической моделью в гибридном подходе, с другими архитектурами на базе нейронных сетей с временной задержкой (TDNN).

Другой задачей данной работы является построение языковой модели для системы распознавания телефонной речи. Показано, что использование дополнительных данных из предметной области повышает качество распознавания.

Также в данной работе рассматриваются техники построения фонемного словаря. Проведен эксперимент, в котором сравниваются фонемы и графемы [21].

Ещё одной задачей данной работы является исследование влияния характеристик спикера на качество распознавания телефонной речи. В работе [28] было предложено извлекать такие характеристики из аудиосигнала, получая векторы фиксированной размерности – *i-vectors*. В данной работе проведено сравнение систем с использованием этих векторов и без них.

В записях телефонии много особенностей, в частности, сигнал содержит много шумов и есть ограничение на частоту дискретизации. В работах [19, 20, 22] показано, что правильное применение аугментации сильно повышает качество распознавания зашумленной речи. Авторами данной работы показано, что техники аугментации, такие как изменение скорости, изменение громкости, наложение шумов и эхо-эффекта, маскирование частотных и временных характеристик, могут быть успешно применены для улучшения распознавания телефонной речи.

Структура работы следующая: во втором разделе описываются акустические модели, которые рассматриваются в данной работе. В третьем разделе описан процесс построения языковой модели, а также техники построения фонемного словаря. В четвертом разделе рассматриваются техники аугментации. Наконец, в пятой разделе приведены результаты экспериментов. Заключение подводится в шестом разделе.

2. Акустическая модель

Акустическая модель является одним из ключевых компонентов в гибридном подходе распознавания речи. Роль акустической модели заключается в построении последовательности промежуточного представления между текстом и аудиосигналом для того, чтобы из этого представления получить текст с помощью модели произношения и языковой модели.

Такое промежуточное представление называется сеноны. Необходимость введения сенонов заключается в том, что последовательность фонем, которая соответствует тексту, намного меньше, чем последовательность фреймов в аудиосигнале. Кро-

ме того, каждому звуку соответствует различное количество аудиофреймов, например, гласные звуки тянутся гораздо дольше, чем согласные. Поэтому в используемом гибридном подходе для каждой фонемы построен НММ-граф [13]. Состояния в этом графе и есть сеноны. Таким образом, длина последовательности сенонов сопоставима с количеством фреймов в аудиосигнале, и сеноны имеют соответствие с фонемами.

В данной работе рассматриваются акустические модели со следующими архитектурами:

- TDNN-F;
- CNN-TDNN-F;
- TDNN-CNN;
- TDNN-LSTM;
- TDNN-Attention.

TDNN-F архитектура [24] на сегодняшний день показывает лучшие результаты в англоязычном домене. Это модификация TDNN-архитектуры [23], в которой удалось сократить число параметров за счет того, что матрица параметров раскладывается в произведения двух матриц с меньшей внутренней размерностью, причем первая из них является полу-ортогональной, за счет чего не происходит потери информации при снижении размерности.

CNN-TDNN-F-архитектура [18] подразумевает использование сверточных слоев на нижних уровнях архитектуры. Таким образом, нижний блок из конволюционных слоев позволяет извлекать более высокоуровневые признаки из аудиосигнала.

TDNN-CNN-архитектура [14], как и CNN-TDNN-F, состоит из сверточных слоев на нижнем уровне. Однако далее следуют TDNN-слои без факторизации.

TDNN-LSTM-архитектура [12] включает блоки TDNN-слоев и слоев с долгой краткосрочной памятью (LSTM). Поскольку речь от природы является динамичным процессом, кажется естественным использовать рекуррентные нейронные сети (RNN) для распознавания. LSTM-слои позволяют включить преимущества RNN-сетей.

TDNN-Attention включает в себя слои с механизмом само-внимания (self-attention) [29]. В распознавании речи применяется так называемый «ограниченный» механизм само-внимания,

так как только некоторый контекст слева и справа учитывается на каждой итерации по времени. Архитектура похожа на архитектуру TDNN-LSTM, в которой слои само-внимания заменили рекуррентные слои [26].

3. Модель произношения и языковая модель

Модель произношения предназначена для построения фонемного представления слов из заданного словаря, т.е. для построения фонемного словаря. Языковая модель используется для обновления весов различных комбинаций слов в графе декодирования.

Рассмотрены две техники построения фонемного словаря: использование фонем и использование графем. Для повышения качества распознавания системы используемые единицы – фонемы либо графемы – группируются в триграммы [2, 3]. Фонемы извлекались из текста с использованием модели russian_g2p¹. Графемы не требуют специальной модели для извлечения, поскольку это буквы, входящие в состав слова. В работе [20] показано, что ченоны (сеноны, построенные на графемах), работают не хуже, чем сеноны, которые построены на фонемах.

Рассматриваются статистические языковые модели 3, 4 и 5 порядков с Кнезер – Ней-сглаживанием [16]. Для построения языковых моделей помимо транскрипций использованы дополнительные тексты из новостных источников, журналов, а также сообщений и диалогов².

4. Аугментация данных

В данной работе рассматриваются следующие техники аугментации:

- реверберация;
- изменение скорости аудиосигнала;
- изменение громкости аудиосигнала;
- маскирование частотных и временных характеристик.

¹ https://github.com/nsu-ai/russian_g2p – Russian-Language Transcripтор.

² <https://linghub.ru/static/Taiga/> – тексты для обучения языковой модели.

Техники аугментации звука можно разбить на две категории.

К первой категории относятся техники, которые применяются на уровне «сырого» аудиосигнала. В данной работе это реверберация, изменение скорости и громкости сигнала.

Ко второй категории относятся аугментации, в которых происходит изменение спектрограммы. В данной работе это техника маскирования частотных и временных характеристик.

Принципиальное отличие этих двух категорий заключается в том, что техники, которые применяются на уровне «сырого» сигнала, применяются до построения аудиопризнаков. А техники, которые искажают спектрограммы, применяются «на лету» при обучении.

Применение реверберации заключается создании эхо-эффекта в аудиозаписи.

Для применения реверберации используется набор данных RIRS NOISES [20].

Размеры комнаты, в которой стимулировался эхо-эффект, равномерно распределены от 1 до 30 метров.

Реверберация применена к двум копиям исходного набора данных обучения, тем самым увеличив набор данных для обучения вдвое.

Изменение скорости выполняется тремя способами, как это делали в работе [19], с коэффициентами 0,9; 1; 1,1. Этот прием применяется к трем независимым копиям неаугментированного набора данных для обучения. Поэтому при использовании данной аугментации увеличивается набор данных обучения в три раза.

Изменение громкости происходило с коэффициентом, равномерно распределенным в интервале от 0,5 до 2. Данная аугментация применяется к одной копии неаугментированного набора данных обучения.

Техника маскирования частотных и временных характеристик была предложена в работе [22]. Прием заключается в наложении случайной маски на заданную спектрограмму и последующем обнулении коэффициентов, которые оказались замаскированы. Форма маски – прямоугольная область, которая определяется заданным диапазоном частот либо заданным диа-

пазоном по оси времени. В данной работе маскирование частотных и временных характеристик применяется ко всем данным в обучающей выборке, поэтому этот прием не требует дополнительной памяти. При этом издержки на время обучения невелики.

5. Эксперименты

В работе [1] был проведен сравнительный анализ инструментов для построения систем распознавания речи. Лучшие результаты показывает Kaldi [25]. Поэтому эксперименты проведены с использованием инструмента для распознавания речи Kaldi. Для построения языковой модели использован инструмент KenLM¹.

Все эксперименты проведены на машине со следующей конфигурацией: CPU: AMD Ryzen Threadripper 2950X 16-Core Processor; GPU: 4x NVidia GeForce RTX 2080.

Система обучалась на мел-кепстральных коэффициентах [4], полученных из одноканального аудиосигнала с частотой дискретизации 8 кГц и разрядностью 16-бит. Выбор именно таких характеристик связан с ограничениями, которые накладывает телефония.

Данные для обучения получены двумя путями. Часть данных выгружена из видео хостинга YouTube – аудиодорожки видеозаписей, для которых есть русскоязычные не автосгенерированные субтитры. Эту часть данных мы выкладываем в открытый доступ². Вторая часть данных была предоставлена компанией Dasha.AI³ – это внутренний закрытый корпус. Весь набор данных обучения включает примерно 800 часов записей из двух доменов – YouTube и телефония – в соотношении примерно 75 к 25. Корпусы для тестирования содержат 3 часа записей из домена YouTube и 1 час записей из домена телефонных звонков. Эти корпусы были проверены вручную.

¹ <https://github.com/kpu/kenlm> – KenLM toolkit.

² https://drive.google.com/file/d/1H1bE0VQHtFKmI_WMhjouIsM2leKi_cGT/view?usp=sharing – аудио с транскрипциями корпуса YouTube размещены по этой ссылке.

³ <https://dasha.ai/> – caim Dasha.AI.

Для оценки качества распознавания речи традиционно используется метрика Word Error Rate (WER) [30]. В таблицах ниже будут приведены значения WER на корпусах для тестирования.

5.1. АКУСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Таблица 1. Сравнение архитектур акустических моделей

	WER, YouTube	WER, телефонная речь
TDNN-F	26,34	31,05
CNN-TDNN-F	27,21	32,67
TDNN-CNN	26,27	31,98
TDNN-LSTM	29,86	35,73
TDNN-Attention	30,97	36,01

В таблице 1 приведены результаты WER для систем с акустическими моделями, рассмотренными в разделе 2. Все системы используют языковую модель 3 порядка обученную на транскрипциях. Фонемный словарь построен на фонемах. Дополнительные векторы с характеристиками спикера не используются. Аугментация не применяется.

Наиболее успешной оказалась система с акустической моделью TDNN-F. В последующих экспериментах рассматриваются системы с этой акустической моделью.

5.2. ТЕХНИКИ ПОСТРОЕНИЯ ФОНЕМНОГО СЛОВАРЯ

Таблица 2. Сравнение техник построения фонемного словаря

	WER, YouTube	WER, телефонная речь
Фонемы	26,34	31,05
Графемы	26,22	31,38

В таблице 2 приведены результаты для системы, построенной на фонемах, и системы, построенной графемах. Языковая модель в обоих случаях третьего порядка и обучена на транскрипциях. Дополнительные векторы с характеристиками спикера не используются. Аугментация не применяется.

Разница между этими системами незначительна. В последующих экспериментах решено продолжить использовать фонемы.

5.3. ЯЗЫКОВЫЕ МОДЕЛИ

Таблица 3. Сравнение техник построения фонемного словаря

	WER, YouTube	WER, телефонная речь
3 порядок	26,34	31,05
4 порядок	26,15	30,97
5 порядок	25,92	31,01
3 порядок, extern	28,43	29,60
4 порядок, extern	27,97	29,12
5 порядок, extern	28,26	28,97

В таблице 3 приведены результаты для систем с различными языковыми моделями. Рассматриваются языковые модели третьего, четвертого и пятого порядков. В системах, которые помечены словом «extern», для построения языковой модели используются дополнительные тексты, о которых упоминается в разделе 3. В остальных системах для обучения используются транскрипции. Дополнительные векторы с характеристиками спикера не используются. Аугментация не применяется.

Дополнительные тексты позволяют адаптировать систему к заданной предметной области. Такой прием позволяет существенно повысить качество распознавания в заданном домене.

5.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СПИКЕРА

Следуя предложению работы [28], исследованы i-vectors – векторы, которые позволяют учитывать информацию о спикере и канале.

В таблице 4 приведены результаты для системы, которая использует дополнительно на вход акустической модели информацию с характеристиками о спикере, против системы, которая не использует дополнительной информации. В обеих системах используется языковая модель четвертого порядка, обу-

ченная на дополнительных текстах. Аугментация не применяется.

Таблица 4. Влияние дополнительной информации о спикере, извлеченной в виде i-vectors

	WER, YouTube	WER, телефонная речь
Без i-vectors	27,97	29,12
С i-vectors	27,43	28,24

Результаты показывают, что подача дополнительной информации с извлеченными характеристиками спикера на вход акустической модели оправдана.

5.5. АУГМЕНТАЦИЯ

В таблице 5 приведены результаты при использовании различных техник аугментации. В последней строке показан результат для случая, когда применяются сразу все виды аугментации к независимым копиям набора данных. Везде рассматривается одна и та же система на фонемах – с TDNN-F-акустической моделью, языковой моделью четвертого порядка и с использованием дополнительной информации о спикере.

Таблица 5. Влияние аугментации на качество распознавания

	WER, YouTube	WER, телефонная речь
Без аугментации	27,43	28,24
Реверберация	26,23	26,58
Изменение скорости	26,71	26,99
Изменение громкости	27,5	28,52
Маскирование характеристик	27,18	27,72
Все	24,38	24,21

Как видно из результатов, применение аугментации сильно влияет на качество распознавания. Наилучший эффект достигается при применении всех видов аугментации – наложения реверберации, изменение скорости, громкости и маскирования частотных и временных характеристик.

5.6. ВРЕМЯ ОБУЧЕНИЯ

Важным практическим аспектом является время обучения системы распознавания речи.

Время обучения отдельных компонент для финальной системы, которая состоит из TDNN-F-акустической модели, обученной на данных с применением всех видов аугментации, языковой модели четвертого порядка и модели извлечения характеристик спикера, приведено в таблице 6.

Таблица 6. Время обучения акустических моделей

	Время обучения (часы)
Работа с данными	23
Акустическая модель	115
Языковая модель	< 1
Модель извлечения i-vectors	37

Работа с данными включает применение аугментации, обработку текстов транскрипций, обработку аудиосигнала, построение MFCC-признаков.

Основное время уходит на обучение акустической модели. Стоит отметить, что это время пропорционально количеству данных обучения. Таким образом, если в результате применения аугментации размер набора данных увеличился вдвое, то и время обучения акустической модели увеличится вдвое при том же количестве эпох обучения.

5.7. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ РЕШЕНИЯМИ

В сравнении, помимо нашей финальной системы, рассмотрены модели распознавания речи от Яндекса, Тинькофф¹, ЦРТ² и открытая модель Н. Шмырева – VOSK³.

Модель распознавания от Яндекса была использована с кодовым названием «general:rc». Модель распознавания от ЦРТ была использована с кодовым названием «TelecomRus».

¹ <https://voicekit.tinkoff.ru/docs/usingstt> – Tinkoff STT API.

² <https://cloud.speechpro.com/doc/asr> – ЦРТ ASR API.

³ <https://github.com/alphacep/vosk> – VOSK Speech recognition toolkit.

Во всех системах, кроме VOSK, распознавание выполнялось в потоковом режиме.

Таблица 7. Сравнение системы с другими решениями

	WER, YouTube	WER, телефонная речь
VOSK	40,32	50,83
Yandex STT	36,46	25,1
ЦРТ ASR	31,85	23,77
Tinkoff STT	28,91	21,07
TDNN-F (our)	24,38	24,21

В таблице 7 приведены результаты сравнения обученной системы с другими решениями.

Модель распознавания от Тинькофф хорошо подходит для домена телефонных разговоров. Тем не менее в совокупности по доменам YouTube и телефонная речь предложенный подход на основе фреймворка Kaldi показывает сравнимые по качеству результаты.

5.8. СРАВНЕНИЕ С АНГЛОЯЗЫЧНЫМИ СИСТЕМАМИ

Прямое сравнение обученной модели с англоязычными системами невозможно ввиду того, что каждая из моделей ориентирована на распознавание определенного языка. Тем не менее интерес представляет качество распознавания англоязычных систем, поскольку показатели распознавания англоязычной речи могут служить дополнительной асимптотой, к которой можно стремиться.

Есть несколько корпусов речи, на которых традиционно сравнивают англоязычные системы распознавания речи: TIMIT, WSJ, Librispeech, Switchboard, CallHome. Среди них Switchboard и CallHome состоят из телефонной речи, поэтому эти корпуса наиболее актуальны для сравнения.

В таблице 8 приведен результат для комплексного решения [15], которое является лучшим среди опубликованных решений¹, и гибридного решения [27] на основе Kaldi.

¹ Согласно источнику <https://paperswithcode.com/>.

Таблица 8. Результаты WER в телефонном домене для англоязычных систем.

	Switchboard	CallHome
Комплексное решение [15]	5,5	10,3
Гибридное решение [27]	9,3	18,9

Значения WER для англоязычных систем ниже, чем для русскоязычных. Этому способствует несколько причин. Во-первых, русский язык морфологически более разнообразен. Во-вторых, для английского языка имеется больше качественных данных для обучения в свободном доступе. В третьих, рассмотренные в таблице 8 системы специально обучены под соответствующие корпусы.

Отсюда можно сделать вывод, что одна из точек улучшения распознавания русскоязычной речи – использование большего количества данных для обучения. Однако поскольку создание данных обучения является нетривиальным процессом, постольку актуально использовать неразмеченные данные. Поэтому в будущем планируется добавить в систему механизмы учета неразмеченных данных.

6. Заключение

Была рассмотрена система распознавания русскоязычной телефонной речи в условиях с повышенными шумами. Было проведено исследование различных техник аугментации, таких как реверберация, изменение скорости и изменение громкости аудиосигнала, маскирование частотных и временных характеристик. Также было проведено сравнение различных архитектур акустических моделей, исследованы различные техники построения словаря и языковой модели и рассмотрено влияние информации о спикере. Финальная система достигла ошибки обучения на словах WER 24.21. В будущем планируется использование неразмеченных аудиоданных для повышения качества системы.

Литература

1. БЕЛЕНКО М.В., БАЛАКШИН П.В. *Сравнительный анализ систем распознавания речи с открытым кодом* // Международный научно-исследовательский журнал. – 2017. – №4(58). – Часть 4. – С. 13–18. – URL: <https://research-journal.org/technical/sravnitelnyj-analiz-sistem-raspoznavaniya-rechi-s-otkryтым-kodom/> (дата обращения: 11.07.2020).
2. БУТЕНКО Ю.И. *Использование триграмм при автоматическом распознавании речи* // Вестник НГУ. Серия: Лингвистика и межкультурная коммуникация. – 2020. – С. 5–15.
3. БУТЕНКО Ю.И., КОНОПЛЕВА А.А. *Аспекты использования триграмм в автоматическом распознавании речи* // XVII Всероссийская научная конференция. – 2019. – С. 40–41.
4. ИВАНОВ В.И., ТИМОФЕЕВ М.В. *Распознавание речи с помощью мел-частотных кепстральных коэффициентов* // Сборник статей XXI Международного научно-исследовательского конкурса. – 2019. – С. 34–37.
5. МАРКОВНИКОВ Н.М., КИПЯТКОВА И.С. *Исследование методов построения моделей кодер-декодер для распознавания русской речи* // Информационные управляющие системы. – 2019. – №4. – С. 45–53.
6. МЕДЕННИКОВ И.П. *Методы, алгоритмы и программные средства распознавания русской телефонной спонтанной речи*. Дисс. ... канд. техн. наук. – 2016. – URL: <https://www.math.spbu.ru/ru/mmeh/AspDok/pub/2016/medennikov.pdf> (дата обращения: 20.11.20).
7. РОМАНЕНКО А.Н., МАТВЕЕВ Ю.Н., МИНКЕР В. *Перенос знаний в задаче автоматического распознавания русской речи в телефонных переговорах* // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2018. – Т. 18, №2. – С. 236–242.
8. САДЫКОВА А.А., АМИРГАЛИЕВ Е.Н. *Изучение применения автоматического распознавания речи* // COLLOQUIUM-JOURNAL. – 2020. – №11-2(63). – С. 92–95.
9. ТАМПЕЛЬ И.Б. *Автоматическое распознавание речи – основные этапы за 50 лет* // Научно-технический вестник ин-

- формационных технологий, механики и оптики. – 2015. – Т. 15, №6. – С. 957–968.
10. AMODEI D., ANUBHAI R., BAI J. et al. *Deep speech 2: End-to-end speech recognition in english and mandarin* // Int. Conf. on Machine Learning. – 2016. – P. 173–182.
 11. BOURLARD H.A., MORGAN N. *Connectionist Speech Recognition: A Hybrid Approach*. – Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1993.
 12. CHENG G., PEDDINTI V., POVEY D. et al. *An exploration of dropout with lstms* // Proc. of the Interspeech-2017. – 2017.
 13. GALES M., YOUNG S. *The Application of Hidden Markov Models in Speech Recognition* // Foundations and Trends in Signal Processing. – Vol. 1, No. 3. – 2008. – P. 195–304.
 14. GHAREMANI P., MANOHAR V., POVEY D., KHUDANPUR S. *Acoustic modelling from the signal domain using cnns* // To appear in the IEEE Interspeech-2016. – 2016.
 15. HADIAN H., SAMETI H., POVEY D., KHUDANPUR S. *End-to-end Speech Recognition Using Lattice-free MMI* // Proc. of the Interspeech-2018. – 2018. – P. 12-16.
 16. HEAFIELD K., POUZYREVSKY I., CLARK J., KOEHN P. *Scalable Modified Kneser-Ney Language Model Estimation* // Proc. of the 51st Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 2: Short Papers). – 2013. – P. 690–696.
 17. HINTON G., DENG L. *Deep neural networks for acoustic modeling in speech recognition: The shared views of four research groups* // IEEE Signal Processing Magazine. – 2012. – Vol. 29, No. 6. – P. 82–97.
 18. KANDA N., IKESHITA R., HORIGUCHI S. et al. *The hitachi/jhu chime-5 system: Advances in speech recognition for everyday home environments using multiple microphone arrays* // Proc. of the 5th Int. Workshop on Speech Processing in Everyday Environments (CHiME-2018), Interspeech-2018. – 2018.
 19. KO T., PEDDINTI V., POVEY D., KHUDANPUR S. *Audio augmentation for speech recognition* // Proc. of INTERSPEECH-2015. – 2015. – URL: http://www.danielpovey.com/files/2015_interspeech_augmentation.pdf (дата обращения: 21.07.2020).

20. KO T., PEDDINTI V., POVEY D., SELTZER M., KHUDANPUR S. *A study on data augmentation of reverberant speech for robust speech recognition* // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing – 2017 (ICASSP-2017). – IEEE, 2017. – P. 5220–5224.
21. LE D., ZHANG X., ZHENG W. et al. *From senones to che-nones: Tied context-dependent graphemes for hybrid speech recognition* // Proc. of the IEEE Automatic Speech Recognition and Understanding Workshop (ASRU-2019) – 2019. – P. 457–464.
22. PARK D.S. *SpecAugment: A Simple Data Augmentation Method for Automatic Speech Recognition* // arXiv e-prints. – URL: <https://arxiv.org/abs/1904.08779> (дата обращения: 21.07.2020).
23. PEDDINTI V., POVEY D., KHUDANPUR S. *A time delay neural network architecture for efficient modeling of long temporal contexts* // Proc. of the Interspeech-2015. – 2015.
24. POVEY D., CHENG G., WANG Y. et al. *Semi-Orthogonal Low-Rank Matrix Factorization for Deep Neural Networks* // Proc. of the 19th Annual Conf. of the International Speech Communication Association, Interspeech–2018, Hyderabad, India. – 2018.
25. POVEY D., GHOSHAL A., BOULIANNE G. et al. *The kaldi speech recognition toolkit* // IEEE Workshop on Automatic Speech Recognition and Understanding – 2011. – IEEE Signal Processing Society, 2011
26. POVEY D., HADIAN H., GHAHREMANI P. et al. *A time-restricted self-attention layer for asr* // ICASSP – 2018.
27. SAON G., KURATA G., SERCU T. et al. *English Conversational Telephone Speech Recognition by Humans and Machines* // Proc. Interspeech. – 2017. – P. 132–136.
28. SAON G., SOLTAU H., NAHAMOO D., PICHENY M. *Speaker adaptation of neural network acoustic models using i-vectors* // IEEE Workshop on Automatic Speech Recognition and Understanding – 2013. – IEEE, 2013 – P. 55–59.
29. VASWANI A., SHAZEER N., PARMAR N. et al. *Attention is all you need* // In: Advances in Neural Information Processing Systems. – 2017. – P. 6000–6010.

30. WANG Y., ACERO A., CHELBA C. *Is Word Error Rate a Good Indicator for Spoken Language Understanding Accuracy* // IEEE Workshop on Automatic Speech Recognition and Understanding. – St. Thomas, 2003.

SPEECH RECOGNITION SYSTEM FOR RUSSIAN-LANGUAGE TELEPHONE SPEECH

Dmitry Obukhov, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk; Dasha.AI, Novosibirsk, post-graduate student, ml researcher (bstodin@gmail.com).

Abstract: We describe a system designed to recognize Russian-language speech. Our focus is on the domain of telephone conversations, when a single-channel noisy audio signal with a sample rate of 8 kHz is received at the input. Additionally, data from YouTube video hosting is used for training. We consider a number of acoustic models and techniques for building a lexicon and language model. In addition, we conduct experiments on the influence of speaker information. It is also shown that the use of augmentation techniques such as reverb, changing the speed and volume of a signal, masking frequency and time characteristics significantly increase the quality of recognition. We achieve word error rate 24.21 on our validation dataset.

Keywords: speech recognition, russian-language speech, acoustic model, language model, speech augmentation, speaker embedding.

УДК 004.934.1

ББК 32.813

DOI: 10.25728/ubs.2021.89.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

Поступила в редакцию 09.05.2020.

Опубликована 31.01.2021.