ПРОЦЕДУРА ИДЕНТИФИКАЦИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРОВ С УЛУЧШЕННОЙ СХОДИМОСТЬЮ[1]

Глущенко А. И.[2], Ласточкин К. А.[3]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)
Петров В. А.[4]
(*Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова* (*филиал*) *ФГАОУ ВО НИТУ «МИСиС», Старый Оскол*)

Работа посвящена повышению качества решения задачи идентификации неизвестных кусочно-постоянных параметров классического линейного регрессионного уравнения. Для решения этой задачи в работе предлагается новая процедура обработки регрессионного уравнения, основанная на использовании в известном подходе интегрального динамического расширения и смешивания (*I-DREM*) *интервального интегрального фильтра с экспоненциальным списыванием и сбросом. Как доказано в работе, предложенный фильтр, в отличие от известных в литературе, при использовании в процедуре I-DREM позволяет генерировать регрессионное уравнение со скалярным регрессором и регулируемым уровнем возмущения, вызванным скачкообразным изменением неизвестных параметров. Основным результатом работы является процедура обработки линейного регрессионного уравнения с векторным регрессором, которая позволяет построить закон оценки, гарантирующий при выполнении условия конечного возбуждения регрессора ограниченность ошибки идентификации кусочно-постоянных параметров регулируемым значением. Все вышеупомянутые свойства в работе доказаны аналитически и/или продемонстрированы в рамках численного эксперимента.*

Ключевые слова: кусочно-постоянные параметры, идентификация, конечное возбуждение, интервальная фильтрация, сходимость.

---

[1] *Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке фонда Президента РФ* (*проект МД-1787.2022.4*).

[2] *Антон Игоревич Глущенко, д.т.н., в.н.с.* (aiglush@ipu.ru).
[3] *Константин Андреевич Ласточкин, инженер* (lastconst@ipu.ru).
[4] *Владислав Анатольевич Петров, к.т.н., доцент* (petrov.va@misis.ru).

1. Введение

Многие реальные объекты управления описываются моделями с кусочно-постоянными параметрами [6, 8]. Причинами изменения параметров в таких моделях обычно являются: 1) мгновенное изменение физических параметров или свойств объекта управления (захват роликами прокатного стана или рабочим органом манипулятора/крана заготовки, заполнение ковша экскаватора грунтом и т.д.); 2) переход нелинейного объекта управления в область пространства состояний с особой точкой, отличной от точки линеаризации (переход перевернутого маятника из верхней в нижнюю полуплоскость, изменение угла атаки самолета в модели Wing-Rock [4] и т.д.). Объекты управления с кусочно-постоянными параметрами широко распространены в авиации и промышленности, поэтому задача управления такими объектами является актуальной. Поскольку кусочно-постоянные параметры обычно являются неизвестными в каждый момент времени, то синтез систем управления для таких объектов должен осуществляться с привлечением методов теории идентификации для получения адекватного математического описания объекта и адаптивного управления для качественного решения задачи управления в режиме онлайн.

Классические методы [10, 11] теории идентификации, а именно градиентный закон оценки и различные вариации рекурсивного метода наименьших квадратов, позволяют [10, 13] с экспоненциальной скоростью оценивать истинные значения неизвестных кусочно-постоянных параметров при выполнении условия постоянного возбуждения и достаточно малой частоте изменения параметров. Однако данные законы не позволяют [10] гарантировать сходимость оценок к истинным значениям при невыполнении условия постоянного возбуждения, а качество оценок кусочно-постоянных параметров в этом случае может быть неприемлемым.

С другой стороны, современные методы теории идентификации [12], обеспечивающие улучшенное качество формируемых оценок и/или сходимость оценок к истинным значениям при ослабленных требованиях к возбуждению регрессора, основаны на динамической/алгоритмической фильтрации регрессионного уравнения – процедурах DRE [9, 12], MRE [7, 12], DREM [2, 12], I-DREM [5] и Concurrent Learning [3]. При применении таких подходов для идентификации кусочно-постоянных параметров качество получаемых оценок, как было показано в [1], может быть неудовлетворительным вследствие суперпозиционного смешивания используемыми динамическими/алгоритмическими фильтрами информации о регрессиях с различными значениями кусочно-постоянных параметров.

Поэтому целью настоящей работы является разработка контура оценки с улучшенным качеством идентификации кусочно-постоянных неизвестных параметров. Для этого предлагается в рамках известного подхода интегрального динамического расширения и смешивания (I-DREM) использовать интервальный интегральный фильтр с экспоненциальным списыванием и сбросом, что позволит минимизировать суперпозиционное смешивание информации о регрессиях с различными значениями кусочно-постоянных параметров и повысить качество получаемых оценок.

Настоящая работа представляет собой обобщение результатов, полученных в [1], с более строгим формальным доказательством основных свойств предлагаемой процедуры идентификации кусочно-постоянных неизвестных параметров.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейное регрессионное уравнение ($\Theta \in R^n$, $\varphi \in R^n$, $y \in R$):

$$y(t) = \Theta^{\mathrm{T}}(t)\varphi(t). \tag{1}$$

Будем предполагать, что для регрессора $\varphi(t)$ на отрезке $\left[t_r^+;\, t_e\right]$ выполнено условие конечного возбуждения $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$:

$$\int\limits_{t_r^+}^{t_e} \varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau \ge \alpha I, \tag{2}$$

а неизвестные параметры Θ описываются следующим образом:

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned} &\Theta(t)=\Theta_i,\ \forall\{t,i\}:\ t\in\left[t_i;\,t_{i+1}\right),\ i\le i_{\max}<\operatorname{floor}\left(\tfrac{t_e}{T_\Theta}\right),\ t_i=iT_\Theta,\\ &\left\|\Theta_i-\Theta_{i-1}\right\|=\left\|\Delta_\Theta\right\|\le\Delta_\Theta^{\max}, \end{aligned}$$

где α – степень возбуждения регрессора; $t_i < t_e$ – неизвестные моменты времени изменения значений вектора Θ; Θ_i – значение параметров Θ на интервале $[t_i; t_{i+1})$; $\Delta_\Theta^{\max}$ – величина максимального изменения Θ в момент времени t_i; T_Θ – неизвестный параметр, определяющий длительность интервала времени между моментами времени t_i и t_{i+1}.

Таким образом, неизвестные параметры в (1) описываются кусочно-постоянной функцией на интервале конечного возбуждения $\left[t_r^+;\,t_e\right]$, но постоянны за его пределами начиная с некоторого момента времени $t_{i_{\max}}\in\left[t_r^+;\,t_e\right]$. Для идентификации таких параметров рационально принять допущение о непрерывности конечного возбуждения регрессора.

Допущение 1. Если регрессор $\varphi(t)\in\mathrm{FE}$ на интервале $\left[t_r^+;\,t_e\right]$, то $\forall t\in\left[t_r^+;\,t_e\right]\ \exists T_s>0,\ T_s\to 0$ такое, что $\varphi(t)\in\mathrm{FE}$ и на отрезках $\left[t;\,t+T_s\right]\subset\left[t_r^+;\,t_e\right]$.

Допущение 1 верно, в частности, если регрессор $\varphi(t)$ непрерывен, его элементы на всем интервале $\left[t_r^+;\,t_e\right]$ линейно-независимы и поэлементно интегрально не вырождены на отрезках $\left[t;\,t+T_s\right]\subset\left[t_r^+;\,t_e\right]$, что обычно выполняется на практике.

Определим ошибки идентификации кусочно-постоянных параметров (3) следующим образом:

$$\text{(4)}\quad \begin{aligned} &\tilde{\Theta}=\hat{\Theta}-\Theta_i,\\ &\tilde{\Theta}_i=\hat{\Theta}\left(t_i+T_\Theta\right)-\Theta_i, \end{aligned}$$

где $\hat{\Theta}$ – вектор оценок неизвестных параметров, $\hat{\Theta}\left(t_i+T_\Theta\right)$ – последняя оценка $\hat{\Theta}$ из интервала $\left[t_i;\,t_{i+1}\right)$.

Пояснение введенных в этом разделе обозначений приведено на рис. 1.

Таким образом, ошибка $\tilde{\Theta}$ существует $\forall t \in [t_i; t_{i+1})$, а $\tilde{\Theta}_i$ вычисляется только в моменты времени $t_i + T_\Theta$.

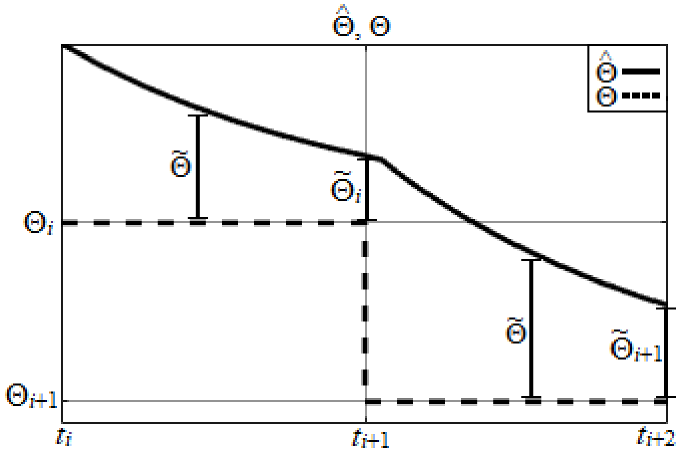

Рис. 1. Графическое пояснение введенных обозначений

Требуется построить закон формирования оценок $\hat{\Theta}$ кусочно-постоянных параметров Θ, обеспечивающий при $\varphi(t) \in$ FE для ошибки (4) выполнение следующего требования:

(5) $\quad \left\| \tilde{\Theta}_i \right\| \le R,$

где верхняя оценка R должна иметь возможность априорного выбора или уменьшения путем выбора варьируемых параметров закона идентификации.

3. Основной результат

Для достижения сформулированной цели (5) модифицируем недавно разработанный подход, показавший свою эффективность при решении задач идентификации постоянных параметров. А именно процедуру динамического расширения и смешивания, дополненную интегральным фильтром с экспоненциальным списыванием [1, 5]. Пропустим уравнение регрессии (1) через интегральный интервальный фильтр с экспоненциальным списыванием:

$$(6)\quad y_f^{\mathrm{T}}(t) = \int\limits_{t_k}^{t} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1} y(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau = \int\limits_{t_k}^{t} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1} \Theta^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau,$$

$$y_f(t_k) = 0_n,$$

где $t_k = T\cdot\mathrm{floor}(t/T)$ – моменты времени начала нового интервала фильтрации, $0 < T < t_e - t_r^+$ – ширина окна фильтрации, $\beta > 0$ – фактор памяти.

От соотношений варьируемого параметра фильтра T, определяющего длительность интервала фильтрации $[t_k; t_{k+1})$, и неизвестного параметра T_Θ, определяющего частоту изменения неизвестных параметров Θ_i, зависит чувствительность фильтра (6) к вариациям параметров регрессии Θ и его способность формировать невозмущенные регрессионные уравнения. На рис. 2 приведено графическое пояснение взаимосвязи параметров T и T_Θ.

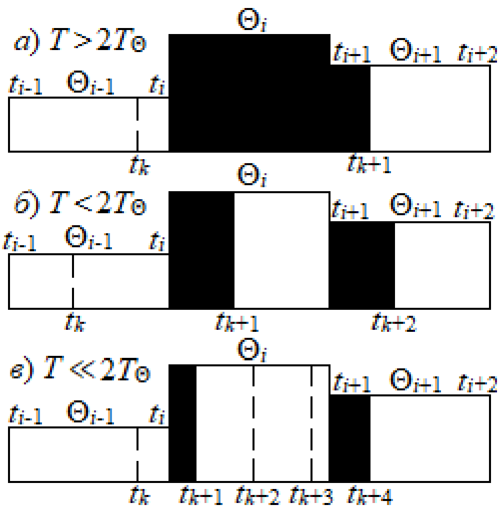

Рис. 2. Графическое пояснение взаимосвязи параметров T и T_Θ

Здесь черным цветом выделены интервалы времени, на которых фильтрация (6) осуществляет суперпозиционное смешивание регрессий с различными параметрами и формирует расширенные регрессионные уравнения с возмущениями.

Из графического пояснения следует, что обеспечение возможности своевременного детектирования фильтром (6) изменений параметров регрессии (1) обеспечивается выбором величины $T < 2T_\Theta$ или $T \ll 2T_\Theta$. Также графическое пояснение позволяет выделить две возможные ситуации на интервале фильтрации $[t_k; t_{k+1})$ с точки зрения принадлежности ему момента времени t_i. В случае, когда $t_i \notin [t_k; t_{k+1})$ $\forall i$, после фильтрации (6) $\forall t \in [t_k; t_{k+1})$ имеем невозмущенное расширенное регрессионное уравнение вида

$$\begin{gathered} y_f(t) = \varphi_f(t)\Theta(t); \\ \varphi_f(t_k) = 0_{n\times n};\, y_f(t_k) = 0_n, \\ \varphi_f^{\mathrm{T}}(t) = \int\limits_{t_k}^{t} e^{-\int\limits_0^\tau \beta d\tau_1} \varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau;\; y_f^{\mathrm{T}}(t) = \int\limits_{t_k}^{t} e^{-\int\limits_0^\tau \beta d\tau_1} y(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{7}$$

Случай, когда $t_i \in [t_k; t_{k+1})$, опишем в утверждении 1.

Утверждение 1. Если $t_i \in [t_k; t_{k+1})$, то в результате фильтрации (6) $\forall t \in [t_k; t_{k+1})$ имеем расширенное возмущенное регрессионное уравнение вида:

$$\begin{gathered} y_f(t) = \left(\varphi_{f1}(t) + \varphi_{f2}(t)\right)\Theta_{i-1} + \varphi_{f2}(t)\Delta_\Theta = \\ = \varphi_f(t)\Theta_{i-1} + \varphi_{f2}(t)\Delta_\Theta = \varphi_f(t)\Theta_i - \varphi_{f1}(t_i)\Delta_\Theta \\ \varphi_{f1}^{\mathrm{T}}(t_i) = \int\limits_{t_k}^{t_i} e^{-\int\limits_0^\tau \beta d\tau_1} \varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau;\; \varphi_{f2}^{\mathrm{T}}(t) = \int\limits_{t_i}^{t} e^{-\int\limits_0^\tau \beta d\tau_1} \varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau, \end{gathered} \tag{8}$$

где φ_{f1} – неизмеримый регрессор, оценка сверху которого пропорционально зависит от $(t_i - t_k)$, φ_{f2} – неизмеримый регрессор, оценка сверху которого пропорционально зависит от $(t_{k+1} - t_i)$ и экспоненциально от β.

Доказательство.

Для доказательства утверждения 1 распишем функцию y_f в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&y_f^{\mathrm{T}}(t)=\int\limits_{t_k}^{t_i} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1} y(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau+\int\limits_{t_i}^{t} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1} y(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau=\\
&=\Theta_{i-1}^{\mathrm{T}}\int\limits_{t_k}^{t_i} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau+\Theta_i^{\mathrm{T}}\int\limits_{t_i}^{t} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau=\\
&=\Theta_{i-1}^{\mathrm{T}}\int\limits_{t_k}^{t_i} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau+\left(\Delta_\Theta^{\mathrm{T}}+\Theta_{i-1}^{\mathrm{T}}\right)\int\limits_{t_i}^{t} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau=\\
&=\left(\Theta_i^{\mathrm{T}}-\Delta_\Theta^{\mathrm{T}}\right)\int\limits_{t_k}^{t_i} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau+\Theta_i^{\mathrm{T}}\int\limits_{t_i}^{t} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1} y(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Вводя в (9) соответствующие обозначения, имеем выражение (8). Для нахождения оценок сверху на φ_{f1} и φ_{f2} сначала получим оценку на подынтегральный экспоненциально затухающий множитель в определениях φ_{f1}, φ_{f2}:

$$
\begin{aligned}
&\forall t\in[t_k;\,t_i):\ \exp\left(-\beta\left(t_i-t_k\right)\right)\le\exp\left(-\int\limits_0^{t}\beta d\tau_1\right)\le 1;\\
&\forall t\in[t_i;\,t_{k+1}):\ \exp\left(-\beta T\right)\le\exp\left(-\int\limits_0^{t}\beta d\tau_1\right)\le\exp\left(-\beta\left(t_i-t_k\right)\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Учитывая (10) и пользуясь теоремой о среднем, имеем оценки на φ_{f1} и φ_{f2}:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{f1}^{\mathrm{T}}(t_i)=\int\limits_{t_k}^{t_i} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau\le\int\limits_{t_k}^{t_i}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau\le\delta_k\left(t_i-t_k\right),\\
&\varphi_{f2}^{\mathrm{T}}(t)=\int\limits_{t_i}^{t} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau\le e^{-\beta\left(t_i-t_k\right)}\delta_k\left(t_{k+1}-t_i\right),\\
&\delta_k=\operatorname*{ess\,sup}_{t_k\le t\le t_{k+1}}\lambda_{\max}\left(\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Откуда следует зависимость φ_{f1} от $(t_i - t_k)$, а φ_{f2} – от $(t_{k+1} - t_i)$ и β, что завершает доказательство утверждения. ■

Поскольку в (8) φ_{f1}, φ_{f2} неизмеримы, а вектор разниц Δ_Θ неизвестен, то выражения $-\varphi_{f1}\Delta_\Theta$, $\varphi_{f2}\Delta_\Theta$ трактуются как возмущающие воздействия. В этой связи необходимо отметить, что далее всегда считается $\varphi_{f1} \neq 0$, а случай, когда $t_i = t_k$ и, следовательно, $\varphi_{f1} = 0$, не рассматривается, поскольку маловероятен в практических задачах. Согласно выражению (11), возмущение $-\varphi_{f1}\Delta_\Theta$ может быть уменьшено при уменьшении $(t_i - t_k)$, а возмущение $\varphi_{fi}\Delta_\Theta$ – при уменьшении $(t_{k+1} - t_i)$ или при увеличении β.

Кроме возможности формирования с помощью (6) расширенного регрессионного уравнения с регулируемым уровнем возмущения, вызванным скачкообразным изменением параметров регрессии, фильтрация (6), в отличие от известных в литературе фильтраций DRE [9] или MRE [7], на этапе расширения регрессора (6) на интервале фильтрации $[t_k;\, t_{k+1})$ позволяет получать незатухающий регрессор φ_f, для которого оказывается справедливым следующее утверждение.

Утверждение 2. Если $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$ на интервале $\left[t_r^+;\, t_e\right]$ и выполняется допущение 1, то для $\varphi_f(t)$ верно:

1) $\forall t \in \left[t_r^+;\, t_e\right]\ \varphi_f(t) \geq 0_{n\times n}$;
2) $\exists T_{0k} \in \left[t_k;\, t_{k+1}\right),\ \forall t \in \left[T_{0k};\, t_{k+1}\right)\ 0_{n\times n} < \varphi_f(T_{0k}) \leq \varphi_f(t) \leq \varphi_{f.UB}$.

Доказательство:

Согласно (7), $\operatorname{sign}\left(\exp\left(-\int\limits_0^\tau \beta \mathrm{d}\tau_1\right)\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)\right) \geq 0_{n\times n}$, а следовательно, $\dot{\varphi}_f \geq 0_{n\times n}$ и $\varphi_f \geq 0_{n\times n}$ $\forall t \in \left[t_r^+;\, t_e\right]$.

Для доказательства второй части утверждения запишем оценку на подынтегральный экспоненциально затухающий множитель в определении регрессора $\varphi_f(t)$:

$$\text{(12)}\quad \forall t \in \left[t_k;\, t_{k+1}\right):\ \exp(-\beta T) \leq \exp\left(-\int\limits_0^t \beta d\tau_1\right) \leq 1.$$

Так как $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$ на отрезке $\left[t_r^+;\, t_e\right]$, то, поскольку интервал $\left[t_k;\, t_{k+1}\right) \subset \left[t_r^+;\, t_e\right]$, в соответствии с допущением 1 также имеем:

(13) $\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau \geq \alpha_k I,$

где α_k – степень возбуждения φ (t) на отрезке $[t_k;\ t_{k+1})$.

Принимая во внимание оценки (12), (13) и используя теорему о среднем, имеем оценку на значение $\varphi_f(t_{k+1})$:

(14) $\varphi_f(t_{k+1}) = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1} \varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau \geq e^{-\beta T}\alpha_k I.$

Так как $\varphi_f(t) \geq 0_{n\times n}$ $\forall t \in [t_k;\ t_{k+1})$ и $\varphi_f(t_{k+1}) \geq \exp(-\beta T)\alpha_k I$, то $\exists T_{0k} \in [t_k;\ t_{k+1})$ такой, что $\varphi_f(T_{0k}) = \exp(-\beta T)\alpha_k I$ и $\forall t \in [T_{0k};\ t_{k+1})$ верно:

(15) $\varphi_f(t) \geq \varphi_f(T_{0k}) > 0_{n\times n}.$

Пользуясь теоремой о среднем и определением δ_k в (11), имеем оценку сверху на регрессор φ_f:

(16) $\varphi_f(t) = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1} \varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau \leq \delta_k \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\int\limits_0^{\tau}\beta d\tau_1} I d\tau \leq \dfrac{\delta_k}{\beta} I = \varphi_{f.UB}.$

Объединение выражений (15) и (16) позволяет завершить доказательство утверждения. ■

Замечание 1. В рамках утверждения 2 был введен некоторый момент времени T_{0k}, который призван обозначить момент времени, после которого регрессор φ_f является положительно-определенной матрицей. Из (14) ясно, что в непрерывном времени для положительно-полуопределенной матрицы φ_f при выполнении условия (2) таких моментов времени можно найти бесконечное множество. А поэтому далее, говоря, что $t_i \in [t_k;\ t_{k+1})$, будем считать, что $t_i \in (T_{0k};\ t_{k+1})$, а ситуацию $t_i \in t_k;\ T_{0k}]$ без потери справедливости рассуждений отнесем к маловероятному на практике случаю, когда $t_i = t_k$.

Следуя процедуре DREM [2], умножим уравнение (6) на матрицу $\mathrm{adj}\{\varphi_f(t)\}$, союзную регрессору $\varphi_f(t)$. Тогда с учетом (7) и утверждения 1 имеем уравнения вида

(17) $\Upsilon := \mathrm{adj}\{\varphi_f(t)\} y_f(t),$

где $\Upsilon \in R^n$ – регрессионная измеримая функция.

Учитывая выражения (7) и (8), а также используя алгебраическое равенство $\mathrm{adj}\{\varphi_f(t)\}\varphi_f(t) = \det\{\varphi_f(t)\}I$, из (17) имеем регрессионное уравнение вида

$$\Upsilon = \begin{cases} \Omega\Theta \text{ если } t_i \notin [t_k; t_{k+1}), \\ \Omega\Theta_{i-1} + d_2 = \Omega\Theta_i + d_1 = \Omega\Theta + d_1 \text{ если } t_i \in [t_k; t_{k+1}); \end{cases}$$

(18) $$d_2 = \mathrm{adj}\{\varphi_f(t)\}\varphi_{f2}(t)\Delta_\Theta,\ d_1 = -\mathrm{adj}\{\varphi_f(t)\}\varphi_{f1}(t)\Delta_\Theta,$$

$$\Omega = \det\{\varphi_f(t)\},$$

где $\Omega \in R$ – регрессор, $d_1 \in R^n$, $d_2 \in R^n$ – неизмеримые возмущения.

На основании выводов, сделанных в утверждениях 1 и 2, можно получить следующие важные выводы относительно регрессора Ω и возмущений d_1, d_2.

Следствие 1. Если $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$ на интервале $\left[t_r^+; t_e\right]$ и выполняется допущение 1, то для Ω верно:

1) $\forall t \in \left[t_r^+; t_e\right]\ \Omega(t) \geq 0$;

2) $\exists T_{0k} \in [t_k; t_{k+1}),\ \forall t \in [T_{0k}; t_{k+1})\ 0 < \Omega(T_{0k}) \leq \Omega(t) \leq \Omega_{\mathrm{UB}}$.

Доказательство.

Первая часть следствия 1 справедлива, поскольку $\varphi_f(t)$, в соответствии с утверждением 2, является положительной полуопределенной матрицей, определитель которой, по определению является положительной полуопределенной функцией. Вторая часть следствия 2 доказывается непосредственным взятием определителя неравенств (15) и (16) с учетом равенства $\det\{cI_{nxn}\} = c^n\ \forall c$:

(19) $$\forall t \in [T_{0k}; t_{k+1})\ \Omega(t) \geq det\{\varphi_f(T_{0k})\} = \left(e^{-\beta T}\alpha_k\right)^n = \Omega(T_{0k}) > 0,$$

(20) $$\forall t \in [T_{0k}; t_{k+1})\ \Omega(t) \leq det\{\varphi_{f.UB}\} = \left(\frac{\delta_k}{\beta}\right)^n = \Omega_{UB},$$

что и требовалось доказать. ■

Следствие 2. Возмущения d_1 и d_2 являются ограниченными и могут быть уменьшены увеличением β.

Доказательство.

Применив равенство $\mathrm{adj}\{A + B\} = \mathrm{adj}\{A\} + \mathrm{adj}\{B\}$ $\forall A, B$ в определениях d_1 и d_2, получаем

$$
\begin{aligned}
&d_2 = \left(\mathrm{adj}\left\{\varphi_{f1}(t_i)\right\}\varphi_{f2}(t) + \mathrm{adj}\left\{\varphi_{f2}(t)\right\}\varphi_{f2}(t)\right)\Delta_\Theta = \\
&= \left(\mathrm{adj}\left\{\varphi_{f1}(t_i)\right\}\varphi_{f2}(t) + \det\left\{\varphi_{f2}(t)\right\}I\right)\Delta_\Theta, \\
&d_1 = -\left(\mathrm{adj}\left\{\varphi_{f1}(t)\right\}\varphi_{f1}(t) + \mathrm{adj}\left\{\varphi_{f2}(t)\right\}\varphi_{f1}(t)\right)\Delta_\Theta = \\
&= -\left(\det\left\{\varphi_{f1}(t)\right\}I + \mathrm{adj}\left\{\varphi_{f2}(t)\right\}\varphi_{f1}(t)\right)\Delta_\Theta.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Из (21), используя оценки сверху (11) и равенство $\mathrm{adj}\{cI_{nxn}\} = c\cdot\mathrm{adj}\{I_{nxn}\}$ $\forall c$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\|d_2\| \le \left((t_i - t_k)(t_{k+1} - t_i)\delta_k^2 e^{-\beta(t_k - t_i)} + \left(e^{-\beta(t_k - t_i)}\delta_k(t_{k+1} - t_i)\right)^n\right)\Delta_\Theta^{\max}, \\
&\|d_1\| \le \left(\left(\delta_k(t_i - t_k)\right)^n + (t_i - t_k)(t_{k+1} - t_i)\delta_k^2 e^{-\beta(t_k - t_i)}\right)\Delta_\Theta^{\max}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Откуда и следует возможность уменьшения d_1 и d_2 с помощью β, что и требовалось доказать.

На основании выражения (18) определим закон формирования оценок в следующем виде:

$$
\dot{\hat{\Theta}} = -\gamma\cdot\Omega\left(\Omega\hat{\Theta} - \Upsilon\right),\ \gamma = \begin{cases} 0 \text{ если } \Omega \le \kappa, \\ \dfrac{\gamma_0}{\Omega^2} \text{ иначе;} \end{cases}
\tag{23}
$$

где γ – коэффициент усиления, $\gamma_0 > 0$ – параметр закона оценки, $\kappa \in \left(0;\ \min\limits_k\left(\Omega(T_{0k})\right)\right)$ – параметр нелинейного оператора в определении γ.

Замечание 2. Деление на величину Ω^2, реализуемое в контуре (23), является безопасной операцией, поскольку при $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$ регрессор $\Omega > 0$ $\forall t \in [T_{0k}; t_{k+1})$. Процедура деления на Ω^2 позволяет обеспечивать заданную предельную величину параметрической ошибки $\tilde{\Theta}$ на интервалах $[T_{0k}; t_{k+1})$.

Сформулированные утверждения и следствия из них позволяют доказать следующие свойства контура идентификации (23).

Свойство 1. Если $\varphi(t) \in$ FE, выполняется допущение 1, и $t_i \notin [t_k;\ t_{k+1})$, то $\lim\limits_{\gamma_0(t_{k+1}-T_{0k})\to\infty}\left(\left\|\tilde{\Theta}(t_{k+1})\right\|\right) = 0$.

Доказательство.

Введем в рассмотрение квадратичную форму $V = \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\Theta}$ и вычислим ее производную в силу (18) и (23):

(24) $\dot{V} = -\gamma \cdot \Omega^2 \tilde{\Theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\Theta}.$

Производная (24) $\forall t \in [T_{0k};\ t_{k+1})$ в силу второго пункта следствия 1 и определения γ в (23) примет вид

(25) $\dot{V} = -\gamma_0 \tilde{\Theta}^{\mathrm{T}}\tilde{\Theta} = -\gamma_0 \left\|\tilde{\Theta}\right\|^2.$

Решение дифференциального уравнения (25) на интервале $[T_{0k};\ t_{k+1})$ имеет вид

(26) $\left\|\tilde{\Theta}(t_{k+1})\right\| \le \sqrt{2}e^{-0{,}5\gamma_0(t_{k+1}-T_{0k})}\left\|\tilde{\Theta}(T_{0k})\right\|.$

Поскольку $\gamma = 0$ до момента времени T_{0k} в силу выбора κ в соответствии с (23), то $\tilde{\Theta}(T_{0k}) = \tilde{\Theta}(t_k)$, а уравнение (26) приобретает вид

(27) $\left\|\tilde{\Theta}(t_{k+1})\right\| \le \sqrt{2}e^{-0{,}5\gamma_0(t_{k+1}-T_{0k})}\left\|\tilde{\Theta}(t_k)\right\|,$

откуда следует справедливость свойства 1. ■

Свойство 2. Если $\varphi(t) \in$ FE, выполняется допущение 1, и $t_i \in [t_k;\ t_{k+1})$, то верны предельные неравенства:

(28)
$$\begin{gathered}
\lim\limits_{\substack{\gamma_0(t_{k+1}-T_{0k})\to\infty \\ \beta\to\infty}}\left(\left\|\hat{\Theta}(t_{k+1}) - \Theta_i\right\|\right) = \sqrt{2}\left(\delta_k(t_i - t_k)\right)^n \Delta_{\Theta}^{\max}\kappa^{-1}, \\
\lim\limits_{\substack{\gamma_0(t_{k+1}-T_{0k})\to\infty \\ \beta\to\infty}}\left(\left\|\hat{\Theta}(t_{k+1}) - \Theta_{i-1}\right\|\right) = 0.
\end{gathered}$$

Доказательство

Чтобы доказать свойство, введем функции:

(29)
$$\begin{gathered}
V_1 = -\tfrac{1}{2}\left(\hat{\Theta} - \Theta_i\right)^{\mathrm{T}}\left(\hat{\Theta} - \Theta_i\right), \\
V_2 = -\tfrac{1}{2}\left(\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right).
\end{gathered}$$

Определим $\forall t \in [T_{0k};\ t_{k+1})$ в силу (18), (23), второго пункта следствия 1 и определения γ производные функций (29):

$$\dot{V}_1 = -\gamma \cdot \Omega^2 \left(\hat{\Theta} - \Theta_i\right)^{\mathrm{T}} \left(\hat{\Theta} - \Theta_i\right) + \gamma \cdot \Omega \left(\hat{\Theta} - \Theta_i\right)^{\mathrm{T}} d_1 \leq$$

$$\leq -\gamma_0 \cdot \left(\hat{\Theta} - \Theta_i\right)^{\mathrm{T}} \left(\hat{\Theta} - \Theta_i\right) + \gamma_0 \cdot \frac{1}{\kappa} \left(\hat{\Theta} - \Theta_i\right)^{\mathrm{T}} d_1, \tag{30}$$

$$\dot{V}_2 \leq -\gamma_0 \cdot \left(\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right)^{\mathrm{T}} \left(\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right) + \gamma_0 \cdot \frac{1}{\kappa} \left(\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right)^{\mathrm{T}} d_2.$$

Оценка сверху на производные (30) в силу выражения (19) $\forall t \in [T_{0k};\, t_{k+1})$ имеет вид:

$$\dot{V}_1 \leq -\gamma_0 \left\|\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right\|^2 + \gamma_0 \frac{1}{\kappa} \|d_1\| \left\|\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right\| \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2}\gamma_0 \left\|\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right\|^2 + \frac{1}{2}\gamma_0 \frac{\|d_1\|^2}{\kappa^2}, \tag{31}$$

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{2}\gamma_0 \left\|\hat{\Theta} - \Theta_{i-1}\right\|^2 + \frac{1}{2}\gamma_0 \frac{\|d_2\|^2}{\kappa^2},$$

где в правых частях выражения (30) было использовано неравенство $-a^2 + ab \leq -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$.

Решение дифференциальных неравенств (31) $\forall t \in [T_{0k};\, t_{k+1})$ приобретают вид:

$$\begin{aligned} &\left\|\hat{\Theta}(t_{k+1}) - \Theta_i\right\| \leq \sqrt{2} e^{-0,25\gamma_0 (t_{k+1} - T_{0k})} \left\|\hat{\Theta}(T_{0k}) - \Theta_i\right\| + \tfrac{\sqrt{2}\|d_1\|}{\kappa}, \\ &\left\|\hat{\Theta}(t_{k+1}) - \Theta_{i-1}\right\| \leq \sqrt{2} e^{-0,25\gamma_0 (t_{k+1} - T_{0k})} \left\|\hat{\Theta}(T_{0k}) - \Theta_{i-1}\right\| + \tfrac{\sqrt{2}\|d_2\|}{\kappa}. \end{aligned} \tag{32}$$

Используя те же аргументы, что и при переходе от (26) к (27), из (32) получаем

$$\begin{aligned} &\left\|\hat{\Theta}(t_{k+1}) - \Theta_i\right\| \leq \sqrt{2} e^{-0,25\gamma_0 (t_{k+1} - T_{0k})} \left\|\hat{\Theta}(t_k) - \Theta_i\right\| + \tfrac{\sqrt{2}\|d_1\|}{\kappa}, \\ &\left\|\hat{\Theta}(t_{k+1}) - \Theta_{i-1}\right\| \leq \sqrt{2} e^{-0,25\gamma_0 (t_{k+1} - T_{0k})} \left\|\hat{\Theta}(t_k) - \Theta_{i-1}\right\| + \tfrac{\sqrt{2}\|d_2\|}{\kappa}. \end{aligned} \tag{33}$$

Откуда, учитывая оценки сверху (22) на d_1 и d_2, следует справедливость свойства 2. ■

Замечание 3. Необходимо отметить, что при выборе $\beta \to \infty$, момент времени смены параметров t_i на интервале фильтрации $[t_k;\, t_{k+1})$ попадает в «область нечувствительности» фильтра (6) к новым данным, а следовательно $\varphi_{f2} \to 0$, $d_2 \to 0$, а на всем интервале фильтрации $[t_k;\ t_{k+1})$ осуществляется идентификация вектора старых параметров Θ_{i-1}, и именно поэтому ошибка $\hat{\Theta}(t_{k+1}) - \Theta_{i-1}$ сходится к нулю.

Из уравнений (33), на основании определения в (2) оценок сверху на d_1 и d_2, можно сделать следующий вывод: чем ближе момент времени t_i к малой окрестности t_k (или t_{k+1}), тем меньше величина возмущения d_1 (d_2) (из (22) при $t_i \to t_{k+1}$ функция $d_2 \to 0$, а при $t_i \to t_k$ – функция $d_1 \to 0$). Другими словами, при $t_i \to t_{k+1}$ и применении закона (23) можно считать, что на отрезке $[t_k;\ t_{k+1})$ осуществляется идентификация вектора старых параметров Θ_{i-1} в условиях пренебрежимо малого возмущения d_2, а при $t_i \to t_k$ на отрезке $[t_k;\ t_{k+1})$ осуществляется идентификация вектора новых параметров Θ_i в условиях ограниченного возмущения d_1. Приблизить t_i к малой окрестности t_k (или t_{k+1}) представляется возможным, выбирая параметр T.

Свойство 3. Если $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$, выполняется допущение 1, $t_i \in [t_k;\ t_{k+1})$ и $\exists [t_{k+1};\ t_{k+2})$ такой, что $t_{i+1} \notin [t_{k+1};\ t_{k+2})$, то $\exists \left[T_{0(k+1)};\ t_{k+2}\right)$ такой, что $\lim\limits_{\gamma_0\left(t_{k+2} - T_{0(k+1)}\right) \to \infty} \left(\left\|\tilde{\Theta}(t_{k+2})\right\|\right) = 0$.

Доказательство.

По доказанному в свойствах 1 и 2 имеем оценки на параметрическую ошибку в моменты времени t_{k+1} и t_{k+2}:

$$\left\|\tilde{\Theta}(t_{k+1})\right\| \le \sqrt{2} e^{-0{,}25\gamma_0\left(t_{k+1} - T_{0k}\right)} \left\|\tilde{\Theta}(t_k)\right\| + \frac{\sqrt{2}\|d_1\|}{\kappa}, \tag{34}$$

$$\left\|\tilde{\Theta}(t_{k+2})\right\| \le \sqrt{2} e^{-0{,}5\gamma_0\left(t_{k+2} - T_{0(k+1)}\right)} \left\|\tilde{\Theta}(t_{k+1})\right\|. \tag{35}$$

Подставив (34) в (35), имеем:

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\Theta}(t_{k+2})\right\| &\le 2 e^{-0{,}5\gamma_0\left(t_{k+2} - T_{0(k+1)}\right) - 0{,}25\gamma_0\left(t_{k+1} - T_{0k}\right)} \left\|\tilde{\Theta}(t_k)\right\| + \\ &+ 2 e^{-0{,}5\gamma_0\left(t_{k+2} - T_{0(k+1)}\right)} \frac{\|d_1\|}{\kappa}, \end{aligned} \tag{36}$$

откуда следует справедливость свойства 3. ■

Согласно свойствам 1–3, закон (23) обеспечивает экспоненциальную ограниченность ошибки идентификации любого i-го постоянного неизвестного параметра Θ_i кусочно-постоянной функции Θ если $t_i \notin [t_k;\ t_{k+1})$ или если существует следующий интервал фильтрации $t_{i+1} \in [t_{k+1}; t_{k+2})$. Свойства 1 и 3 позволяют рассмотреть поведение ошибки оценки параметра Θ_i не на интервале фильтрации $[t_k; t_{k+1})$, а на всем интервале $[t_i; t_{i+1})$ существования параметра Θ_i.

Теорема 1. Пусть выполняется условие конечного возбуждения регрессора $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$ и допущение 1, параметр T фильтра (6) выбран так, что $T < 2T_\Theta$ или $T \ll 2T_\Theta$, а для формирования вектора оценок $\hat{\Theta}$ используется контур (23), тогда параметрическая ошибка $\tilde{\Theta}_i$ ограничена в соответствии с (5), а ее оценка сверху R может быть уменьшена увеличением $\gamma_0 T_3$, $\gamma_0 T_1$, β и имеет вид

$$R = a^{i_{max}+1} e^{-(i_{max}+1)\gamma_0 T_3} \left\|\tilde{\Theta}\left(t_r^+\right)\right\| + \left(\frac{a^{i_{max}} e^{-\gamma_0 i_{max} T_3} - 1}{a e^{-\gamma_0 T_3} - 1}\right) a e^{-\gamma_0 T_3} \Delta_\Theta^{\max} + \left(\frac{a^{i_{max}+1} e^{-(i_{max}+1)\gamma_0 T_3} - 1}{a e^{-\gamma_0 T_3} - 1}\right) b, \quad (37)$$

где a, b определены при доказательстве.

Доказательство.

Из сопоставления графического пояснения рис. 2 и свойств 1 и 3 контура идентификации (23) следует, что параметрическая ошибка (5) будет минимальной, если $T \ll 2T_\Theta$ (в этом случае на отрезке $[t_i; t_{i+1})$ максимизируется число интервалов фильтрации $[t_k; t_{k+1})$, на которых параметрическая ошибка экспоненциально убывает по свойству 1 контура идентификации (23)). Поэтому оценку сверху на параметрическую ошибку будем искать в случае, когда $T < 2T_\Theta$. В этом случае на отрезке $[t_i; t_{i+1})$ существует всего один интервал $[t_{k+1}; t_{i+1})$, на котором параметрическая ошибка убывает по свойству 1.

Поскольку при $T < 2T_\Theta$ $t_i \in [t_k; t_{k+1})$, и существует интервал времени $[t_{k+1}; t_{i+1})$ такой, что $t_{i+1} \notin [t_{k+1}; t_{k+2})$, то согласно свойству 3 можем записать:

$$\left\|\tilde{\Theta}\left(t_{i+1}\right)\right\| \le 2e^{-0,5\gamma_0\left(t_{i+1} - T_{0(k+1)}\right) - 0,25\gamma_0\left(t_i - T_{0k}\right)} \left\|\tilde{\Theta}\left(t_i\right)\right\| + 2e^{-0,5\gamma_0\left(t_{i+1} - T_{0(k+1)}\right)} \frac{\|d_1\|}{\kappa}. \quad (38)$$

Введем для выражения (38) следующую оценку сверху:

$$\left\|\tilde{\Theta}\left(t_{i+1}\right)\right\| \le ae^{-\gamma_0 T_3}\left\|\tilde{\Theta}\left(t_i\right)\right\| + b,$$

$$T_1 = \min_{\substack{1\le i+1\le i_{\max}\\ k}}\left[0,5\left(t_{i+1} - T_{0(k+1)}\right)\right];\ T_2 = \min_{\substack{0\le i\le i_{\max}\\ k}}\left[0,25\left(t_i - T_{0k}\right)\right], \tag{39}$$

$$T_3 = T_1 + T_2;\ a = 2;\ b = ae^{-\gamma_0 T_1}\frac{\|d_1\|}{\kappa}.$$

Учитывая тот факт, что

$$\begin{aligned} &\tilde{\Theta}\left(t_{i+1}\right) = \hat{\Theta}\left(t_i + T_\Theta\right) - \Theta_i = \tilde{\Theta}_i,\\ &\tilde{\Theta}\left(t_i\right) = \hat{\Theta}\left(t_i\right) - \Theta_i, \end{aligned} \tag{40}$$

можем переписать выражение (39) в виде

$$\left\|\hat{\Theta}\left(t_i + T_\Theta\right) - \Theta_i\right\| \le ae^{-\gamma_0 T_3}\left\|\hat{\Theta}\left(t_i\right) - \Theta_i\right\| + b. \tag{41}$$

Пользуясь равенством

$$\begin{aligned} &\hat{\Theta}\left(t_i\right) - \Theta_i = \hat{\Theta}\left(t_{i-1} + T_\Theta\right) - \Theta_{i-1} + \Theta_{i-1} - \Theta_i =\\ &= \hat{\Theta}\left(t_{i-1} + T_\Theta\right) - \Theta_{i-1} - \Delta_\Theta, \end{aligned} \tag{42}$$

применим формулу (41) рекуррентно i_{max} раз, воспользовавшись при этом формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} &\left\|\tilde{\Theta}_i\right\| \le ae^{-\gamma_0 T_3}\left\|\hat{\Theta}\left(t_{i-1} + T_\Theta\right) - \Theta_{i-1} + \Theta_{i-1} - \Theta_i\right\| + b \le\\ &\le a^2 e^{-2\gamma_0 T_3}\left\|\hat{\Theta}\left(t_{i-2} + T_\Theta\right) - \Theta_{i-1}\right\| + ae^{-\gamma_0 T_3}\Delta_\Theta^{\max} + b\left(1 + ae^{-\gamma_0 T_3}\right) \le\\ &\le a^3 e^{-3\gamma_0 T_3}\left\|\hat{\Theta}\left(t_{i-3} + T_\Theta\right) - \Theta_{i-2}\right\| + \left(1 + ae^{-\gamma_0 T_3}\right)ae^{-\gamma_0 T_3}\Delta_\Theta^{\max} +\\ &+ b\left(1 + ae^{-\gamma_0 T_3} + a^2 e^{-2\gamma_0 T_3}\right) \le a^{i_{max}+1}e^{-\left(i_{max}+1\right)\gamma_0 T_3}\left\|\tilde{\Theta}\left(t_r^+\right)\right\| +\\ &+ \left(\frac{a^{i_{max}}e^{-\gamma_0 i_{max} T_3} - 1}{ae^{-\gamma_0 T_3} - 1}\right)ae^{-\gamma_0 T_3}\Delta_\Theta^{\max} + \left(\frac{a^{i_{max}+1}e^{-\left(i_{max}+1\right)\gamma_0 T_3} - 1}{ae^{-\gamma_0 T_3} - 1}\right)b. \end{aligned} \tag{43}$$

Откуда непосредственно следует выражение (37). В силу выполнения предельных равенств:

$$\begin{aligned} &\lim_{\gamma_0 T_3 \to \infty} e^{-\gamma_0 T_3} = 0,\ \lim_{\gamma_0 T_1 \to \infty} b = 0,\\ &\lim_{\beta \to \infty} b = ae^{-\gamma_0 T_1}\sqrt{2}\left(\delta_k\left(t_i - t_k\right)\right)^n \Delta_\Theta^{\max}\kappa^{-1}, \end{aligned} \tag{44}$$

оценка сверху R может быть уменьшена с помощью увеличения $\gamma_0 T_3$, $\gamma_0 T_1$, β, что завершает доказательство теоремы. ■

Таким образом, обработка (6) и (17) матричного линейного регрессионного уравнения (1) позволяет построить закон оценки (23), гарантирующий при выполнении условия конечного возбуждения регрессора ограниченность (5) ошибки идентификации кусочно-постоянных параметров регулируемым значением.

4. Численный эксперимент

4.1. ВАЛИДАЦИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ

В численном эксперименте регрессор $\varphi(t)$ и вектор неизвестных параметров Θ зададим следующим образом:

$$(45)\quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};\quad \begin{matrix} t_e \equiv 1, \\ T_\Theta = 0,5; \end{matrix}\quad (t_i, \Theta_i) = \begin{cases} t_0 = 0;\ \Theta_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \\ t_1 = 0,5;\ \Theta_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Параметры фильтра (6) и закона (23) установим так:

$$(46)\quad T = 0,45;\ \beta = 200;\ \gamma_0 = 100;\ \kappa = 10^{-12}.$$

Нетрудно убедится, что для выбранного регрессора $\varphi(t)$ на интервале выполняется как условие конечного возбуждения, так и допущение 1.

На рис. 3 изображены переходные процессы по $\Omega(t)$ и $\Upsilon(t)$.

Приведенные на рис. 3 переходные процессы по $\Omega(t)$ подтверждают существование при $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$ на каждом интервале фильтрации $[t_k; t_{k+1})$ момента времени T_{0k} такого, что $\forall t \in [T_{0k}; t_k)$ $\Omega(t) > \Omega(T_{0k}) > 0$ и демонстрируют выполнение условия $\kappa < \min\limits_k \left(\Omega\left(T_{0k}\right)\right)$, что подтверждает выводы следствия 2 и свидетельствует о верном выборе параметра κ.

Переходные процессы по $\Upsilon(t)$ подтверждают справедливость записи (18) и следствия 2: действительно, при $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$ с помощью (6) и (17) формируются возмущенные скалярные регрессионные уравнения с ограниченными в соответствии с (22) возмущениями.

На рис. 4 представлено сравнение параметров Θ и их оценок, полученных с помощью (23).

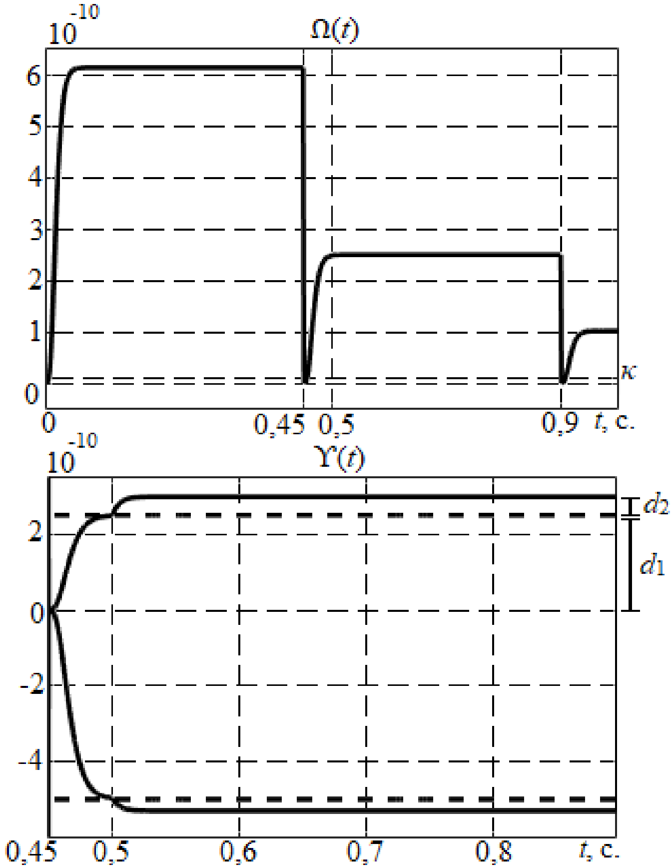

Рис. 3. Регрессор $\Omega(t)$ *и функция* $\Upsilon(t)$

Переходные процессы по $\hat{\Theta}$ валидируют свойства контура оценки (23): на интервалах фильтрации [0; 0,45) и [0.9; 0,135) ошибка экспоненциально ограничена, а на интервале [0,45; 0,9) – ограничена, что определяется свойствами 1–3.

Проверим теоретически доказанную в свойстве 2 возможность уменьшения на интервале [0,45; 0,9) предельной ошибки идентификации с помощью увеличения β. Для этого промоделируем разработанную систему при зафиксированных в соответствии с (46) значениях T, γ_0, κ и различных β.

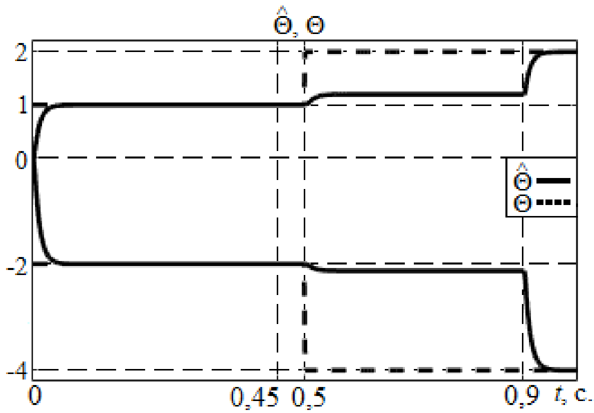

Рис. 4. Сравнение параметров Θ *и их оценок* $\hat{\Theta}$

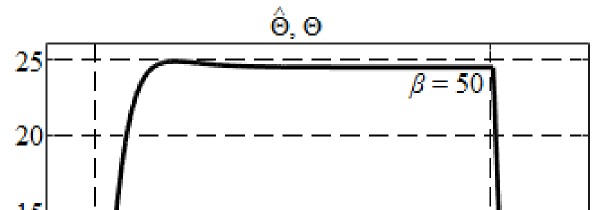

Рис. 5. Оценки $\hat{\Theta}$ *, полученные при различных* β

Представленное на рис. 5 семейство переходных процессов подтверждает возможность регулирования предельной ошибки идентификации на интервале [0,45; 0,9) с помощью увеличения β.

Также выполним моделирование закона (23) при различных значениях параметра T и зафиксированных в соответствии с (46) значениях γ_0, κ, β.

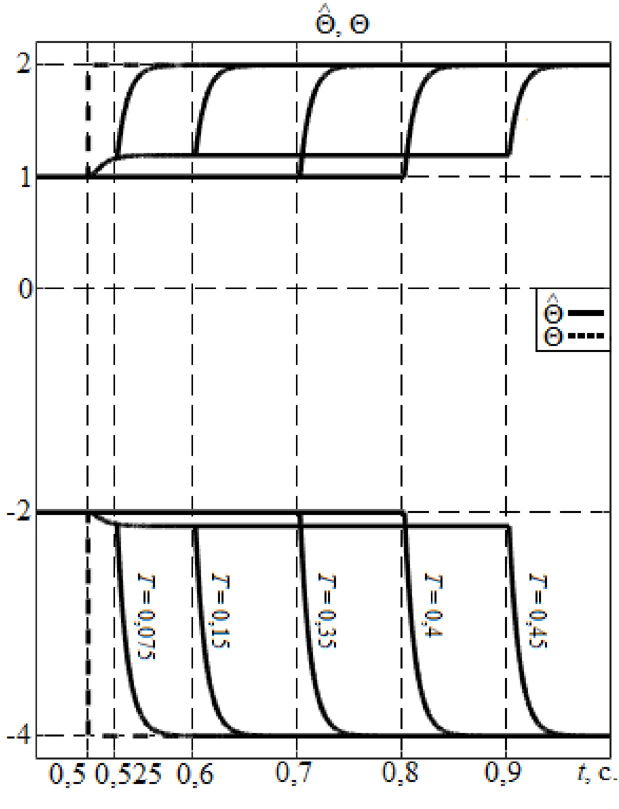

Рис. 6. Оценки $\hat{\Theta}$ *, полученные при различных T*

Результаты данного эксперимента, с одной стороны, мотивируют выбор $T \to 0$, что обеспечивает экспоненциальную ограниченность ошибки идентификации на большем числе интервалов фильтрации, а с другой стороны, подтверждают возможность уменьшения ошибки идентификации приближением с помощью варьирования величины T момента времени t_i к t_k или t_{k+1}.

Наконец, промоделируем разработанную систему идентификации при T = 0,075, различных значениях параметра γ_0 и зафиксированных в соответствии с (46) значениях κ, β.

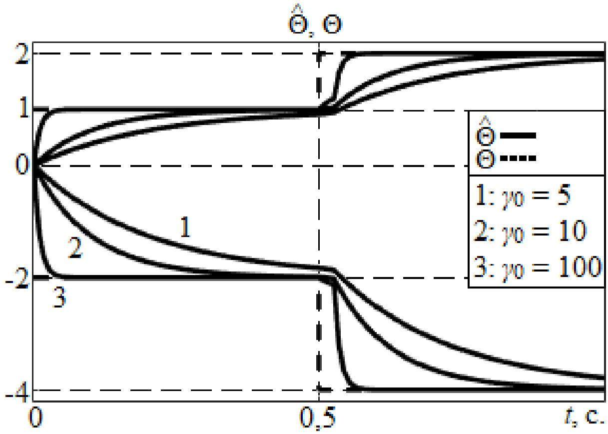

Рис. 7. Оценки $\hat{\Theta}$, полученные при различных γ_0

Результаты данного эксперимента подтверждают отмеченную в свойствах и теореме возможность регулирования с помощью γ_0 предельной ошибки идентификации неизвестных параметров.

Таким образом, все полученные в работе теоретические результаты получили подтверждение в рамках численных экспериментов, а закон идентификации (23) действительно может быть использован для повышения качества идентификации неизвестных кусочно-постоянных параметров при условии выполнения требования конечного возбуждения регрессора.

4.2. СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ ЗАКОНАМИ ОЦЕНКИ

Сравним разработанный закон оценки (23) с классическим градиентным законом оценки:

(47) $\dot{\hat{\Theta}}_{GD} = -\Gamma\varphi\left(\hat{\Theta}^{\mathrm{T}}\varphi - y\right)^{\mathrm{T}}$, $\Gamma = 10^3\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{bmatrix}$,

где Г – матрица коэффициентов усиления.

Переходные процессы по оценкам (47) представлены на рис. 8.

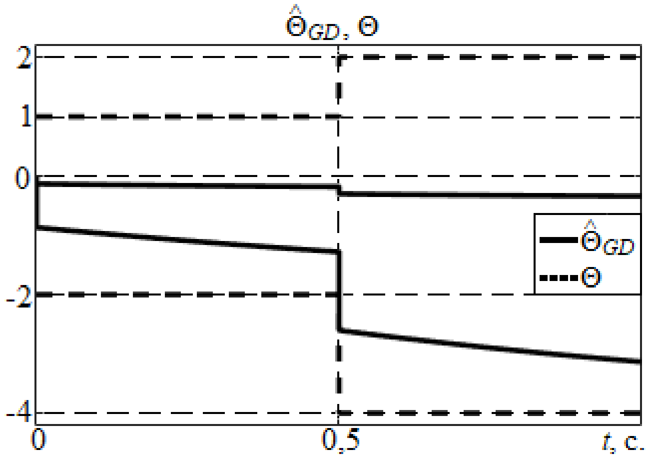

Рис. 8. Сравнение параметров Θ *и их оценок* $\hat{\Theta}_{GD}$

Сравнение рис. 4 и рис. 8 показывает, что разработанный контур оценки (23) по сравнению со стандартным градиентным законом идентификации обеспечивает интервальную экспоненциальную ограниченность ошибок оценки и в целом более высокое качество оценки неизвестных параметров.

Также сравним эффективность предложенной фильтрации (6) по сравнению с известной фильтрацией Крейссельмейера:

$$y_f(t) = \varphi_f(t)\Theta + d,$$

(48) $$\dot{y}_f(t) = -ly_f(t) + \varphi(t)y^{\mathrm{T}}(t),\ y_f(0) = 0,$$

$$\dot{\varphi}_f(t) = -l\varphi_f(t) + \varphi(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t),\ \varphi_f(0) = 0,$$

где d – возмущение, вызванное, по аналогии с d_1 и d_2, нарушением принципа линейности в первом уравнении фильтра при изменении параметров регрессии (1).

Осуществим (17) скаляризацию уравнений регрессии (48) и применим закон идентификации (23) при различных значениях параметра l и значениях параметров γ_0, κ, совпадающих с приведенными в (46).

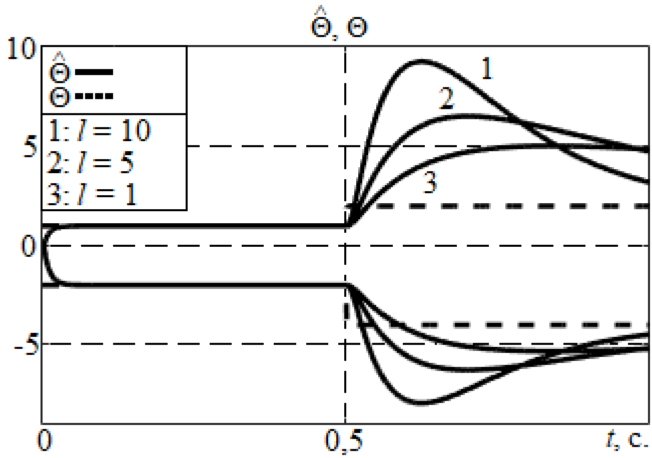

Рис. 9. Оценки $\hat{\Theta}$, полученные при различных l

Сравнение результатов эксперимента с результатами, представленными на рис. 5 и рис. 6, демонстрируют преимущества предложенного интегрального фильтра с экспоненциальным списыванием и сбросом (6) по сравнению с фильтром Крейссельмейера (48) в задаче идентификации кусочно-постоянных параметров. Предложенная фильтрация со сбросом (6), в отличие от фильтрации Крейссельмейера, позволяет устранить негативное влияние скачкообразного изменения параметров на качество формируемых оценок не асимптотически, а за конечное время, определяемое длиной интервала фильтрации T. В целом, варьирование двух параметров β и T фильтра (6) представляет более широкие возможности для улучшения качества оценок кусочно-постоянных параметров.

5. Заключение

В работе предложена процедура обработки линейного регрессионного уравнения, позволяющая построить закон оценки при выполнении условия конечного возбуждения регрессора, который гарантирует на интервале конечного возбуждения ограниченность регулируемым значением ошибки идентификации кусочно-постоянных неизвестных параметров.

Предложенная процедура может быть применена для построения адаптивных систем управления различными объектами с кусочно-постоянными неизвестными параметрами. Для этого необходимо известными методами свести задачу адаптивного управления к задаче оценки параметров регрессии (1).

Литература

1. ГЛУЩЕНКО А.И., ПЕТРОВ В.А., ЛАСТОЧКИН К.А. *Проблема применения процедуры DREM в задаче идентификации интервально заданных параметров* // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2021.– Т. 21. – №4. – С. 449–456.
2. ARANOVSKIY S., BOBTSOV A., ORTEGA R., PYRKIN A. *Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2016. – Vol. 62, No. 7. – P. 3546–3550.
3. CHOWDHARY G., MUHLEGG M., JOHNSON E. *Exponential parameter and tracking error convergence guarantees for adaptive controllers without persistency of excitation* // Int. Journal of Control. – 2014. – Vol. 87, No. 8. – P. 1583–1603.
4. ELZEBDA J., NAYFEH A., MOOK D. *Development of an Analytical Model of Wing Rock for Slender Delta Wings* // Journal of Aircraft. – 1989. – Vol. 26, No. 8. – P. 737–743.
5. GLUSHCHENKO A.I., PETROV V.A., LASTOCHKIN K.A. *I-DREM: relaxing the square integrability condition* // *Automation and Remote Control*. – 2021. – Vol. 82, No. 7. – P. 1233–1247.

6. KERSTING S. *Adaptive Identification and Control of Uncertain Systems with Switching*: dis. – University Munchen, 2018. – P. 1–224.
7. KREISSELMEIER G. *Adaptive observers with exponential rate of convergence* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1977. – Vol. 22, No. 1. – P. 2–8.
8. LIBERZON D. *Switching in systems and control*. – Springer Science & Business Media, 2003. – 248 p.
9. LION P.M. *Rapid identification of linear and nonlinear systems* // AIAA Journal. – 1967. – Vol. 5, No. 10. – P. 1835–1842.
10. LJUNG L. *System identification: theory for user*. – New Jersey: Prentice Hall, 1987. – 315 p.
11. NARENDRA K.S., ANNASWAMY A.M. *Stable adaptive systems*. – Courier Corporation, 2012. – 509 p.
12. ORTEGA R., NIKIFOROV V., GERASIMOV D. *On modified parameter estimators for identification and adaptive control: a unified framework and some new schemes* // IFAC Annual Reviews in Control. – 2020. – Vol. 50. – P. 278–293.
13. RAGAZZON M.R.P., GRAVDAHL J.T., PETTERSEN K.Y. *Exponential convergence bounds in least squares estimation: Identification of viscoelastic properties in atomic force microscopy* // IEEE Conf. on Control Technology and Applications. – 2017. – P. 687–694.

PROCEDURE OF IDENTIFICATION OF PIECEWISE-CONSTANT UNKNOWN PARAMETERS WITH IMPROVED CONVERGENCE

Anton Glushchenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, D.Sc., leading research scientist (aiglush@ipu.ru).

Konstantin Lastochkin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, engineer (lastconst@ipu.ru).

Vladislav Petrov, Stary Oskol Technological Institute n.a. A.A. Ugarov (branch) NUST “MISIS”, Stary Oskol, Cand.Sc., assistant professor (petrov.va@misis.ru).

Abstract: The research is aimed at improvement of the solution quality of the unknown piecewise-constant parameters identification problem for the classical linear regression equation. To solve this problem, a new procedure to process such equation, which is based on the known method of integral dynamic extension and mixing (I-DREM) but with the interval-based integral filter with exponential forgetting and resetting, is proposed. As proved in the paper, when the I-DREM procedure is applied, the proposed filter, unlike known from the literature, allows one to generate the regression equation with a scalar regressor and adjustable level of disturbance, which is caused by the step-like change of the unknown parameters. The main result of the study is a procedure to process a linear regression equation with a vector regressor, which allows one to derive an adaptation law. If the condition of the regressor finite excitation is met, then such a law guarantees that the identification error of the piecewise-constant parameters is bounded by an adjustable value. All of the aforementioned properties are proved analytically and/or demonstrated via the numerical experiments.

Keywords: piecewise-constant parameters, identification, finite excitation, interval-based filtration, convergence.

УДК 681.5.015
ББК 32.965.09
DOI: 10.25728/ubs.2022.95.1

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.И. Зоркальцевым.

Поступила в редакцию 13.11.2021.
Опубликована 31.01.2022.