

## ПРИМЕР НАСТРОЙКИ МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТИ ДЛЯ СЕТИ ДАТЧИКОВ С АНИЗОТРОПИЙНЫМ КРИТЕРИЕМ

Юрченков А. В.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматривается линейная дискретная нестационарная математическая модель динамической системы, содержащей набор датчиков, которые можно объединить в сеть. Каждый датчик имеет известную заранее вероятность безотказной работы, под отказом понимается отсутствие в измеряемом выходе информации о состоянии при наличии шумовой составляющей. Для выбранной модели оценителя выхода системы, при которой оценка может строиться как совокупная с использованием всех доступных измерений, требуется подобрать такую матрицу смежности, ассоциированную с ориентированным графом, где под вершинами подразумеваются датчики, а в качестве ребер – связи между отдельными датчиками, при которой анизотропийная норма системы в ошибках оценивания была бы ограничена минимально возможным числом. Внешнее возмущение при этом выбрано из класса последовательностей случайных векторов ненулевой цветности расширенного вектора возмущения на выбранном конечном временном горизонте. Для системы в ошибках оценивания, сведенной к виду системы с мультипликативными шумами, ставится выпуклая субоптимальная задача на основе леммы о естественной ограниченности, обеспечивающая достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы заданным числом.*

Ключевые слова: анизотропийная теория, сетевые системы, мультипликативные шумы, оценивание.

### 1. Введение

Решение задач оценивания и фильтрации остается актуальным в современной теории управления. Разрабатываются новые методы и подходы построения оценок, так по сравнению с широко известными  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальными постановками, анизотропийная теория предлагает к рассмотрению более физичный класс возмущений, действующих на динамические системы, поскольку применяет информационный критерий для их описания.

---

<sup>1</sup> Александр Викторович Юрченков, к.ф.-м.н.  
(alexander.yurchenkov@yandex.ru).

Основы этой теории были заложены И.Г. Владимировым в 90-х годах прошлого века [2].

Изначально под анизотропией случайного вектора понималось противоположное по знаку значение дифференциальной энтропии распределения нормированного случайного вектора по отношению к равномерному распределению на единичной сфере. Со временем появилось альтернативное определение, связанное с информационным уклонением Кульбака – Лейблера для двух плотностей распределения вероятностей. При этом должно сохраняться условие абсолютной непрерывности функции плотности распределения случайного вектора относительно эталонной – Гауссовской с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. Это определение имеет очень простой геометрический смысл: анизотропия случайного вектора представляет собой меру отличия между данным вектором и нормально распределенным центрированным случайным вектором со скалярной ковариационной матрицей. Анизотропия удобна для сужения класса внешних возмущений в случае отсутствия априорной информации о законах распределения возмущений или в случае присутствия неопределенности в описании стохастических характеристик входных воздействий, действующих на динамическую систему. Поскольку  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -теории управления накладывают определенные условия на множество внешних возмущений, то  $\mathcal{H}_2$ -оценивание будет гарантировать оптимальную оценку только если выполнены требования к входным воздействиям. В противоположность к  $\mathcal{H}_2$ -теории,  $\mathcal{H}_\infty$ -методы обладают большим консерватизмом, поскольку направлены на подавление так называемого «наихудшего возмущения», вероятность появления которого совсем невелика. С этой точки зрения анизотропийная теория предлагает более гибкий инструмент для описания множества входных воздействий. Критерием качества в этой теории является стохастический аналог  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы динамической системы – анизотропийная норма.

Анизотропийная норма причинной системы имеет свойство принимать значение масштабированной  $\mathcal{H}_2$ -нормы в случае ра-

венства нулю анизотропии внешнего возмущения или быть равной  $\mathcal{H}_\infty$ -норме, если анизотропия входного воздействия стремится к бесконечности [3]. Исходя из этого свойства, решения оптимальных  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -задач могут быть получены в качестве предельных случаев соответствующих задач в анизотропийной постановке. При этом разработан эффективный метод численного решения субоптимальных задач в анизотропийной теории на основе полуопределенного программирования [5].

До недавнего времени в анизотропийной теории рассматривались только детерминированные дискретные системы, однако в работе [9] была решена задача анализа для нестационарной системы в пространстве состояний, матрицы которой представляли собой набор случайных матриц. После этого удалось получить точные формулы для вычисления анизотропийной нормы для системы с мультипликативными шумами [8], поскольку до этого существовали только оценочные методы вычисления границы анизотропийной нормы [7]. Кроме того, удалось решить задачу построения оценки для сетевой системы с отказывающимися датчиками [11], а также решить задачу коррекции для одного отказывающегося датчика [12].

В данной работе представлен метод настройки матрицы смежности для сетевой системы. В отличие от [11], необходимо наличие начальной модели оценителя для запуска алгоритма настройки коммуникационных связей в сети. Настройка матрицы смежности позволяет уменьшить оценку сверху для анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания, что приводит к более качественному решению задачи слежения. Для того чтобы избежать нелинейности, предлагается последовательное решение двух задач выпуклой оптимизации. Во второй части статьи изложены основные понятия анизотропийной теории, в третьей – постановка задачи, в четвертой части приводятся основные результаты, заключительная часть содержит описание численного моделирования.

## 2. Предварительные сведения

В этом разделе перечислены только базовые понятия анизотропной теории. Более подробный анализ для линейных дискретных нестационарных систем можно найти в [1, 4, 14]. Системы с мультипликативными шумами рассмотрены в работе [8].

### 2.1. АНИЗОТРОПИЯ СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА

Анизотропия устанавливает связь между функцией плотности распределения случайного вектора  $W$  и эталонной нормально распределенной функцией плотности распределения с нулевым матожиданием и скалярной ковариационной матрицей  $\lambda I_m \succ 0$ .

*Определение 1.* Анизотропией случайного вектора  $W$  называют следующую неотрицательную величину [14]:

$$\mathbf{A}(W) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}),$$

где  $\mathbf{D}(\cdot)$  – информационное уклонение Кульбака – Лейблера,  $p_{m,\lambda}(w) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|w|^2}{2\lambda}\right)$ ,  $w \in \mathbb{R}^m$ .

Анизотропия может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{A}(W) = \frac{m}{2} \ln \left( \frac{2\pi e}{m} \|W\|^2 \right) - \mathbf{h}(W),$$

где  $\mathbf{h}(W) = - \int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$  – дифференциальная энтропия  $W$ ,  $\|W\| = \sqrt{\mathbf{E}[W^T W]}$ ,  $\mathbf{E}[\cdot]$  – оператор матожидания, подробное описание свойств можно найти в [14].

Обозначим в качестве  $W_{0:N}$  расширенный вектор, состоящий из элементов последовательности случайных  $m$ -мерных векторов:

$$W_{0:N} = [w_0^T, \dots, w_N^T]^T.$$

Множество векторов с ограниченным уровнем анизотропии обозначается в виде

$$\mathbb{W}_a = \{W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^m : \mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a\},$$

где  $\mathbb{L}_2^m$  – гильбертово пространство с соответствующей нормой  $\|W\|$ . Множество  $\mathbb{W}_a$  с ограниченной анизотропией помогает уменьшить консерватизм, присущий  $\mathcal{H}_\infty$ -случаю.

## 2.2. АНИЗОТРОПИЙНАЯ НОРМА

Как было отмечено, анизотропийная норма – частный случай индуцированной стохастической  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы с дополнительным информационным ограничением на вход системы. Вычисление анизотропийной нормы для стационарных и нестационарных систем отличается, далее будет рассмотрен нестационарный случай. Рассмотрим среднеквадратичный коэффициент усиления (СКУ):

$$\mathbf{Q}(F, W) = \frac{\|FW\|}{\|W\|},$$

где  $F \in \mathbb{L}_2^{p \times m}$  – линейный оператор, соответствующий динамической системе. Для вычисления СКУ определим матрицы  $\Lambda = \mathbf{E}[F^T F] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  и  $\Sigma = \mathbf{E}[WW^T] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . В случае независимости  $F$  и  $W$  СКУ может быть представлен в виде

$$(1) \quad \mathbf{Q}(F, W) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda\Sigma)}{\text{tr}(\Sigma)}},$$

где обозначение  $\text{tr}(\cdot)$  закреплено за следом соответствующей матрицы.

*Определение 2.* Анизотропийная норма системы  $F$  представляет собой супремум отношения расширенного вектора выхода системы к расширенному вектору входа с дополнительным ограничением на вход в виде анизотропийного условия:

$$\|F\|_a = \sup_{W \in \mathbb{W}_a} \mathbf{Q}(F, W).$$

Анизотропийная теория обобщает известные результаты казалось бы не связанных из-за различных классов воздействующих на систему возмущений  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальных задач. Предельными значениями анизотропийной нормы являются масштабированная  $\mathcal{H}_2$ -норма и  $\mathcal{H}_\infty$ -норма причина системы [3].

Для детерминированных систем в анизотропной теории решены многие задачи по управлению и фильтрации, основанные на подходах, предложенных И.Г. Владимировым более 25 лет назад, в то время как анализ стохастических систем был впервые рассмотрен в работе [9]. Чтобы кратко описать этот результат, рассмотрим систему  $F$  на конечном временном горизонте:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k, & x_0 &= 0, \\ z_k &= C_k x_k + D_k w_k, \end{aligned}$$

где  $A_k \in \mathbb{L}_2^{n_x \times n_x}$ ,  $B_k \in \mathbb{L}_2^{n_x \times m_w}$ ,  $C_k \in \mathbb{L}_2^{p_z \times n_x}$ ,  $D_k \in \mathbb{L}_2^{p_z \times m_w}$ ,  $k = \{0, \dots, N\}$  – случайные матрицы, возмущение имеет ограничение сверху на уровень анизотропии  $W_{0:N} \in \mathbb{W}_a$ . Матричная норма  $\|X\| = \sqrt{\text{tr} \mathbf{E}[X^T X]}$  выбрана в соответствующем гильбертовом пространстве  $\mathbb{L}_2^{p \times m}$ . Анизотропная норма системы (2) может быть вычислена с помощью специальных функций  $\|F\|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$ , где  $\mathcal{A}(q)$  и  $\mathcal{N}(q)$  определены следующим образом:

$$(3) \quad \mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)}}, \quad \mathcal{A}(q) = \frac{l_w}{2} (\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

а вспомогательные функции  $\Phi(q)$ ,  $\Psi(q)$  имеют вид:

$$\Phi(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \text{tr}(L_k \Upsilon_k L_k^T + S_k), \quad \Psi(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \ln \det S_k.$$

Матрица  $\Upsilon_k$  связана с разностным ляпуновоподобным уравнением:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{k+1} &= (\mathbf{E}[A_k] + \mathbf{E}[B_k]L_k)\Upsilon_k(\mathbf{E}[A_k] + \mathbf{E}[B_k]L_k)^T \\ &\quad + \mathbf{E}[B_k]S_k\mathbf{E}[B_k^T], \quad \Upsilon_0 = 0, \end{aligned}$$

а матрицы  $L_k, S_k$  определяются через Риккати-подобную систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
 R_{1,k} &= \mathbf{E}[A_k^T R_{1,k+1} A_k] + q \mathbf{E}[C_k^T C_k], \\
 R_{2,k} &= \mathbf{E}[A_k^T] R_{2,k+1} \mathbf{E}[A_k] + L_k^T S_k^{-1} L_k^T, \\
 S_k &= (I_{m_w} - q \mathbf{E}[D_k^T D_k] - \mathbf{E}[B_k^T R_{1,k+1} B_k] \\
 &\quad - \mathbf{E}[B_k^T] R_{2,k+1} \mathbf{E}[B_k])^{-1}, \\
 L_k &= S_k (q \mathbf{E}[D_k^T C_k] + \mathbf{E}[B_k^T R_{1,k+1} A_k] \\
 &\quad + \mathbf{E}[B_k^T] R_{2,k+1} \mathbf{E}[A_k]),
 \end{aligned}$$

где  $q \in [0; \|F\|_\infty^{-2}]$ ,  $l_w = m_w(N + 1)$  и  $R_{1,N+1} = 0$ ,  $R_{2,N+1} = 0$  – граничные условия.

### 2.3. УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ

Вычисление анизотропной нормы связано с решением нелинейной матричной системы уравнений, вследствие чего поиск решения существенно проблематичен, однако поиск верхней границы анизотропной нормы может быть сведен к выпуклой задаче полуопределенного программирования, которая может быть решена стандартными средствами. Такой подход широко распространен в теории управления, а в рамках анизотропной теории рассматривается в [5]. Но для стохастических систем условие ограниченности отличается от аналогичного условия для детерминированных систем. Первые попытки анализа были сделаны в работе [10], а в [7] предложен метод мажоранты для стационарных систем. Более того, был рассмотрен вариант синтеза управления на основе декомпозиции системы [6]. Но завершённый анализ с точными формулами для вычисления анизотропной нормы системы с мультипликативными шумами был представлен в [8], где была использована идея анализа стохастических систем, позаимствованная из [9].

Рассмотри реализацию в пространстве состояний систему с мультипликативными шумами  $F$ :

$$\begin{aligned}
 (4) \quad x_{k+1} &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^A A_{i,k} x_k + \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^B B_{i,k} w_k, \\
 z_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^C C_{i,k} x_k + \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^D D_{i,k} w_k,
 \end{aligned}$$

где нестационарные матрицы  $A_{i,k}$ ,  $B_{i,k}$ ,  $C_{i,k}$ ,  $D_{i,k}$  заданы,  $\xi_{i,k}^Y$ ,  $Y \in \{A, B, C, D\}$ ,  $k = \{0, \dots, N\}$ , представляют собой случайные величины с распределением Бернулли с заданными вероятностями. Матрицы и случайные величины считаются независимыми по всем аргументам.

**Теорема 1 [8].** *Анизотропийная норма системы (4) ограничена заданным значением  $\gamma$ , если следующая система неравенств*

$$(5) \quad R_k \succ \sum_{i=0}^M (A_{i,k}^T R_{k+1} A_{i,k} + q C_{i,k}^T C_{i,k}) + L_k^T S_k^{-1} L_k,$$

где

$$(6) \quad S_k = (I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (q D_{i,k}^T D_{i,k} + B_{i,k}^T R_{k+1} B_{i,k}))^{-1},$$

$$L_k = S_k (B_{0,k}^T R_{k+1} A_{0,k} + q D_{0,k}^T C_{0,k}),$$

имеет решение  $R_k$ ,  $k = \{0, \dots, N\}$ , для некоторого значения параметра  $q \in [0, \|F\|_{\infty}^{-2})$  в совокупности с неравенством специального вида

$$(7) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det S_k^{-1} \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2),$$

при этом неотрицательное значение  $a$  представляет собой ограничение на анизотропию расширенного входного вектора,  $R_{N+1} = 0$  – граничное условие. Матрицы  $S_k$  и  $R_k$ ,  $k = \{0, \dots, N\}$ , являются положительно определенными.

Условие данной теоремы может быть применено для сетевых систем после представления системы в пространстве состояний к виду системы с мультипликативными шумами.

### 3. Постановка задачи

Динамическая система со множеством датчиков может быть описана с помощью следующей системы уравнений:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k, & x_0 &= 0, \\ z_k &= M_k x_k + N_k w_k, \\ y_{j,k} &= \lambda_{j,k} C_{j,k} x_k + D_{j,k} w_k, \end{aligned}$$

где количество шагов по времени ограничено значением  $N_h$ . Здесь  $x_k$  обозначает вектор состояния, случайные входные векторы  $w_k$  образуют расширенный вектор  $W = (w_0^T, \dots, w_{N_h}^T)^T$  с известным ограничением на уровень анизотропии  $a$ ,  $z_k$  – оцениваемый выход,  $y_{j,k}$ ,  $j \in \mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ , – измеряемые выходы, соответствующие отдельным  $n$  датчикам. Матрицы в (8) имеют следующие размерности:  $A_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B_k \in \mathbb{R}^{n_x \times m_w}$ ,  $M_k \in \mathbb{R}^{p_z \times n_x}$ ,  $N_k \in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}$ ,  $C_{j,k} \in \mathbb{R}^{p_y \times n_x}$ ,  $D_{j,k} \in \mathbb{R}^{p_y \times m_w}$ . Размерность векторов  $x_k$ ,  $w_k$ ,  $z_k$ ,  $y_{j,k}$  согласуется с размерностью матриц. Случайные величины  $\lambda_{j,k}$  модулируют сбой датчика в отдельный момент времени. Если  $\lambda_{j,k} = 0$ , то измерение содержит только шумовую составляющую, в противоположном случае  $\lambda_{j,k} = 1$  и в измерительном канале присутствует информация о состоянии, что соответствует исправно работающему датчику. Все случайные величины  $\lambda_{j,k}$ ,  $j = \{1, \dots, n\}$ , имеют распределение Бернулли с заданными вероятностями:  $P(\lambda_{j,k} = 1) = p_j$  и  $P(\lambda_{j,k} = 0) = 1 - p_j$ . Случайные величины  $\lambda_{j,k}$  независимы по всем аргументам  $j$  и  $k$ .

Взаимодействие между датчиками описывается с помощью матрицы смежности  $\mathbf{a} = (a_{ji})$ ,  $a_{ji} \geq 0$ , для которой  $a_{ji} = 0$  в том случае, если датчик  $j$  не использует измерения с датчика с номером  $i$ , при этом всегда  $a_{jj} \in (0, 1]$ . Матрица смежности может быть ассоциирована с уровнем доверия измерениям датчиков между собой.

Главная задача заключается в следующем: имея набор измерений  $y_{j,k}$  для  $\kappa \leq k$  и начальное приближение для матрицы смежности, найти оценку  $\hat{z}_k$  выхода  $z_k$  системы (8) и такой вид матрицы смежности, при котором верхняя граница анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания будет ограничена минимально возможным числом.

#### 4. Решение задачи

На первом шаге введем  $n$  виртуальных объектов на основе (8). При этом каждая виртуальная модель будет связана с одним доступным измерением из набора  $y_{j,k}$ ,  $j = \{1, \dots, n\}$ , и иметь

собственную динамику:

$$(9) \quad \begin{aligned} x_{j,k+1} &= A_k x_{j,k} + B_k w_k, \quad x_0 = 0, \\ z_{j,k} &= M_k x_{j,k} + N_k w_k, \\ y_{j,k} &= \lambda_{j,k} C_{j,k} x_{j,k} + D_{j,k} w_k, \end{aligned}$$

где матрицы  $A_k, B_k, M_k, N_k, C_k, D_k$  совпадают с соответствующими матрицами в (8). Рассмотрим люенбергеровскую модель оценщика для каждого виртуального объекта в следующем виде:

$$(10) \quad \begin{aligned} \hat{x}_{j,k+1} &= A_{j,k} \hat{x}_{j,k} + H_{j,k} (y_{j,k} - \hat{y}_{j,k}), \\ \hat{z}_{j,k} &= M_k \hat{x}_{j,k}, \\ \hat{y}_{j,k} &= p_j C_{j,k} \hat{x}_{j,k}, \end{aligned}$$

где матрицы оценщика  $H_{j,k}, j = \{1, \dots, n\}$ , должны быть найдены.

Для того чтобы ввести систему в ошибки оценивания, необходимо ввести ошибки по состоянию и по оцениваемому выходу  $\tilde{x}_{j,k} = x_{j,k} - \hat{x}_{j,k}$  и  $\tilde{z}_{j,k} = z_{j,k} - \hat{z}_{j,k}, j = \{1, \dots, n\}$ , соответственно. Заметим, что матрица смежности должна удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} = 1, \quad \forall j = \overline{1, n},$$

которое дает возможность использовать виртуальные объекты как для оценки выхода системы, так и для оценки состояния. Учитывая (9) и (10) совместно с упомянутым условием на матрицу смежности, динамика ошибок оценивания для каждого виртуального объекта имеет вид

$$(11) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_{j,k+1} &= \sum_{i=1}^n (A_{ji,k} x_{j,k} + \tilde{A}_{ji,k} \tilde{x}_{i,k} + \tilde{B}_{i,k} w_k), \\ \tilde{z}_{j,k} &= \sum_{i=1}^n (M_{ji,k} x_{i,k} + \tilde{M}_{ji,k} \tilde{x}_{i,k}) + \tilde{N}_{j,k} w_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{ji,k} &= A_k \delta_{ji} - a_{ji} (A_k - (\lambda_i - p_i) H_{ji,k} C_{i,k}), \\ \tilde{A}_{ji,k} &= a_{ji} (A_k - p_i H_{ji,k} C_{i,k}), \quad \tilde{B}_{i,k} = B_k \delta_{ji} - a_{ji} H_{ji,k} D_{i,k}, \\ M_{ji,k} &= M_k \delta_{ji} - a_{ji} M_k, \quad \tilde{M}_{ji,k} = a_{ji} M_k, \quad \tilde{N}_{j,k} = N_k, \end{aligned}$$

а  $\delta_{ji}$  – символ Кронекера.

В работе [11] был использован расширенный вектор ошибки, поэтому необходимо ввести расширенные векторы состояния, ошибки состояния и ошибки оцениваемого выхода:

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= (x_{1,k}^T, \dots, x_{n,k}^T)^T, \\ \tilde{x}_k &= (\tilde{x}_{1,k}^T, \dots, \tilde{x}_{n,k}^T)^T, \\ \tilde{z}_k &= (\tilde{z}_{1,k}^T, \dots, \tilde{z}_{n,k}^T)^T.\end{aligned}$$

Объединим векторы  $\bar{x}_k$ ,  $\tilde{x}_k$  в новый комбинированный вектор следующим образом:

$$\zeta_k = (\bar{x}_k^T, \tilde{x}_k^T)^T.$$

Динамика комбинированного состояния  $\zeta_k$  будет описываться системой с мультипликативными шумами:

$$(12) \quad \begin{aligned}\zeta_{k+1} &= (\mathbb{A}_k + \sum_{i=1}^n \xi_{i,k} \mathbb{A}_{i,k}) \zeta_k + \mathbb{B}_k w_k, \\ \tilde{z}_k &= \mathbb{M}_k \zeta_k + \mathbb{N}_k w_k,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_k &= \begin{bmatrix} \bar{A}_k & 0_{nn_x \times nn_x} \\ \bar{A}_k - \bar{A}_k^a & \bar{A}_k^a - \bar{H}_k^a \bar{C}_k^p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_k = \begin{bmatrix} \bar{B}_k \\ \bar{B}_k - \bar{H}_k^a \bar{D}_k \end{bmatrix}, \\ \mathbb{A}_{i,k} &= \begin{bmatrix} 0_{nn_x \times nn_x} & 0_{nn_x \times nn_x} \\ \bar{H}_k^a \bar{C}_{i,k} & 0_{nn_x \times nn_x} \end{bmatrix}, \\ \mathbb{M}_k &= [\bar{M}_k - \bar{M}_k^a \quad \bar{M}_k^a], \quad \mathbb{N}_k = \bar{N}_k.\end{aligned}$$

При этом случайны величины  $\xi_{i,k} = \lambda_{i,k} - p_{i,k}$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$ , будут центрированы. В системе (12), использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{A}_k &= I_n \otimes A_k, & \bar{A}_k^a &= \mathbf{a} \otimes A_k, \\ \bar{B}_k &= \text{col}(n) \otimes B_k, & \bar{H}_k^a &= \text{block}(\mathbf{a}_{ji} H_{ji,k}), \\ & & & j, i = \overline{1, n}, \\ \bar{C}_k^p &= \text{diag}(p_i C_{i,k}), & \bar{C}_{j,k} &= \text{diag}(\delta_{ij} C_{i,k}), \\ & i = \overline{1, n}, & & i = \overline{1, n}, \\ \bar{D}_k &= \text{col}(D_{j,k}), & \bar{M}_k &= I_n \otimes M_k, \\ \bar{M}_k^a &= \mathbf{a} \otimes M_k, & \bar{N}(k) &= \text{col}(n) \otimes N_k,\end{aligned}$$

где  $\text{col}(n)$  соответствует вектору из единиц длиной  $n$ ,  $\text{block}(X_{ji})$  – блочная матрица с блоками  $X_{ji}$ ;  $\text{diag}(X_i)$  – диагонально блочная матрица с элементами  $X_i$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$ , на главной диагонали, остальные элементы матрицы равны нулю;  $\text{col}(X_j)$  – столбец с элементами в виде матриц  $X_j$ ,  $j = \{1, \dots, n\}$ ;  $\otimes$  – прямое произведение матриц (Кронекерово произведение).

Теперь сформулируем условие ограниченности анизотропной нормы для системы (12).

**Теорема 2.** *Анизотропная норма системы (12) ограничена заданным пороговым значением  $\gamma$ , если анизотропия расширенного вектора возмущения  $W_{0:N}$  не превосходит  $a \geq 0$ , случайные величины  $\xi_{i,k}$  взаимно независимы, центрированы и имеют заданные дисперсии  $\sigma_i^2$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$ , и следующие неравенства:*

$$(13) \quad \begin{bmatrix} R_k & * & * & * & \dots & * & * \\ \mathbb{N}_k^T \mathbb{M}_k & \eta^2 I_{m_w} - \mathbb{N}_k^T \mathbb{N}_k & * & * & \dots & * & * \\ R_{k+1} \mathbb{A}_k & -R_{k+1} \mathbb{B}_k & R_{k+1} & * & \dots & * & * \\ \sigma_1 R_{k+1} \mathbb{A}_{1,k} & 0 & 0 & R_{k+1} & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_n R_{k+1} \mathbb{A}_{n,k} & 0 & 0 & 0 & \dots & R_{k+1} & * \\ \mathbb{M}_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_{np_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \eta^2 I_{m_w} - \Psi_k - \mathbb{N}_k^T \mathbb{N}_k & * \\ R_{k+1} \mathbb{B}_k & R_{k+1} \end{bmatrix} \succ 0,$$

для  $k = \{0, \dots, N_h - 1\}$ ,

$$(15) \quad \begin{bmatrix} R_{N_h} & * & * \\ \mathbb{N}_{N_h}^T \mathbb{M}_{N_h} & \eta^2 I_{m_w} - \mathbb{N}_{N_h}^T \mathbb{N}_{N_h} & * \\ \mathbb{M}_{N_h} & 0 & I_{np_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(16) \quad \eta^2 I_{m_w} - \Psi_N - \mathbb{N}_{N_h}^T \mathbb{N}_{N_h} \succ 0,$$

$$(17) \quad \sum_{k=0}^{N_h} \ln \det \Psi_k \geq 2a + m_w(N_h + 1) \ln(\eta^2 - \gamma^2)$$

имеют положительно определенные решения  $R_k$ ,  $k = \{0, \dots, N_h\}$ ,  $\Psi_k$  при всех  $k$ , и существует скалярный параметр  $\eta$ .

**Доказательство.** Переобозначим  $R_k = q^{-1}R_k$  и введем новые переменные  $q^{-1} = \eta$ , положительно определенные матрицы  $\Psi_k = \eta^2\Phi_k$  с дополнительным условием  $0 \prec \Phi_k \prec S_k^{-1}, \forall k$ . Тогда неравенства (5), (7) можно переписать в новых обозначениях. Пользуясь леммой Шура, неравенства (13), (17) могут быть получены из (5), (7). Вместо условия (6) имеет место неравенство (14), а (15), (16) представляют собой граничные условия с учетом новых переменных. ■

Система неравенств (13)–(17) является выпуклой относительно переменных  $R_k, \Psi_k, k = \{0, \dots, N_h\}$ , поэтому вычисление верхней границы анизотропийной нормы для фиксированной матрицы смежности сетевой системы может быть сделано стандартными пакетами прикладных программ. В случае когда матрица смежности должна быть подобрана, система неравенств будет содержать нелинейности.

Неравенства (13)–(14) содержат произведения матрицы смежности  $\alpha$ , матриц оценителя  $\bar{H}_k^a$  и матрицы  $R_k$ . Чтобы избежать проблему нелинейности, недостаточно использовать замену переменных, указанную в [11]. Итерационный алгоритм вычисления параметров оценителя и матрицы смежности можно разделить на два последовательно повторяющихся шага при начальном значении  $s = 0$ :

- а) фиксируем матрицу  $\alpha^s$ , и делаем  $s$ -ю итерацию для вычисления матриц оценителя согласно алгоритму в [11], что приводит к замене переменных

$$U_k = \begin{bmatrix} Y_k & 0 \\ 0 & \bar{H}_k^a \end{bmatrix}, \quad X_k = R_{k+1}U_k,$$

где  $Y_k$  – некоторая неизвестная матрица,  $k = \{0, \dots, N_h\}$ ,  $X_k = \text{diag}(X_{i,k})_{i=1,2}$ . Согласно указанной замене переменных,



Замена переменных будет справедливой, если матрицы  $R_{k+1}$ ,  $k = \{0, \dots, N_h - 1\}$ , имеют блочно-диагональную структуру

$$R_k = \begin{bmatrix} R_{1,k} & 0 \\ 0 & R_{2,k} \end{bmatrix}.$$

При условии разрешимости оптимизационной задачи, матрицы оценителя могут быть вычислены следующим образом:

$$\bar{H}_k^a = [0_{2nn_x \times 2nn_x} \quad I_{2nn_x}] R_{k+1}^{-1} X_k \begin{bmatrix} 0_{2np_y \times 2np_y} \\ I_{2np_y} \end{bmatrix}.$$

Также стоит указать, что блоки матриц  $X_{2,k}$  имеют нулевые элементы на тех же позициях, что и матрица смежности  $a^s$ .

- б) для фиксированных матриц оценителя  $\bar{H}_k^a$  и  $R_{2,k}$ ,  $k = \{0, \dots, N_h\}$ , система неравенств (13)–(15) будет линейной относительно матрицы смежности  $a$ . После решения оптимизационной задачи

$$\gamma^2 \xrightarrow{(13)-(17)} \min \quad \text{subject to } R_k, \Psi_k, \eta, \gamma^2,$$

в совокупности с условием  $\gamma_s^2 \geq \gamma^2$ , новое приближение матрицы смежности  $a^{s+1}$  можно считать найденным. Далее следует увеличить значение внутреннего счетчика  $s = s + 1$  и повторить оба шага.

Алгоритм имеет естественные условия остановки: либо на очередном шаге оптимизационная задача не может быть решена, либо новое приближение  $\gamma_{s+1}$  отличается от предыдущего  $\gamma_s$  не более чем на величину выбранной точности  $\varepsilon$ .

**Замечание 1.** Поскольку одновременное решение оптимизационной задачи относительно неизвестных матриц смежности и параметров оценителя представляется нетривиальной проблемой в численных методах, указанный алгоритм может быть

использован как один из возможных вариантов получения решения поставленной задачи. Этот метод является чувствительным к начальному приближению матрицы смежности  $\alpha^0$ . Итерационная процедура вычисления верхней границы анизотропийной нормы позволяет свести решение поставленной задачи к последовательно решаемым оптимизационным задачам, в ходе которых получена невозрастающая последовательность приближений к границе анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания. Сходимость метода обеспечивается сходимостью в случае существования решения для линейных матричных неравенств с выпуклым ограничением.

## 5. Моделирование

В этом разделе будут продемонстрированы результаты моделирования, полученного в результате построения оценки выхода механической системы, состоящей из перевернутого маятника на подвижном основании. Объект стабилизирован управлением на основе model predictive control (MPC), и результаты получены для уже замкнутой управлением системы. Динамика системы описывается следующими матрицами в пространстве состояний:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1,1540 & 0,1984 & 0,2354 & 0,0393 & 0,0125 & 0,0004 \\ 1,6226 & 2,0366 & 2,5361 & 0,4157 & 0,1317 & 0,0043 \\ -0,8189 & -0,5230 & -0,0644 & -0,1031 & -0,0665 & -0,0022 \\ -9,5507 & -6,1013 & -11,0269 & -1,2592 & -0,7752 & -0,0252 \\ 1,1540 & 0,1984 & 0,2354 & 0,0393 & 1,0125 & 0,0004 \\ -0,8189 & -0,5230 & -0,0644 & -0,1031 & -0,0665 & 0,9978 \end{bmatrix},$$

$$B_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,1]^T, \quad M_k = C_{j,k}, \quad N_k = 0, \\ C_{j,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{j,k} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $j = \{1, 2, 3\}$ . Три датчика измеряют перемещение подвижного основания вдоль горизонтальной оси и отклонение маятника от вертикальной оси. Вероятность безотказной работы датчиков следующая:  $P(\lambda_{1,k}) = 0,95$ ,  $P(\lambda_{2,k}) = 0,75$ , для третьего датчика выбрана самая низкая вероятность безотказной работы

$P(\lambda_{3,k}) = 0,50$ . Анизотропия расширенного вектора ограничена  $a = 1$ , что обусловлено небольшим временным горизонтом.

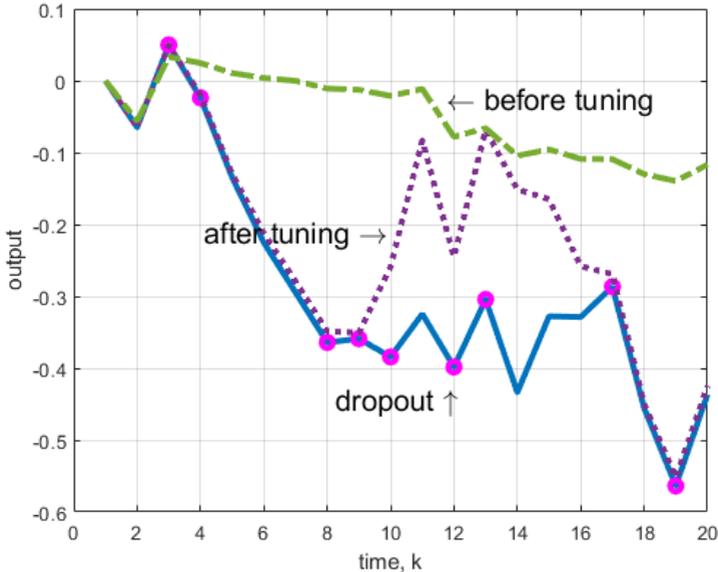


Рис. 1. Первый компонент оцениваемого выхода

На рис. 1 непрерывная линия соответствует первой компоненте оцениваемого выхода, маркеры на этой линии соответствуют моментам, когда датчик отказывал, т.е. измерения содержали только шумовую составляющую. Штрихпунктирная линия соответствует оценке, полученной на основе третьего датчика с самой большой вероятностью отказа, когда датчик не используют измерения от «соседей», что соответствует единичной матрице смежности. Легко заметить, что после первого отказа в измерениях получаемая на основе третьего датчика оценка далека от желаемых значений. После настройки матрицы смежности оценка происходит на основе трех измерительных приборов и даже после серии отказов возвращается в малую окрестность оцениваемого выхода, на рис. 1 она отмечена пунктирной линией.

После настройки матрицы смежности третий датчик использует показания первого и второго, в общем объеме около 30% для построения оценки выхода. СКУ при этом уменьшается с 0,8386 до 0,3621. Графики представлены только для одного датчика, который демонстрирует наибольшее улучшение с точки зрения СКУ. Анизотропийная норма системы в ошибках оценивания при этом уменьшилась с 0,1755 до 0,1578.

Разработанный метод настройки матрицы смежности дает возможность улучшить полученную оценку выхода системы при наличии нескольких измерителей. Даже при наличии отказов отдельных датчиков данный подход позволяет уменьшать значение ошибки.

## **6. Выводы**

В данной работе рассматривается задача построения оценки для сетевой системы в рамках анизотропийной теории. Показано, что исходную систему можно свести к системе в ошибках оценивания, в динамике которой присутствуют мультипликативные шумы. Для такой системы применяется лемма о вещественной ограниченности в терминах анизотропийной теории для получения достаточных условий ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания. Указано, что задача одновременной настройки матрицы смежности системы и поиск параметров оценщика является нелинейной с точки зрения разрешимости конечной системы неравенств и предложен двухшаговый итерационный алгоритм, позволяющий разделить эти задачи. Описанная процедура позволяет получить последовательные приближения матрицы смежности и параметры оценщика, на основе которых граница анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания будет численно получена как решение задачи выпуклой оптимизации.

### Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД Ф., КЛОЕДЕН П.Е. *Анизотропный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале* // Автоматика и телемеханика – 2006. – №8. – С. 92–111.
2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // Доклады Академии наук. – 1995. – Т. 342. – С. 583–585.
3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Асимптотика анизотропной нормы линейных стационарных систем* // Автоматика и телемеханика – 1999. – №3. – С. 78–87.
4. ТИМИН В.Н., КУРДЮКОВ А.П. *Анизотропная многокритериальная нестационарная фильтрация на конечном горизонте* // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 464, №3. – С. 279–283.
5. ТИМИН В.Н., ЧАЙКОВСКИЙ М.М., КУРДЮКОВ А.П. *Решение задачи анизотропной субоптимальной фильтрации методом выпуклой оптимизации* // Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 444, №6. – С. 612–615.
6. ЮРЧЕНКОВ А.В. *Синтез анизотропного управления для линейной дискретной системы с мультипликативными шумами* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2018. – №6. – С. 33–44.
7. ЮРЧЕНКОВ А.В., КУСТОВ А.Ю., КУРДЮКОВ А.П. *Условия ограниченности анизотропной нормы системы с мультипликативными шумами* // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 467, №4. – С. 396–399.
8. BELOV I.R., YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU. *Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative*

- Noise Systems: the Finite Horizon Case* // Proc. of the 27th Med. Conf. on Contr. and Aut. – 2019. – P. 148–152.
9. KUSTOV A.YU. *State–Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System* // Proc. 15th Int. Conf. on Electr. Eng., Comp. Science and Autom. Control. – 2018. – P. 1–6.
  10. KUSTOV A.YU., KURDYUKOV A.P., YURCHENKOV A.V. *On the Anisotropy-Based Bounded Real Lemma Formulation for the Systems with Disturbance–Term Multiplicative Noise* // IFAC–PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49, No. 13. – P. 65–69.
  11. KUSTOV A.YU., YURCHENKOV A.V. *Finite–horizon Anisotropic Estimator Design in Sensor Networks* // Proc. 59th IEEE Conf. on Decision and Control. – 2020. – P. 4330–4335.
  12. KUSTOV A.YU., YURCHENKOV A.V. *Finite–horizon Anisotropy–based Estimation with Packet Dropouts* // IFAC–PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, No. 2. – P. 4516–4520.
  13. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P. *Stochastic Approach to  $\mathcal{H}_\infty$ –optimization* // Proc. 33th IEEE Conf. on Decision and Control. – 1994. – P. 2249–2250.
  14. VLADIMIROV I.G., DIAMOND P., KLOEDEN P. *Anisotropy–based Robust Performance Analysis of Linear Discrete Time Varying Systems*: CADSMAP Research Report 01-01. – The University of Queensland, Australia, 2001.

## **SENSOR NETWORK ADJACENCY MATRIX SET UP BASED ON ANISOTROPIC CRITERION**

**Alexander Yurchenkov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc.  
(alexander.yurchenkov@yandex.ru).

*Abstract: In this paper, a linear discrete time-varying system of sensors network is considered. Each sensor has appropriate dropout probability with Bernoulli distribution. The dropout occurs if measurement output contains only a noise term. The external disturbance belongs to sequences of random vectors with bounded anisotropy of the extended vector. The estimation model of the system is given, for the model an adjacency matrix set up is suggested based on an anisotropic criterion. The input-to-estimation error system is derived, it has the multiplicative noise system type. The estimation problem is reduced to convex optimization one. The suggested method of optimization is based on applying bounded real lemma with the anisotropic norm boundedness sufficient condition. The solution of considered problem allows to decrease anisotropic norm of the input-to-estimation error system, this yields to better performance in the estimation problem.*

Keywords: anisotropy-based theory, sensors network, multiplicative noise system, estimation.

УДК 62-5

ББК 30в6

DOI: 10.25728/ubs.2022.99.2

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.*

*Поступила в редакцию 04.08.2022.*

*Дата опубликования 30.09.2022.*