

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕСТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ¹

Спиряев В. А.², Солодуша С. В.³
(ФГБУН Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск)

Рассмотрена проблема идентификации скалярного входного сигнала управляемого динамического объекта, описанного с помощью интегральной модели в виде полинома Вольтерра. Выделены специальные классы полиномиальных интегральных уравнений, ядра Вольтерра которых гарантируют выполнение неулучшаемых оценок решений нелинейных неравенств. Наряду с теоретическими утверждениями приведены результаты вычислительного эксперимента в задаче моделирования динамики теплоэнергетического объекта.

Ключевые слова: непараметрическая идентификация, нелинейные динамические системы, полиномиальные уравнения Вольтерра I рода.

1. Введение

Энергетические установки, как правило, относятся к сложным техническим системам. Исследование динамики их функционирования основывается в основном на формализации физической природы объекта, выполнении натурных экспериментов или на применении имитационных моделей [4]. Традиционно методология управления режимами объектов энергетики учитывает принципы иерархического моделирования, нижний уровень которого содержит автоматизированные системы управления.

Данная работа посвящена полиномиальным уравнениям

¹ Работа выполнена в рамках проекта государственного задания (№ FWEU-2021-0006) программы фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг. с использованием ресурсов ЦКП «Высокотемпературный контур» (Минобрнаука России, проект №13.ЦКП.21.0038).

² Вадим Александрович Спиряев, ст. инж.-исследователь (eldin@mail.ru).

³ Светлана Витальевна Солодуша, д.т.н., доцент, зав. лаб. (solodusha@isem.irk.ru).

Вольтерра I рода

$$(1) \quad y(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [0, T],$$

возникающим в задаче поиска входных сигналов $x(t)$ нелинейных динамических систем типа «вход–выход» по заданным выходу $y(t)$ и переходным характеристикам $K_n(t, s_1, \dots, s_n)$ (ядрам Вольтерра, симметричным по переменным s_1, \dots, s_n). Данная задача деконволюции, сформулированная в виде (1) при $N = 1$ с ядром типа свертки, рассматривалась в монографии [3] при синтезе линейной системы автоматического управления энергетическими объектами. Аппарат интегро-степенных рядов Вольтерра [2] хорошо известен в теории автоматического управления [10, 12] и применяется для построения систем управления для объектов со слабо выраженной нелинейностью (например, полиномиальной) [5, 6, 14]. Несмотря на свою перспективность, применение (1) при $N > 1$ на практике пока ограничено. Анализ научно-технической литературы (см. библиографию в [15]) показал, что данной ситуации способствуют вводимые исследователями упрощения, в частности, искусственная линеаризация (1), что приводит к потере симметричности ядер Вольтерра [13] и, как следствие, к нарушению их физической интерпретации. Таким образом, специфика полиномиальных уравнений (1) при $N > 1$, связанных с задачей нахождения входных сигналов, является принципиально важной для эффективного применения на практике теории рядов Вольтерра. Цель данной статьи – рассмотреть принципиальный вопрос о применимости (1), который состоит в оценивании величины T (правого конца отрезка $[0, T]$) при моделировании нелинейной динамики.

2. Методология исследования (1) при $N > 1$

Методология исследования непрерывного решения (1), где $(K_1(t, s))'_t \in C_\Delta$, $\Delta = \{t, s : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, $K_1(t, t) \neq 0$, $y'(t) \in C_{[0, T]}$, $y(0) = 0$, а $K_n(t, s_1, \dots, s_n)$ для $n > 1$ непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференци-

руемы по t , базируются на мажорантных оценках специальных нелинейных интегральных неравенств

$$(2) \quad |x(t)| \leq F + \sum_{i=1}^N L_i \left(\int_0^t |x(s)| ds \right)^i + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} i M_i |x(t)| \left(\int_0^t |x(s)| ds \right)^i, \quad t \in [0, T],$$

где

$$(3) \quad F = \max_{t \in [0, T]} |y'(t)|,$$

$$(4) \quad L_i = \max_{0 \leq s_1, \dots, s_i \leq t \leq T} |(K_i(t, s_1, \dots, s_i))'_t| \geq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

$$(5) \quad M_i = \max_{0 \leq s_2, \dots, s_i \leq t \leq T} |K_i(t, t, s_2, \dots, s_i)| > 0, \quad i = \overline{2, N}.$$

Неравенство (2) играет для (1) при заданном $N > 1$ ту же роль, что и неравенство Гронуола–Беллмана для линейного уравнения Вольтерра I рода. Отметим, что (1) имеет точное решение лишь в частных случаях [1]. Кроме того, реализация этапа восстановления входных сигналов, обеспечивающих отклик реальной динамической системы, существенно опирается на верхние точные оценки правой границы T области существования решения (1) [8]. Поэтому в [9] для (1) введено при $N = 2$ специальное тестовое интегральное уравнение Вольтерра I рода, ядра Вольтерра

$$(6) \quad K_1(t, s_1) = k - L_1(t - s_1),$$

$$(7) \quad K_2(t, s_1, s_2) = \prod_{i=1}^2 \left(\sqrt{M_2} - \frac{L_2}{2\sqrt{M_2}}(t - s_i) \right)$$

в котором дополнительно к

$$\min_{t \in [0, T]} |K_1(t, t)| = k > 0$$

удовлетворяют заданным условиям (4), (5) для $i = 1, 2$ при $T < \frac{2M_2}{L_2}$. Конструктивный алгоритм построения многомерных функций, мажорирующих импульсно-переходные функции динамического объекта, может быть развит на случай $N > 2$.

3. Основной результат

Теорема 1. Пусть $M_3 > 0$, $L_3 \geq 0$, тогда для того, чтобы ядро Вольтерры $K_3(t, s_1, s_2, s_3)$ имело вид

$$(8) \quad K_3(t, s_1, s_2, s_3) = \prod_{i=1}^3 \left(\sqrt[3]{M_3} - \frac{L_3}{3M_3^{\frac{2}{3}}}(t - s_i) \right)$$

при $0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T$, $T < \frac{3M_3}{L_3}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(9) \quad M_3 = \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T} |K_3(t, t, s_1, s_2)|,$$

$$(10) \quad L_3 = \max_{0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T} |(K_3(t, s_1, s_2, s_3))'_t|.$$

Доказательство.

Достаточность. Пусть

$$(11) \quad K_3(t, s_1, s_2, s_3) = \prod_{i=1}^3 (k - L(t - s_i)), k > 0, L \geq 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} K_3(t, s_1, s_2, s_3) |_{s_1=t} &= K_3(t, t, s_2, s_3) = \\ &= k(k - L(t - s_2))(k - L(t - s_3)), \end{aligned}$$

В силу (9) и (11)

$$(12) \quad \begin{aligned} M_3 &= k \max_{0 \leq s_2, s_3 \leq t \leq T} |(k - L(t - s_2))(k - L(t - s_3))| = \\ &= k \max_{0 \leq s_2 \leq t \leq T} |(k - L(t - s_2))| \max_{0 \leq s_3 \leq t \leq T} |(k - L(t - s_3))|, \end{aligned}$$

откуда при $t - s_2 = 0$, $t - s_3 = 0$, $T < \frac{k}{L}$ справедливо $M_3 = k^3$,

$$(13) \quad k = \sqrt[3]{M_3}.$$

Дифференцируя (11) по t , получаем

$$(14) \quad \begin{aligned} (K_3(t, s_1, s_2, s_3))'_t &= -L(k - L(t - s_2))(k - L(t - s_3)) - \\ &- L(k - L(t - s_1))(k - L(t - s_3)) - L(k - L(t - s_1))(k - L(t - s_2)), \end{aligned}$$

а в силу (10) с учетом (14), где $L \geq 0$, а также симметричности (в силу инвариантности) (11) по s_1, s_2 и s_3 имеем

$$(15) \quad L_3 = 3L \max_{0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T} |(k - L(t - s_1))(k - L(t - s_2))|.$$

Функция, входящая под знак максимума в (15), достигает своего наибольшего значения k^2 при $T < \frac{k}{L}$ и $t - s_i = 0, i = 1, 2$. Из (15) следует $L_3 = 3k^2L$, т.е.

$$L = \frac{L_3}{3M_3^{\frac{2}{3}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{k}{L} = \frac{3M_3}{L_3}.$$

Таким образом, при $T < \frac{3M_3}{L_3}$ ядро $K_3(t, s_1, s_2, s_3)$ имеет вид (8).

Необходимость. Пусть справедливо (8), тогда выполнение (9) с учетом (12) очевидно. При этом (10) также выполняется, так как

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq t \leq T < \frac{3M_3}{L_3}} |(K_3(t, s_1, s_2, s_3))'_t| = \\ & = \frac{L_3}{M_3^{\frac{2}{3}}} \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T < \frac{3M_3}{L_3}} \left| \prod_{i=1}^2 \left(\sqrt[3]{M_3} - \frac{L_3}{3M_3^{\frac{2}{3}}}(t - s_i) \right) \right|. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

По аналогии с предыдущими случаями можно выписать вид N -мерного ядра.

Теорема 2. Пусть $M_N > 0$ и $L_N \geq 0$, тогда для того, чтобы ядро Вольтерра $K_N(t, s_1, \dots, s_N)$ имело вид

$$(16) \quad K_N(t, s_1, \dots, s_N) = \prod_{i=1}^N \left(M_N^{\frac{1}{N}} - \frac{L_N}{NM_N^{\frac{N-1}{N}}}(t - s_i) \right)$$

при $0 \leq s_1, \dots, s_N \leq t \leq T, T < \frac{NM_N}{L_N}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} M_N &= \max_{0 \leq s_2, \dots, s_N \leq t \leq T} |K_N(t, t, s_2, \dots, s_N)|, \\ L_N &= \max_{0 \leq s_1, \dots, s_N \leq t \leq T} |(K_N(t, s_1, \dots, s_N))'_t|. \end{aligned}$$

Доказательство этого факта основано на результатах [9]. Таким образом, тестовое интегральное уравнение (1) содержит ядро $K_1(t, s_1)$ вида (6) и ядра $K_n(t, s_1, \dots, s_n)$ вида (16) для $n = 2, \bar{N}$ при $0 \leq s_1, \dots, s_n \leq t \leq T$, где $T < \min \left\{ \frac{2M_2}{L_2}, \dots, \frac{nM_n}{L_n} \right\}$.

4. Приложение

Перейдем далее к практическому применению полученных в предыдущем пункте результатов для описания нелинейной динамики. Существенную роль среди элементов энергетических установок играют теплообменные аппараты, динамика которых отличается высоким быстродействием.

Рассмотрим в качестве имитационной динамической системы математическую модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата. Следуя [11], воспользуемся математической моделью динамики энтальпии $\Delta i(t)$ теплоносителя на выходе теплообменника при изменении расхода воды $\Delta D(t)$:

$$(17) \quad \Delta i(t) = \frac{Q_0 \lambda_1 \lambda_2}{D_0 (\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t \Delta D(\eta) \left(e^{-\lambda_1 \frac{\int_0^t (D(s)) ds}{\eta}} - e^{-\lambda_2 \frac{\int_0^t (D(s)) ds}{\eta}} \right) d\eta, \quad t \in [0, T].$$

При этом в (17) D_0 (кг/с) и Q_0 (кВт) – начальные значения расхода и теплоподвода, а λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения некоторой системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, Δ – приращение, например, $D(t) = D_0 + \Delta D(t)$.

Числовые характеристики, входящие в (17), принимались соответствующими реальному теплофизическому процессу на высокотемпературном контуре ИСЭМ СО РАН, в частности, $D_0 = 0,16$ кг/с, $Q_0 = 100$ кВт, $i_0 = 434$ кДж/кг. Модель (17) важна с методической точки зрения для исследования динамики сложных теплоэнергетических объектов в конце переходного процесса, что отмечено в статье [15].

Пусть в предположении стационарности (неизменности по времени t) динамической системы ядра Вольтерра (1) при $N = 2$

$$(18) \quad \Delta i_{mod}(t) = \int_0^t K_1(t - s_1) \Delta D(s_1) ds_1 + \\ + \int_0^t \int_0^t K_2(t - s_1, t - s_2) \Delta D(s_1) \Delta D(s_2) ds_1 ds_2, \quad t \in [0, T],$$

описывающие динамику $\Delta i(t)$ в (17), уже идентифицированы, например, с помощью методики, изложенной в [7]. Модель (18) отображает динамические свойства управляемого объекта (17). Вычисление входных сигналов $\Delta D(t)$ в [7], обеспечивающих требуемый отклик системы $\Delta i_{mod}(t)$ при известных $K_1(t - s_1)$, $K_2(t - s_1, t - s_2)$, выполнялось в предположении, что численное решение полиномиального уравнения (18) существует на всем исследуемом промежутке $[0, T]$.

Применим тестовое интегральное уравнение

$$(19) \quad \int_0^t (4116,815 + 137,317s) \Delta D(t - s) ds + \left(\int_0^t (-1593,257 + 53,756s) \Delta D(t - s) ds \right)^2 = \Delta i(t)$$

для оценки величины T – верхней границы области существования $\Delta D(t)$ в классе $C_{[0,T]}$. В (19) подынтегральные функции указаны для конкретных значений k , L_1 , M_2 , L_2 , полученных с помощью сеточных аналогов ядер из (18), восстановленных с шагом $h = 0,25$ (с) при помощи тестовых сигналов

$$\Delta D_\omega(t) = 0,04(e(t) - e(t - \omega)), \quad 0 \leq \omega \leq t \leq T,$$

где $e(t)$ – функция Хевисайда, $t \in [0, 30]$. На рис. 1, 2 иллюстрируется специфика ядер Вольтерра из (19) в сравнении с соответствующими сеточными аналогами K_1^h , K_2^h из (18) для $s_1 \geq s_2$ (с учетом симметричности K_2).

Рассмотрим далее численное решение квадратичного интегрального уравнения (19), в котором $\Delta D(t)$ обеспечивает заранее заданный отклик $\Delta i(t) = 117 - 117t$, $t \in [0, 5]$. Выбор нужного корня при этом определяется условием [7]

$$\Delta D_1^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Delta D(0) = \frac{\Delta i'(0)}{K_1(0)}.$$

В таблице 1 приведены результаты численного решения (19) на равномерной сетке $t_i = ih$, $i = \overline{1, n}$, $nh = T$ методом правых прямоугольников. Здесь через I обозначена мнимая единица.

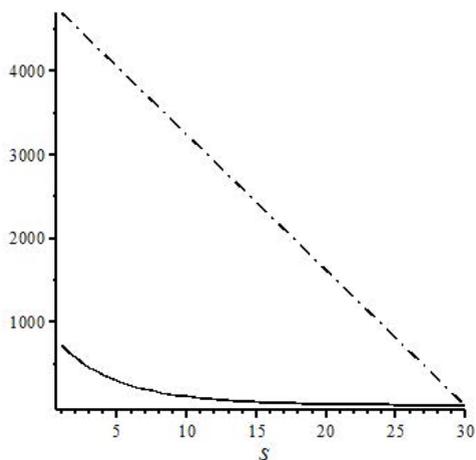


Рис. 1. Сопоставление разностного аналога $|K_1^h|$ (сплошная линия) и модуля функции (6) (пунктир с точкой)

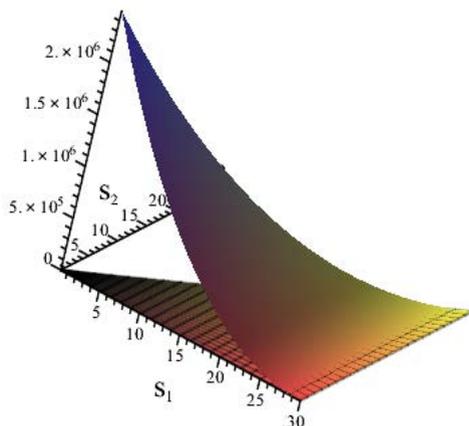


Рис. 2. Сопоставление разностного аналога K_2^h (сетчатая поверхность) и функции (7)

Таблица 1. Сеточное решение уравнения (19)

t_i	$h = 0,25$
1	-0,020671
2	0,004339
3	0,005657
4	0,011085
5	0,003393 – 0,013763I

Анализ результатов вычислительного эксперимента показывает, что область существования непрерывного решения находится в интервале $[0, T]$, $T < T^*$, где $T^* = 5$ (с).

5. Заключение

Таким образом, в данной статье выделена интегральная модель, ядра Вольтерра в которой удовлетворяют специальным мажорантным оценкам, связанным с исследованием области существования полиномиальных уравнений вольтерровского типа. Приведен пример практического использования предложенного подхода в задаче восстановления изменения расхода воды, обеспечивающего требуемое отклонение энтальпии на выходе элемента теплообменного аппарата.

Литература

1. АПАРЦИН А.С. *Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы* // Известия Иркутского государственного университета. Математика. – 2007. – №1. – С. 13–41.
2. ВОЛЬТЕРРА В. *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*. – Москва: Наука, 1982. – 302 с.
3. ИВАНОВСКИЙ Р.И., ТАРАНОВ А.Г. *Синтез многомерных систем автоматического управления с применением ЭЦВМ*. – Москва: Наука, 1970. –172 с.

4. *Иерархия в больших системах энергетики. В 2-х т. // Труды симпозиума «Иерархия в больших системах энергетики», 1978 г., Иркутск, Сибирский энергетический институт СО АН СССР / Под ред. Ю.Н. Руденко. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1978. – 278 с.*
5. КИРПА А.В. *Синтез квазиоптимальных управлений по критерию обобщенной работы с использованием функциональных рядов Вольтерра: Дис. канд. техн. наук. – Тула, 2008. – 241 с.*
6. ЛОВЧАКОВ В.И., СУХИНИН Б.В., СУРКОВ В.В. *Нелинейные системы управления электроприводами и их аналитическое конструирование. – Тула: Тульский государственный университет, 1999. – 164 с.*
7. СОЛОДУША С.В. *К задаче моделирования динамики теплообменников квадратичными полиномами Вольтерра // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №1. – С. 105–114.*
8. СОЛОДУША С.В. *Приложение нелинейных уравнений Вольтерра I рода к задаче управления динамикой теплообмена // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №6. – С. 133–140.*
9. СОЛОДУША С.В., ГРАЖДАНЦЕВА Е.Ю. *Тестовое полиномиальное уравнение Вольтерра I рода в задаче идентификации входных сигналов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2021. – Т. 27, №4. – С. 161–174.*
10. *Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – Москва: Наука, 1987. – 712 с.*
11. ТАИРОВ Э.А., ЗАПОВ В.В. *Интегральная модель нелинейной динамики парогенерирующего канала на основе аналитических решений // Вопросы атомной науки и техники. Физика ядерных реакторов. – 1991. – Вып. 3. – С. 14–20.*
12. *Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. – Москва: Машиностроение, 1969. – Ч. II. – 368 с.*

13. BHATT D., SHARMA S.N. *Volterra model-based control for nonlinear systems via Carleman linearization // arXiv preprint arXiv:2101.00495. 2021. arxiv.org*
14. LOVCHAKOV V.I. *The method of analytical design of quasi-optimal control systems with polynomial nonlinearities // Automation and Remote Control. – 2007. – Vol. 68, No. 6. – P. 979–992.*
15. SOLODUSHA S.V., BULATOV M.V. *Integral Equations Related to Volterra Series and Inverse Problems: Elements of Theory and Applications in Heat Power Engineering // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, №16. – P. 1905.*

APPLICATION OF VOLTERRA-TYPE TEST EQUATIONS TO IDENTIFY INPUT SIGNALS

Vadim Spiryaev, Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of RAS, Irkutsk, senior engineer researcher (eldin@mail.ru).
Svetlana Solodusha, Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of RAS, Irkutsk, Doctor of Science, assistant professor (solodusha@isem.irk.ru).

Abstract: The paper addresses the problem of identifying a scalar input signal of a controlled dynamic object described by the integral model in the form of a Volterra polynomial. Special classes of polynomial integral equations are distinguished, the Volterra kernels of which guarantee the fulfillment of unimprovable estimates for solutions to nonlinear inequalities. Alongside theoretical statements, the results of a computational experiment in the problem of modeling the dynamics of a heat-and-power object are presented.

Keywords: non-parametric identification, nonlinear dynamic system, polynomial Volterra equations.

УДК 517.9

ББК 22.162

DOI: 10.25728/ubs.2022.96.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.И. Зоркальцевым.*

Поступила в редакцию 10.12.2021.

Дата опубликования 31.03.2022.