МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Лайко А. Э.[1]
(*ФГАОУ ВО Волгоградский государственный университет, Волгоград*)

Исследованы задачи поиска оптимального управления в расширенных теоретико-игровых моделях «Центр – Агенты» и «Центр – менеджер – Агенты», заключающиеся в анализе качества управления при увеличении числа элементов, оценке предельной нагрузки на субъект управления, выявлении необходимости добавления промежуточного звена и определении выгоды его наличия для органа управления верхнего уровня. Введено понятие критерия эффективности управления и зафиксированы его изменения в рамках увеличения элементного состава организационной структуры. С целью определения целесообразности введения промежуточного управляющего субъекта рассмотрены конкретные примеры обобщенных математических моделей организационных систем, представлены их численные решения, найдены зависимости оптимальных параметров управления от числа работников организации.

Ключевые слова: организационная система, управление, оптимизация структуры.

1. Введение

В моделях управления организационной системы (далее ОС), представленных в работах [6, 15], менее подробно рассматривается зависимость эффективности управления от затрат субъекта управления. Эффективность управления считается максимальной, а предметом исследования является структура управленческой иерархии, минимизирующая ее затраты.

В настоящей работе приведены конкретные задачи, в рамках которых выявлено снижение эффективности управления со стороны высшего управляющего органа в связи с появлением децентрализации.

Переход ОС на новую стадию развития предполагает увеличение числа элементов ее структуры [13]. Однако при количественном росте числа сотрудников раннее выбранная структура становится неоптимальной и влечет за собой снижение эффек-

[1] *Анна Эдуардовна Лайко, студент бакалавриата* (*pmib-181_751387@volsu.ru*).

тивности организации и наступление кризиса её развития [1]. Исследование процессов развития ОС средствами математического моделирования является актуальной задачей [3, 5, 7, 11, 18].

В настоящей работе рассмотрены задачи поиска оптимального управления в расширении теоретико-игровых моделей «Центр – Агенты» и «Центр – менеджер – Агенты», состоящего во введении зависимости результата действия агентов от величины и эффективности управления, зависящей, в свою очередь, от нагрузки на субъект управления.

Основным аппаратом моделирования выступает теория игр, демонстрирующая взаимодействие между Центром и Агентом [8, 9, 10, 21]. Также в рамках игровой модели вводится механизм стимулирования [7, 12, 17, 19], задающий зависимость размера вознаграждения агента, получаемого от центра, от выбранных им действий. Множество допустимых вознаграждений ограничивается тарифно-квалификационными требованиями к оплате труда.

Целью исследования является обоснование необходимости внедрения промежуточного управляющего субъекта, деятельность которого направлена на повышение эффективности управление центра, в рамках перестроения иерархической структуры управления в условиях роста числа ее работников [4, 2, 13, 16, 20].

2. *Модель организационной системы*

Рассмотрим следующее расширение двухуровневой модели ОС «Центр – Агенты» [6, 7, 15]. Доход Центра: $H(z) = \lambda z$, где z – продукт ОС, λ – цена единицы продукта. Результат деятельности ОС, состоящей из n агентов, является функцией их действий y_i: $z = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \beta_i$, где $0 \le \beta_i \le 1$ – функциональный параметр, отражающий результативность управления i-м агентом, $\beta_i = \beta_i(w)$. Далее будем считать агентов одинаковыми, тогда $y_i = y_j = y$, $\beta_i = \beta_j = \beta$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \ne j$. В результате получим: $z = \sum_{i=1}^{n} z_i = n\tilde{z}$, $\tilde{z} = \beta \cdot y$.

Целевые функции участников (Центра и агента) представляют собой следующее: для агента это разность между стимулированием и затратами $f_i(y) = \sigma_i(y) - c_i(y)$, а для центра – разность между доходом и затратами центра на стимулирование, выплачиваемое агентам:

$$F(z) = H(z) - \sum_i \sigma_i(y).$$

Функцию затрат агента $c(y)$ будем считать известной.

Механизмом стимулирования будем называть правило принятия Центром решений по стимулированию агентов. Механизм стимулирования включает в себя систему стимулирования, которая полностью определяется функцией стимулирования [6, 12, 19]. Она в свою очередь определяется центром и является вознаграждением за действие агента.

Множество допустимых вознаграждений может быть ограничено как экзогенно, например, на законодательном уровне (минимальный размер оплаты труда), так и эндогенно, т.е. выбором другой системы оплаты труда.

Наиболее эффективной для Центра считается компенсаторная система оплаты при благожелательности агента, т.е. при наличии нескольких оптимальных стратегий агент выберет ту, которая даст максимальную прибыль центру, и тогда его прибыль будет равна 0, а прибыль центра максимальна. Существуют и другие системы оплаты труда: скачкообразные, пропорциональные, основанные на перераспределении дохода и их всевозможные комбинации [6, 12, 17, 19].

Пусть w – действие Центра по управлению каждым из агентов, a – коэффициент, характеризующий технологию управления. С учетом содержательного смысла функции $\beta(w, a)$ сформулируем ее свойства: $\beta(w, a)$ – монотонно возрастающая функция; $\beta(0, a) = 0$, $\lim_{w\to\infty} \beta(w, a) = 1$. Далее будем считать, что

$$\beta(w, a) = \frac{aw}{1 + aw}.$$

Будем предполагать, что функция затрат Центра на управление имеет вид $s(w) = \phi(w) = W\alpha$, $W = wn$, α – показатель нестабильности внешней среды ($0 \le \alpha \le 1$– среда стабильна, $\alpha > 0$– нестабильна). Далее везде в расчетах считаем, что $a = 1$ и $\alpha = 1$. Исследование зависимости оптимальной иерархии управления от этих параметров проведено в работе [6].

Будем считать, что в ОС существует нормативное значение $\beta_{\text{норм}} \in [0, 1]$ (например, $\beta_{\text{норм}} = 0{,}8$). В силу свойств $\beta(w, a)$ существует обратная функция $w_{\text{норм}}(a, \beta_{\text{норм}})$. Тогда $W_{\text{норм}} = nw_{\text{норм}}$ – совокупные нормативные затраты на управление агентами. При $\beta_{\text{норм}} = 0{,}8$ получим $w_{\text{норм}} = \dfrac{\beta_{\text{норм}}}{1-\beta_{\text{норм}}} = 4$.

Будем предполагать, что существуют предельные затраты Центра на управление $S_{\text{пред}} = W^{\alpha}_{\text{пред}}$, $W_{\text{пред}} = w\tilde{n}$ ($\tilde{n}$ – предельное число подчиненных). До достижения этой величины качество управления не падает.

Тогда падение эффективности управления после превышения предельной нагрузки описывается формулой

$$\beta(W_{\text{пред}}, n) = \frac{aW_{\text{пред}}/n}{1 + aW_{\text{пред}}/n}, \quad n \ge \tilde{n}.$$

В силу неравенства $W_{\text{норм}} \le W_{\text{пред}}$ Центр вынужден нанимать менеджеров. На рис. 1 представлены зависимости управления агентами W и эффективности управления β от численности агентов соответственно.

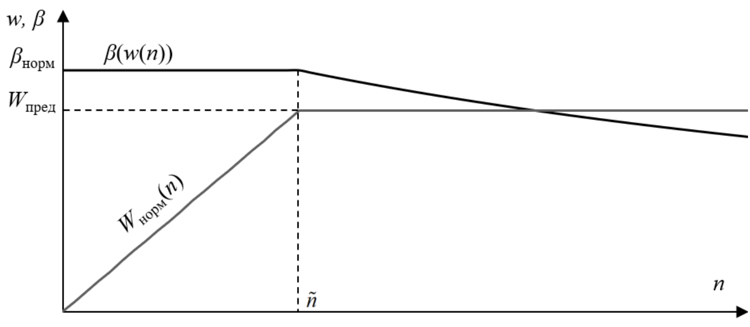

Рис. 1. График зависимости эффективности управления от числа агентов

С целью приближения данной модели к реальности введем в нее механизм стимулирования. Основным аппаратом моделирования задачи стимулирования в теории управления является теория игр.

Механизмом стимулирования называется правило принятия центром решений относительно стимулирования агента [6, 12].

Далее стимулирование будет происходить по компенсаторной системе, т.е. $f_{ia} = \sigma_a(z_i) - c(z_i)$, где $\sigma_a = \begin{cases} c(z) + \delta, y = x, \\ 0, \ y \neq x; \end{cases}$

y – количество продукции, произведенной агентом, x – установленное центром количество производимого товара, $c(z)$ – личные затраты агента. Далее считаем личные затраты агента квадратичными относительно произведенного товара.

3. Примеры

3.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ЦЕНТРА ОТ УПРАВЛЕНИЯ АГЕНТАМИ

Исследуем влияние управления агентами на целевую функцию Центра. И найдем оптимальное управления агентами при компенсаторной системе стимулирования [2, 15, 17,]. Задача (1) имеет следующий вид:

$$F(\sigma, z) = H(z) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(z) - C(n) =$$

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda n y \dfrac{\omega_{\text{норм}}}{1 + \omega_{\text{норм}}} - n \dfrac{y^2}{2r_a} - (C_0 + Kn) \underset{y}{\to} \max, \ n \leq \tilde{n}, \\ \lambda n y \dfrac{\dfrac{W_{\text{пред}}}{n}}{1 + \dfrac{W_{\text{пред}}}{n}} - n \dfrac{y^2}{2r_a} - (C_0 + Kn) \underset{y}{\to} \max, \ n \geq \tilde{n}. \end{cases}$$

Для наглядности сгруппируем слагаемые и покажем, что это квадратное уравнение относительно управления агентами (y).

$$(2)\quad \begin{cases} -n\dfrac{y^2}{2r_a}+\lambda ny\dfrac{\omega_{\text{норм}}}{1+\omega_{\text{норм}}}-(C_0+Kn)\underset{y}{\rightarrow}\max,\ n\le\tilde{n}, \\ -n\dfrac{y^2}{2r_a}+\lambda ny\dfrac{\dfrac{W_{\text{пред}}}{n}}{1+\dfrac{W_{\text{пред}}}{n}}-(C_0+Kn)\underset{y}{\rightarrow}\max,\ n\ge\tilde{n}. \end{cases}$$

Чтобы не прибегать к дифференцированию данной системы, можно просто воспользоваться формулой для нахождения вершины параболы, тогда получим следующе:

$$(3)\quad y^*=\begin{cases} \dfrac{\lambda n\dfrac{\omega_{\text{норм}}}{1+\omega_{\text{норм}}}}{2\dfrac{n}{2r_a}}, & n\le\tilde{n} \\ \dfrac{\lambda n\dfrac{\dfrac{W_{\text{пред}}}{n}}{1+\dfrac{W_{\text{пред}}}{n}}}{2\dfrac{n}{2r_a}}, & n\ge\tilde{n} \end{cases}$$

После приведения подобных слагаемых получим

$$(4)\quad y^*=\begin{cases} \dfrac{\lambda\omega_{\text{норм}}r_a}{1+\omega_{\text{норм}}}, & n\le\tilde{n} \\ \dfrac{\lambda W_{\text{пред}}r_a}{W_{\text{пред}}+n}, & n\ge\tilde{n} \end{cases}$$

Стоит уточнить, что можно воспользоваться соотношением $W_{\text{пред}}=nw_{\text{норм}}$, которое вытекает из непрерывности кусочно-заданной функции в точке разрыва, и еще упросить данную систему.

На рис. 2 представлена зависимость оптимального управления агентами от их числа и показано, что при докритическом числе сотрудников, оптимальное управление ими не зависит от их численности. При превышении критического числа оптимальное управление обратно пропорционально их численности, т.е. убывает по гиперболе.

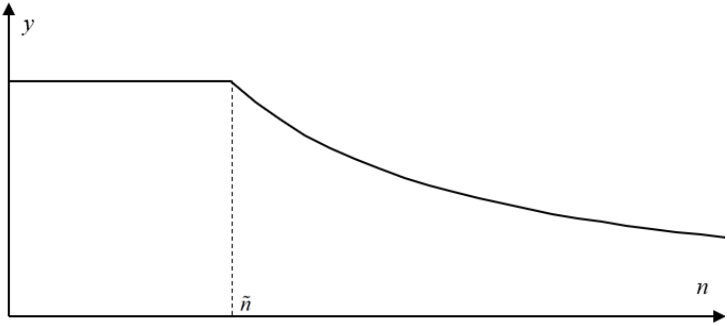

Рис. 2. Зависимость оптимального управления агентами от их числа

После подстановки оптимального управления в целевую функцию и группировки слагаемых получим следующее

$$(5)\quad F^* = \begin{cases} n\left(\dfrac{\lambda^2\omega^2_{\text{норм}} r_a}{2(1+\omega^2_{\text{норм}})} - K\right) - C_0, & n \le \tilde{n}, \\ n\left(\dfrac{\lambda^2 W^2_{\text{пред}} r_a}{2(n+W_{\text{пред}})^2} - K\right) - C_0, & n \ge \tilde{n}. \end{cases}$$

На рис. 3 показано, что при компенсаторной системе оплаты труда прибыль центра будет симметрична относительна управления агентами. То есть отклонение в любую сторону будет одинаково снижать прибыль.

Вывод: в результате решения были получены стратегии управления при допредельном количестве агентов и превышающем предельное число.

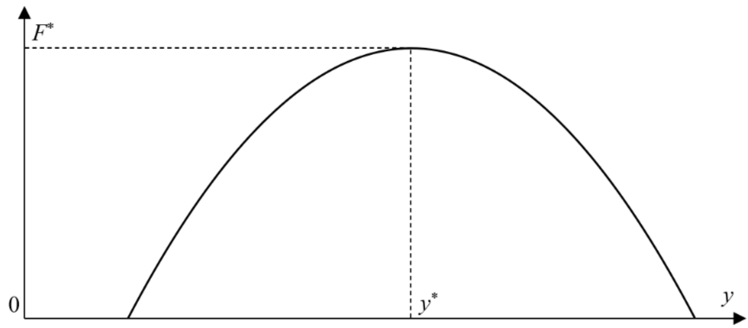

Рис. 3. Зависимость прибыли центра от управления агентами.

3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ЦЕНТРА ОТ ЧИСЛА АГЕНТОВ

Теперь найдем оптимальное число агентов при оптимальном управлении. Для этого подставим в целевую функцию управление, найденное ранее, и решим задачу (6):

$$(6)\quad F=\begin{cases} n\left(\dfrac{\lambda^2\omega_{\text{норм}}^2 r_a}{2(1+\omega_{\text{норм}}^2)}-K\right)-C_0 \underset{n}{\to}\max,\ n\le\tilde{n},\\ n\left(\dfrac{\lambda^2W_{\text{пред}}^2 r_a}{2(n+W_{\text{пред}})^2}-K\right)-C_0 \underset{n}{\to}\max,\ n\ge\tilde{n}.\end{cases}$$

Случай допредельного количества агентов не интересен ввиду его линейности относительно числа агентов. Оптимальным числом для него будет 0 или предельное число агентов. Будем рассматривать случай превышения нормативной нагрузки на центр.

$$(7)\quad F_2=n\left(\dfrac{\lambda^2W_{\text{пред}}^2 r_a}{2(n+W_{\text{пред}})^2}-K\right)-C_0 \underset{n}{\to}\max,\ n\ge\tilde{n}.$$

Для нахождения максимума найдем нули производной целевой функции центра. Для этого необходимо будет решить следующую задачу.

$$(8)\quad \lambda^2W_{\text{пред}}^2 r_a(n+W_{\text{пред}})-K(2(n+W_{\text{пред}})^3)-2n(\lambda^2W_{\text{пред}}^2 r_a)=0.$$

В результате получаем кубическое уравнение (8). В условии реалистичности модели (все параметры положительны) у данного уравнения будет только один вещественный корень, так как кубический дискриминант отрицателен. Поэтому возможны следующие варианты поведения целевой функции:

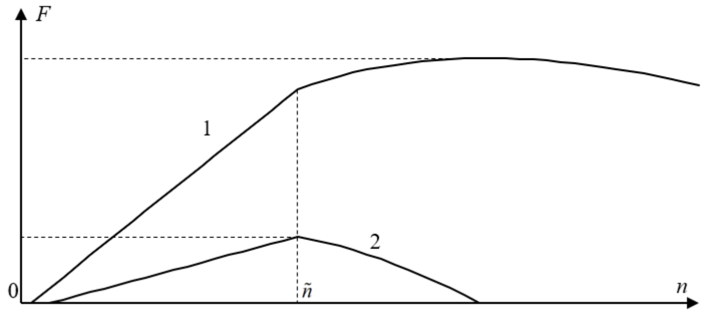

Рис. 4. Зависимость прибыли центра от количества агентов

На рис. 4 случай 1 соответствует тому, что корень кубического уравнения больше предельного числа сотрудников, т.е. для максимизации прибыли необходимо снизить качество продукции, путем увеличения числа сотрудников. Случай 2 соответствует тому, что корень уравнения меньше предельного числа, т.е. для максимизации прибыли необходимо иметь предельное число сотрудников и максимальное качество управления ими.

Вывод: таким образом, оптимальна двухуровневая структура организационной системы «Центр – Агенты» в рамках нашей модели имеет предельный размер.

3.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ЦЕНТРА В СИСТЕМЕ «ЦЕНТРЫ – МЕНЕДЖЕР – АГЕНТЫ» ОТ ДЕЙСТВИЙ МЕНЕДЖЕРА И АГЕНТОВ

Пусть Центр может определить квалификации менеджера и агентов, контролировать действие менеджера, а менеджер – контролировать действия агентов. В силу этого предположения

Центр назначает оптимальный объем работы для менеджера и для агентов. Получаем следующую задачу (8) оптимизации:

(9) $$F = \lambda n \frac{\omega}{1+\omega} y - n\frac{y^2}{2r_a} - \frac{\omega^2}{2r_m} - K(n+1) \to \max_{y,w}.$$

Для решения данной задачи найдем нули градиента:

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda n \dfrac{\omega}{1+\omega} - n\dfrac{y}{r_a} \\ \dfrac{\lambda n y}{(1+\omega)^2} - \dfrac{\omega}{r_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение данной системы уравнение будет иметь следующий вид:

(10) $$y^* = \lambda \frac{\sqrt[3]{r_a \lambda^2 r_m n} - 1}{\sqrt[3]{r_a \lambda^2 r_m n}} r_a,$$

(11) $$\omega^* = \sqrt[3]{r_a \lambda^2 r_m n} - 1.$$

Подставим решение (9), (10) в целевую функцию центра (8) и получим значения максимальной прибыли центра (11):

(12) $$F^*(y^*, \omega^*) = (\sqrt[3]{r_a \lambda^2 r_m n} - 1)^2 \left(\frac{\lambda^2 n r_a}{2\left(\sqrt[3]{r_a \lambda^2 r_m n}\right)^2} - \frac{1}{2r_m} \right) - K(n+1).$$

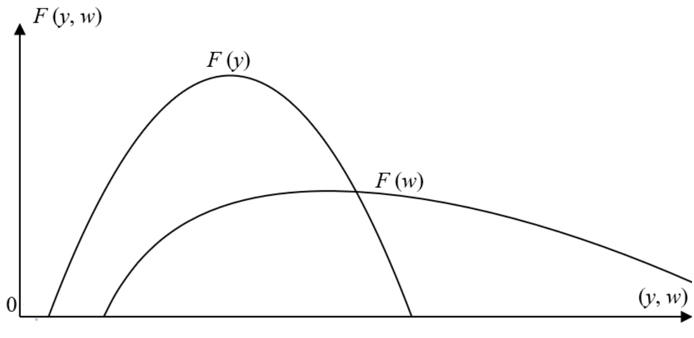

Рис. 5. Зависимость целевой функции от управления персоналом

На рис. 5 представлено поведение целевой функции (8) от управления каждым из параметров в отдельности. Видно, что зависимость от управления агентами аналогична рис. 3. А вот управление менеджером имеет несимметричный вид и позволяет регулировать качество работы агентов и их число.

Некоторые численные решения задачи (8) приведены в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость прибыли от управления агентами и менеджером

№	λ	K	r_a	r_m	n	y^*	w^*	F^*
1	10	10	1	1	**25**	**9,26**	**12,57**	**733,56**
2	10	20	1	1	**15**	**9,13**	**10,45**	**250,12**
3	10	20	2	1	**25**	**18,83**	**16,10**	**1566,55**
4	10	20	2	2	**25**	**19,07**	**20,54**	**1647,79**
5	20	50	2	2	**22**	**38,78**	**31,78**	**7443,78**

На рис. 6 представлена зависимость прибыли центра от управления персоналом (агенты и менеджер).

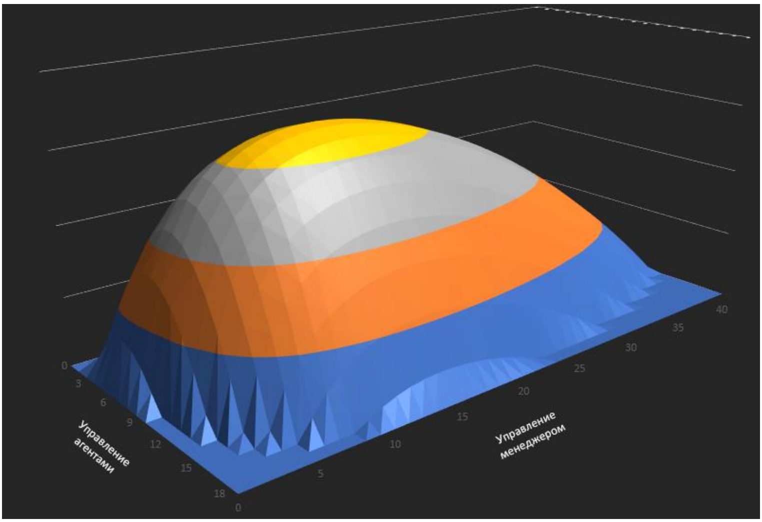

Рис. 6. Поведение целевой функции центра от управления агентами и менеджером

Видно, что есть четкая зона максимальной прибыли (желтый цвет). Вне данной зоны можно заметить быстрый спад от неоптимального управления агентами или недостаточным управлением менеджером и плавный спад при излишнем управлении менеджером. Также стоит заметить, что при определенных конфигурациях, когда управления недостаточно или оно избыточно, работа производства вовсе нецелесообразна из-за отсутствия всякой прибыли.

Вывод: в результате исследования трехуровневой ОС, добавление менеджеров не увеличивает прибыль напрямую. Однако позволяет снизить нагрузку центра и, как следствие, увеличить предельное число сотрудников.

4. *Заключение*

Введение в данную модель информационной неопределенности на организационное перестроение, снижение информационной неопределенности, модели изменяющейся внешней среды, а также использование результатов оптимизации более сложных моделей стимулирования и организационных иерархий [2, 4] позволит построить оптимальные траектории развития ОС, а также построить математические модели описанных в [1] кризисов их развития.

Литература

1. АДИЗЕС И. *Управление жизненным циклом корпорации*. – М.: Питер 2007.
2. БУРКОВ В.Н., ЛАНДА Б.Д., ЛОВЕЦКИЙ С.Е., ТЕЙМАН А.И., ЧЕРНЫШЕВ В.Н. *Сетевые модели и задачи управления*. – М.: Советское радио, 1967.
3. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*. –М.: НАУКА, 1977.
4. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем*. – М.: Наука, 1981.
5. БУРКОВ В.Н., НОВИКОВ Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М.: СИНТЕГ, 1999.

6. ВОРОНИН А.А., ГУБКО М.В., МИШИН С.П., НОВИКОВ Д.А. *Математические модели организации: Учебное пособие*. – М.: Наука, 1976.
7. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Оптимальные иерархические структуры*. – М.: ИПУ РАН, 2003.
8. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Введение в теорию исследование операций*. – М.: Наука, 1971.
9. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. – М.: Наука, 1976.
10. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлнии организационными системами*. – М.: Синтег, 2002.
11. ГУБКО М.В. *Математические модели оптимизации иерархически структур*. – М.: ЛЕНАНД, 2006.
12. КОЧИЕВА Т.Б., НОВИКОВ Д.А. *Базовые системы стимулирования*. – М.: ИПУ РАН, 2000.
13. МИНЦБЕРГ Г. *Структура в кулаке: создание эффективной организации* / Пер. с англ под ред. Ю.Н. КАПУТУРЕВСКОГО. – СПБ.:Питер,2004.
14. МИШИН С.П. *Оптимальные иерархии управления в экономических системах*. – М.: ПМСОФТ, 2004.
15. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.:МПСИ, 2005.
16. НОВИКОВ Д.А. *Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления»*, 1999.
17. НОВИКОВ Д.А. *Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах*. – М.: ИПУ РАН, 1998.
18. НОВИКОВ Д.А. *Управление проектами: организационные механизмы (вводный курс)*. – М.: ПМСОФТ, 2007.
19. НОВИКОВ Д.А., ЦВЕТКОВ А.В. *Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах*. – М.: Апостроф, 2000
20. ОВСИЕВИЧ Б.И. *Модели формирования организационных структур*. – Л.: Наука, 1979.
21. ОРЛОВСКИЙ С.А. *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации*. – М.: Наука, 1981.

MODEL OF STRUCTURE OPTIMIZATION DEVELOPING ORGANIZATIONAL SYSTEM

Anna Layko, Volgograd State University, Volgograd, bachelor student (pmib-181_751387@volsu.ru).

Abstract: The problems of finding optimal control in the extended game-theoretic models "Center-Agents" and "Center-Manager-Agents" are investigated, which consist in analyzing the quality of control with an increase in the number of elements, assessing the maximum load on the subject of control, identifying the need to add an intermediate link and determining the benefits its availability for the top-level The concept of a criterion for the effectiveness of management has been introduced and its changes have been recorded in connection with an increase in the elemental composition of the organizational structure. In order to determine the feasibility of introducing an intermediate managing subject, specific examples of generalized mathematical models of organizational systems are considered, their numerical solutions are presented, the dependences of the optimal control parameters on the number of employees of the organization are found.

Keywords: organizational system, management, structure optimization.

УДК 519
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2022.95.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.

Поступила в редакцию 14.11.2021.
Опубликована 31.01.2022.