СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ВЫХОДУ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Мухин А. В.[1]

(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*)

Одним из наиболее практически востребованных способов управления линейными объектами является управление в форме статического регулятора по выходу. Для реализации такого способа управления не требуется измерять все переменные состояния. Размерность замкнутой системы в таком случае совпадает с размерностью исходного объекта. Задача синтеза статических регуляторов по выходу сводится к поиску двух взаимно-обратных матриц, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств. Задача является невыпуклой и поэтому не может быть решена с помощью аппарата линейных матричных неравенств. В статье рассмотрен частный случай синтеза статических регуляторов по выходу, который может быть сведен к решению системы линейных матричных неравенств. Условие реализации такого случая выражается в том, что размерность пространства измерений должна быть на единицу меньше размерности пространства состояний. Рассмотрены две задачи синтеза статических регуляторов: синтез стабилизирующего регулятора и синтез оптимального регулятора с заданным квадратичным критерием. Полученные результаты применены к стабилизации электромагнитного подвеса, когда измеряемой переменной является вертикальное смещение ротора. Представлены графики переходных процессов в замкнутой системе с вычисленными статическими регуляторами.

Ключевые слова: линейные матричные неравенства, лемма Шура, статический регулятор по выходу, электромагнитный подвес.

1. Введение

Синтез законов управления линейными объектами на основе метода Ляпунова сводится к решению систем матричных неравенств [1, 7]. В зависимости от конкретного применяемого закона управления задача синтеза регулятора может быть либо выпуклой, либо невыпуклой и, соответственно, выражаться в терминах либо линейных, либо нелинейных матричных неравенств. Наиболее простым способом стабилизации линейного

[1] *Алексей Валерьевич Мухин, аспирант* (*muhin-aleksei@yandex.ru*).

объекта является статическое управление по состоянию. Синтез регулятора в таком случае сводится к решению системы линейных матричных неравенств, численная реализация которой не представляет трудностей и может быть выполнена с применением пакетов программ, например, таких как MATLAB [10] или SCILAB. Практическая реализация таких регуляторов предполагает возможность измерения всех переменных состояния. Очевидно, что такой тип управления не представляет существенного интереса и чаще всего не применяется на практике. Наиболее широко применяемым на практике подходом в задачах стабилизации является управление по измеряемому выходу в форме линейного динамического регулятора. В общем случае такая задача является невыпуклой, и синтез соответствующих регуляторов сводится к решению системы билинейных матричных неравенств. Вследствие отсутствия эффективных и надежных алгоритмов решения последних поиск таких регуляторов может представлять определенные трудности. Наиболее широко применяемые алгоритмы решения билинейных матричных неравенств приведены в [11–14]. При этом существующие алгоритмы не всегда могут давать решения, даже если таковые существуют. Частным случаем синтеза регуляторов по выходу, который может быть сведен к решению линейных матричных неравенств, является задача вычисления линейного динамического регулятора полного порядка [2]. Такой случай удобен и прост с теоретической точки зрения, однако приводит к заметному увеличению размерности замкнутой системы, а также к ее усложнению при последующей практической реализации.

Следует выделить еще один практически важный и востребованный случай управления линейными объектами – статический регулятор по выходу. Очевидным преимуществом такого подхода к управлению по сравнению с вышеописанными является то, что для его реализации не требуется измерять все переменные состояния. Недостаток синтеза таких регуляторов в общем случае также связан с невыпуклостью задачи. Решение указанной задачи сводится к поиску двух взаимно-обратных положительно определенных симметрических матриц, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств [1, 2]. Отметим, что сведение невыпуклой задачи к выпуклой имеет принципиальное значение в силу существенно более простой численной реализации последней.

Решению задачи синтеза статических регуляторов уделено большое внимание, в частности этой задаче посвящены работы [5, 6, 8, 9, 13]. Следует отдельно выделить работу [14]: в ней приведен обзор основных частных случаев синтеза стабилизирующих статических регуляторов, в которых задача является выпуклой. В первую очередь это вышеупомянутый случай управления по состоянию, а также некоторые другие случаи, подразумевающие те или иные ограничения либо совокупности ограничений.

В настоящей работе рассмотрен частный случай синтеза статических регуляторов по выходу, который может быть сведен к решению системы, состоящей из двух линейных матричных неравенств. Условие реализации такого случая выражается в том, что размерность пространства измерений должна быть на единицу меньше размерности пространства состояния. Рассмотрены две задачи синтеза статических регуляторов: синтез стабилизирующего регулятора и синтез оптимального статического регулятора с заданным квадратичным критерием качества. Закон управления во второй задаче можно рассматривать как минимаксный, поскольку он минимизирует относительное значение квадратичного функционала в наихудшем случае, когда начальное отклонение приводит к максимальному значению этого отношения [4]. На примере электромагнитного подвеса, в котором реализуется требуемое условие, вычислены стабилизирующий и оптимальный статические регуляторы. Предполагалось, что существует возможность измерения вертикального смещения ротора и последующего вычисления скорости.

Статья организована следующим образом. В первом разделе содержится формулировка задач управления. Второй раздел посвящен вопросам синтеза статических регуляторов с помощью матричных неравенств. Здесь же представлены условия, при которых изначально невыпуклая задача может быть преобразована к выпуклой, решение которой упрощается до решения двух линейных матричных неравенств. Третий раздел включает в себя результаты моделирования переходных процессов в электромагнитном подвесе с вычисленными статическими регуляторами.

2. Формулировка задач управления

Рассмотрим линейный управляемый объект стандартного вида:

(1) $x = Ax + Bu,\ x(0) = x_0,$

$y = C_2 x;$

где $x \in R^{n_x}$ – вектор состояния системы; $y \in R^{n_y}$ – измеряемый выход; $u \in R^{n_y}$ – управление; A, B, C_2 – заданные матрицы соответствующих порядков.

Применительно к объекту (1) рассмотрим две задачи управления: поиск стабилизирующего статического регулятора и поиск оптимального статического регулятора с заданным ниже квадратичным критерием качества.

2.1. ЗАДАЧА ПОИСКА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО СТАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

Задача управления сводится к поиску регулятора вида

(2) $u = \Theta y,$

обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Уравнение последней в данном случае имеет вид

(3) $x = (A + B\Theta C_2)x,$

где Θ – матрица параметров регулятора.

2.2. ЗАДАЧА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО СТАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

Для задания квадратичного критерия качества введем уравнение целевого выхода z:

(4) $z = C_1 x + Du$

где C_1, D – заданные матрицы соответствующих порядков.

Путем выбора матриц в уравнении (4) можно выделять те переменные состояния, по которым будет проводиться оптимизация. В качестве квадратичного критерия рассмотрим L_2-норму целевого выхода, учитывая при этом все переменные состояния и управления. Квадратичный функционал в таком случае примет следующий вид:

(5) $\|z(t)\|^2 = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n_x} x_i^2(t) + u^2(t) \right) dt.$

Задача заключается в вычислении статического регулятора вида (2), обеспечивающего асимптотическую стабилизацию линейного объекта с выполнением следующего условия:

(6) $\inf_u \|z(t)\|^2 < \gamma^2 |x_0|^2, \ \forall x_0 \neq 0,$

где γ – минимально возможный параметр.

В отличие от линейно-квадратичного управления, неравенство (6) должно выполняться для всех ненулевых начальных состояний объекта [4].

Уравнения замкнутой системы в таком случае примут вид

(7) $x = A_\text{c} x$,

$z = C_\text{c} x.$

Матрицы в (7) записывается следующим образом

(8) $A_\text{c} = A + B\Theta C_2 \in R^{n_x \times n_x},$

(9) $C_\text{c} = (C_1 + D\Theta C_2) \in R^{n_z \times n_x}.$

3. Синтез статических регуляторов по выходу

Для решения поставленных выше задач применим метод Ляпунова и получим соотношения в форме линейных матричных неравенств. Будем рассматривать случай, когда размерность пространства измеряемого выхода n_y на единицу меньше размерности пространства состояний n_x, т.е. $n_y = n_x - 1$. Это равносильно тому, что ранг матрицы, столбцы которой образуют базис матрицы C_2 в уравнении измеряемого выхода, равен единице. Никаких дополнительных ограничений на матрицы системы не накладывается.

3.1. СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ СТАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Для асимптотической стабилизации объекта (1) должна существовать функция Ляпунова $V(x) = x^\text{T}(t)Xx(t)$, такая, что $V(x) < 0$. Задача поиска такой функции сводится к задаче вычисления матрицы $X = X^\text{T} > 0$. Если расписать производную $V(x)$ в силу системы (1), то получим следующее неравенство:

(10) $AY + YA^{\mathrm{T}} + B\Theta C_2 Y + YC_2{}^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}} < 0.$

Приведем неравенство (10) к эквивалентному линейному виду, выполнив соответствующее отображение в линейную область:

(11) $AY + YA^{\mathrm{T}} + BZ + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} < 0.$

Матричная переменная Z в (11) определяется по формуле

(12) $Z = \Theta C_2 Y.$

Вследствие того что матрица C_2 имеет неполный ранг, разрешить (12) может оказаться невозможным, даже если искомый регулятор существует. Рассмотрим другой способ решения, заключающийся в сведении билинейного неравенства (10) к стандартному в теории управления линейному матричному неравенству следующего вида:

(13) $\Psi + P^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}}Q + Q^{\mathrm{T}}\Theta P < 0,$

где $\Psi = AY + YA^{\mathrm{T}}$; $P = B^{\mathrm{T}}$; $Q = C_2 Y$.

Согласно лемме исключения [1], неравенство (13) выполняется тогда и только тогда, когда разрешимы следующие матричные неравенства [1]:

(14) $W_P{}^{\mathrm{T}}\Psi W_P < 0,$

$W_Q{}^{\mathrm{T}}\Psi W_Q < 0,$

где столбцы W_P и W_Q образуют базисы ядер матриц P и Q соответственно.

Неравенства (14) разрешимы тогда и только тогда, когда существует такая матрица $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$, которая удовлетворяет следующей системе матричных неравенств

(15) $W_{C_2}{}^{\mathrm{T}}\left(Y^{-1}A + A^{\mathrm{T}}Y^{-1}\right)W_{C_2} < 0,$

$W_{B^{\mathrm{T}}}{}^{\mathrm{T}}\left(AY + YA^{\mathrm{T}}\right)W_{B^{\mathrm{T}}} < 0,$

где W_{C_2} и $W_{B^{\mathrm{T}}}$ образуют ядра матриц C_2 и B^{T} соответственно.

Таким образом, задача вычисления статического регулятора по выходу сводится к решению системы матричных неравенств (15). Необходимо отметить, что полученная система не является линейной и рассматриваемое множество не является выпуклым. Следовательно, такие задачи не могут быть решены методами выпуклой оптимизации.

Для синтеза стабилизирующего регулятора в случае, когда область поиска является выпуклой, рассмотрим алгоритм, который заключается в совместном решении линейного и билинейного матричного неравенств относительно неизвестных матриц Y и Θ:

(16) $AY + YA^{\mathrm{T}} + BZ + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} < 0,$

(17) $AY + YA^{\mathrm{T}} + B\Theta C_2 Y + YC_2{}^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} < 0.$

Если существует матрица Y, удовлетворяющая (16), при которой неравенство (17) также разрешимо относительно Θ, то это означает, что статический регулятор существует. Таким образом, совместно решая (16) и (17) можно вычислять разные значения матрицы регулятора Θ.

3.2. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Для выполнения условия (6) передаточная матрица замкнутого объекта должна удовлетворять следующему неравенству:

(18) $\|H_c\|_2 < \gamma|x_0|\ , \forall x_0 \neq 0.$

В [1] показано, что для выполнения (18) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система линейных матричных неравенств:

(19) $\begin{pmatrix} A_cY + YA_c^{\mathrm{T}} & YC_c^{\mathrm{T}} \\ C_cY & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} < 0,$

$\begin{pmatrix} Y & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \gamma I_{n_x} \end{pmatrix} > 0,$

где $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$, $Y \in R^{n_x \times n_x}$, $\gamma > 0$.

Подставим (8), (9) в первое неравенство (19) и приведем получившееся выражение к стандартному линейному матричному неравенству вида (13), матрицы которого запишутся следующим образом

(20) $\Psi = \begin{pmatrix} AY + YA^{\mathrm{T}} & YC_1^{\mathrm{T}} \\ C_1Y & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} \in R^{(n_x+n_z)\times(n_x+n_z)},$

(21) $P = (C_2Y \quad 0_{n_y \times n_z}) \in R^{n_y \times (n_x+n_z)},$

(22) $Q = (B^{\mathrm{T}}\ D^{\mathrm{T}}) \in R^{n_u \times (n_x+n_z)}.$

Согласно лемме исключения, которая уже упоминалась выше, неравенство (13) выполняется тогда и только тогда, когда разрешима система (14). Подстановка (20)–(22) в (14) даст следующую систему неравенств:

$$(23)\ W_P{}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} AY + YA^{\mathrm{T}} & YC_1^{\mathrm{T}} \\ C_1 Y & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} W_P < 0,$$
$$W_Q{}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} AY + YA^{\mathrm{T}} & YC_1^{\mathrm{T}} \\ C_1 Y & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} W_Q < 0.$$

Введем новую матрицу следующего вида

$$(24)\ G = (C_2 \;\; 0_{n_y \times n_z}) \in R^{n_y \times (n_x + n_z)}.$$

Тогда матрицу P можно представить в виде произведения двух матриц:

$$(25)\ P = G \begin{pmatrix} Y & 0_{n_x \times n_z} \\ 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что

$$(26)\ W_P = \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0_{n_x \times n_z} \\ 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{pmatrix} W_G,$$

где столбцы W_G образуют базис ядра матрицы G.

Таким образом, задача поиска оптимального статического регулятора сводится к вычислению симметрической положительно определенной матрицы Y, удовлетворяющей системе матричных неравенств

$$(27)\ W_G{}^{T} \begin{pmatrix} Y^{-1}A + A^{\mathrm{T}} Y^{-1} & C_1^{\mathrm{T}} \\ C_1 & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} W_G < 0,$$
$$W_Q{}^{T} \begin{pmatrix} AY + YA^{\mathrm{T}} & YC_1^{\mathrm{T}} \\ C_1 Y & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} W_Q < 0,$$
$$\begin{pmatrix} Y & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \gamma I_{n_x} \end{pmatrix} > 0,$$

где $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0,\ Y \in R^{n_x \times n_x},\ \gamma > 0$.

Необходимо отметить, что полученная система (27) также не является линейной и рассматриваемое множества поиска не является выпуклым. Следовательно, такая задача не может быть решена методами выпуклой оптимизации.

Преобразуем первое неравенство системы (27). Для этого рассмотрим матрицу G, базис ядра которой входит в данное неравенство. Ранг $\mathrm{rank}(G) = \mathrm{rank}(C_2) = n_y$. Базис ядра этой матрицы можно представить в виде следующей блочно-диагональной матрицы:

(28) $W_G = \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0_{n_x \times n_z} \\ 0_{n_z \times (n_x - n_y)} & I_{n_z} \end{pmatrix} \in R^{(n_x + n_z) \times (n_x + n_z - n_y)}$,

где столбцы матрицы $W_{C_2} \in R^{n_x \times (n_x - n_y)}$ образуют базис ядра матрицы C_2.

Тогда с учетом (28) первое неравенство в (27) примет следующий вид:

(29) $\begin{pmatrix} {W_{C_2}}^{\mathrm{T}}\left(Y^{-1}A + A^{\mathrm{T}}Y^{-1}\right)W_{C_2} & {W_{C_2}}^{\mathrm{T}}{C_1}^{\mathrm{T}} \\ C_1 W_{C_2} & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} < 0$,

откуда в силу леммы Шура имеем

(30) $-\gamma I < 0 \leftrightarrow \gamma > 0$,

(31) ${W_{C_2}}^{\mathrm{T}}\left(Y^{-1}A + A^{\mathrm{T}}Y^{-1}\right)W_{C_2} + \gamma^{-1}{W_{C_2}}^{\mathrm{T}}{C_1}^{\mathrm{T}}C_1 W_{C_2} < 0$.

В соответствии с рассматриваемым случаем, когда $\mathrm{rank}\left(W_{C_2}\right) = 1$, неравенство (31) можно представить в виде скалярного соотношения

(32) $\gamma > const$.

В результате выполненных преобразований приходим к выводу эквивалентности неравенств (30) и (31) относительно неизвестной скалярной переменной γ. Таким образом, в частном случае, когда $n_y = n_x - 1$, задача вычисления симметрической положительно определенной матрицы Y представляет собой задачу выпуклого программирования и может быть выражена в терминах линейных матричных неравенств. Сформулируем следующее утверждение

Утверждение. *Если размерность пространства измерений на единицу меньше размерности пространства переменных состояния, то для существования оптимального статического регулятора по критерию* (6) *необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица* $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$, *удовлетворяющая линейным матричным неравенствам*

(33) ${W_Q}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} AY + YA^{\mathrm{T}} & YC_1^{\mathrm{T}} \\ C_1 Y & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} W_Q < 0$,

$\begin{pmatrix} Y & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \gamma I_{n_x} \end{pmatrix} > 0$,

где $\gamma > 0$.

Если система (33) разрешима, то искомая матрица оптимального статического регулятора Θ определяется из решения стандартного линейного матричного неравенства (13).

4. Пример

Рассмотрим применение описанного выше подхода для стабилизации ротора в системе примере электромагнитного подвеса. Такая система является основной электромагнитных подшипников, получивших широкое распространение в самых разных областях техники [15, 16].

С физической точки зрения, электромагнитный подвес представляет собой механическую систему, состоящую из вывешиваемого ротора и расположенного сверху электромагнита. Ротор находится в поле действия двух сил: силы тяжести и силы магнитного притяжения. Согласно второму закону Ньютона при равенстве этих сил ротор будет находиться в неподвижном неустойчивом состоянии. Задача системы управления – обеспечить стабилизацию ротора.

Электромагнитный подвес является нелинейным объектом, описываемым системой дифференциальных уравнений вида [3]

$$
\begin{aligned}
(34)\quad & x_1 = x_2, \\
& x_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x_3)^2}{(1-x_1)^2} - 1\right], \\
& x_3 = -\frac{(1+x_3)}{(1-x_1)} x_2 - a(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u,
\end{aligned}
$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in R^{n_x}$ – вектор состояния системы; $u \in R^{n_u}$ – управление; a – постоянная величина ($a = 7{,}5$).

Безразмерная переменная x_1 соответствует вертикальному перемещению ротора, x_2 соответствует скорости перемещения, а x_3 описывает ток в цепи электромагнита. Неустойчивым положением равновесия системы является точка $x = 0$. Для синтеза управлений линеаризуем (33) и получим соответствующую линеаризованную систему:

$$
\begin{aligned}
(35)\quad & x_1 = x_2, \\
& x_2 = x_1 + x_3, \\
& x_3 = -x_2 - ax_3 + u.
\end{aligned}
$$

В соответствии с матрично-векторной канонической формой объекта (1) имеем матрицы

$$(36)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для получения скорости перемещения ротора достаточно измерять только смещение, а скорость можно получить путем дифференцирования полученных данных.

4.1. СТАБИЛИЗИРУЮЩИЙ СТАТИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР

В результате совместного решения неравенств (16) и (17) вычислен статический регулятор $\Theta = (-12{,}2126\,;\ -10{,}9900)$. Графики переходных процессов в замкнутой системе с вычисленным статическим регулятором Θ представлены на рис. 1.

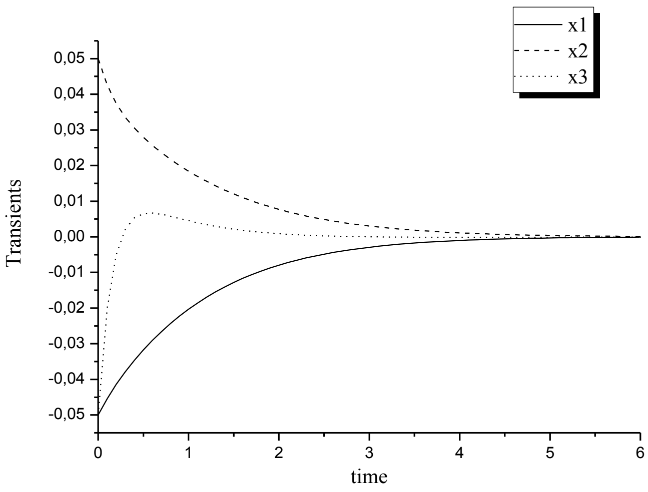

Рис. 1. Переходные процессы в замкнутой системе с регулятором Θ

4.2. ОПТИМАЛЬНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР

Построим оптимальный статический регулятор по критерию (6) для системы электромагнитного подвеса, в котором матрицы целевого выхода имеют следующий вид:

$$(37)\quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица C_1 выбрана таким образом, чтобы оптимизация осуществлялась по всем переменным состояния. Квадратичный функционал в таком случае принимает представленный выше вид (5).

В результате решения системы линейных матричных неравенств (33) вычислены матрица Y, а затем из (13) вычислена искомый статический регулятор $\Theta_{opt} = (-12{,}8874;\ \ -11{,}5693)$.

Графики переходных процессов в замкнутой системе с оптимальным статическим регулятором представлены на рис. 2. Вычисленное минимальное значение параметра γ равно 18,7.

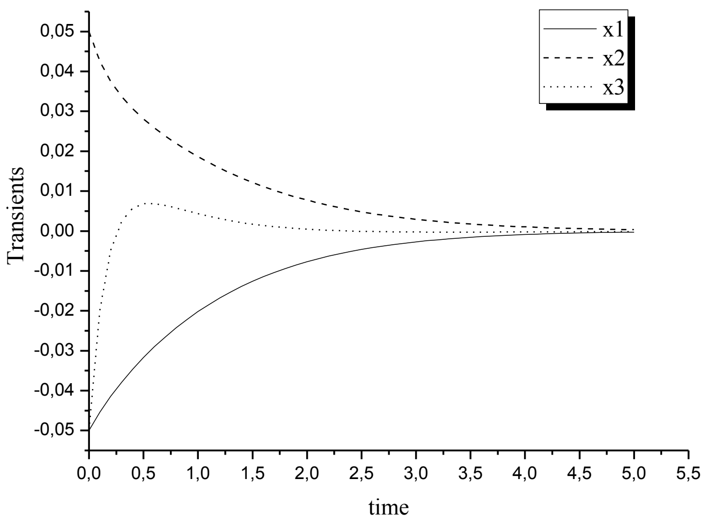

Рис. 2. Переходные процессы в замкнутой системе с регулятором Θ_{opt}

4. Заключение

В работе рассмотрен частный случай синтеза статических регуляторов по выходу, в котором изначально невыпуклая задача может быть преобразована к выпуклой. В результате решение такой задачи упрощается до решения двух линейных матричных неравенств. Условие реализации рассмотренного случая выражается в том, что размерность пространства измерений должна быть на единицу меньше размерности пространства состояния. На примере электромагнитного подвеса, в котором реализуется требуемое условие, вычислены стабилизирующий и оптимальный статические регуляторы по выходу в предположении измерения смещения ротора и возможности последующего вычисления скорости.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Д.В. Баландина за консультацию, а также за ценные и полезные замечания.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. – М.: Физматлит, 2007. – 281 с.
2. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимно-обратных матриц* // Автоматика и телемеханика.- 2005.- №1.- С. 82–99.
3. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М., ФЕДЮКОВ А.А. *Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения* // Известия РАН. ТиСУ. – 2017. – № 3. – С. 12–24.
4. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Линейно-квадратичные и γ-оптимальные законы управления по выходу* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №6. – С. 5–14.
5. ASTOLFI A., COLANERI P. *Static output feedback stabilization of linear and nonlinear systems* // 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.

6. ASTOLFI A., COLANERI P. *An algebraic characterization for the static output feedback stabilization problem* // American Control Conference, Arlington, VA, 2001– P. 1408–1413.
7. BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. – Philadelphia: SIAM, 1994.
8. CAO Y.-Y., LAM J., SUN Y.-X. *Static output feedback stabilization: an ILMI approach* // Automatica. – 1998. – Vol. 34. – P. 1641–1645.
9. EL GHAOUI L., OUSTRY F., AITRAMI M. *A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42. – P. 1171–1176.
10. GAHINET P., NEMIROVSKI A., LAUB A. J., CHILALI M. *The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab*. *User's Guide*. – Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.
11. GOH K.C. *Robust control synthesis via bilinear matrix inequalities*: Ph.D. thesis, University of Southern California, Los Angeles, CA, 1995.
12. HASSIBI A., HOW J., BOYD S. *A path following method for solving BMI problems in control* // Proc. of American Control Conference. – 1999. – Vol. 2. – P. 1385–1389.
13. HENRION D., LOEFBERG J., KOCVARA M., STINGL M. *Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI* // Proc. joint IEEE Conf. Decision Control and Europ. Control Conf., Sevilla, Spain, 2005.
14. SADABADI M. S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. – Vol. 42. – P. 11–26.
15. SCHWEITZER G. *Magnetic bearings theory, design, and application to rotating machinery*. – Berlin: Springer, 2009.
16. ZHURAVLEV YU.N. *Active magnetic bearings. Theory, calculation, application.* – SPb.: Politechnica, 2003.

SYNTHESIS OF STATIC OUTPUT CONTROLLERS BASED ON THE SOLVING OF LINEAR MATRIX INEQUALITIES

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: One of the most practically demanded methods of control in linear systems is control in the form of a static controller. To implement this control method, it is not necessary to measure all the phase variables of the system. With this method of control, the dimension of the closed system coincides with the dimension of the original object. The problem of static controller synthesis, in general, is reduced to the search for two mutually inverse matrices that satisfy a system of linear matrix inequalities. Such a problem is nonconvex and therefore cannot be solved using the apparatus of linear matrix inequalities. The solution of such a problem is reduced to finding two mutually inverse matrices that satisfy a system of linear matrix inequalities. The article considers a special case of the problem of synthesis of static controllers, which can be reduced to solving a system of linear matrix inequalities. The conditions for the implementation of such a case are shown. Two problems of the synthesis of static controllers are considered: the synthesis of the stabilizing controller and the synthesis of the optimal controller. The obtained results are applied to the stabilization of the electromagnetic suspension when the measured variable is the vertical displacement of the rotor. Graphs of transients are presented. A comparative analysis of the quality of transients in a closed system with calculated static controllers is performed.

Keywords: linear matrix inequalities, nonlinear matrix inequalities, Schur's lemma, static controller, electromagnetic suspension.

УДК 517.977
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2021.92.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.

*Поступила в редакцию 11.04.2021.
Опубликована 31.07.2021.*